



工程力学
Engineering Mechanics
ISSN 1000-4750, CN 11-2595/O3

《工程力学》网络首发论文

题目: 带有任意弹性支撑的大型有面外支撑杆 X 撑结构屈曲分析
作者: 崔哲华, 康元顺, 张伟为, 曾晓辉
收稿日期: 2022-05-26
网络首发日期: 2023-02-17
引用格式: 崔哲华, 康元顺, 张伟为, 曾晓辉. 带有任意弹性支撑的大型有面外支撑杆 X 撑结构屈曲分析[J/OL]. 工程力学.
<https://kns.cnki.net/kcms/detail//11.2595.o3.20230216.1205.012.html>



网络首发: 在编辑部工作流程中, 稿件从录用到出版要经历录用定稿、排版定稿、整期汇编定稿等阶段。录用定稿指内容已经确定, 且通过同行评议、主编终审同意刊用的稿件。排版定稿指录用定稿按照期刊特定版式(包括网络呈现版式)排版后的稿件, 可暂不确定出版年、卷、期和页码。整期汇编定稿指出版年、卷、期、页码均已确定的印刷或数字出版的整期汇编稿件。录用定稿网络首发稿件内容必须符合《出版管理条例》和《期刊出版管理规定》的有关规定; 学术研究成果具有创新性、科学性和先进性, 符合编辑部对刊文的录用要求, 不存在学术不端行为及其他侵权行为; 稿件内容应基本符合国家有关书刊编辑、出版的技术标准, 正确使用和统一规范语言文字、符号、数字、外文字母、法定计量单位及地图标注等。为确保录用定稿网络首发的严肃性, 录用定稿一经发布, 不得修改论文题目、作者、机构名称和学术内容, 只可基于编辑规范进行少量文字的修改。

出版确认: 纸质期刊编辑部通过与《中国学术期刊(光盘版)》电子杂志社有限公司签约, 在《中国学术期刊(网络版)》出版传播平台上创办与纸质期刊内容一致的网络版, 以单篇或整期出版形式, 在印刷出版之前刊发论文的录用定稿、排版定稿、整期汇编定稿。因为《中国学术期刊(网络版)》是国家新闻出版广电总局批准的网络连续型出版物(ISSN 2096-4188, CN 11-6037/Z), 所以签约期刊的网络版上网络首发论文视为正式出版。

带有任意弹性支撑的大型有面外支撑杆 X 撑结构屈曲分析

崔哲华^{1,2,3}, 康元顺^{1,3}, 张伟为^{1,2,3}, *曾晓辉^{1,3}

(1. 中国科学院力学研究所, 北京 100190; 2. 中国科学院大学未来技术学院, 北京 100049; 3. 中国科学院大学工程科学学院, 北京 100049)

摘要：X 型支撑结构已广泛应用于大型海洋工程主要支撑结构设计中，如设计使用不当，将有可能发生由支撑杆的屈曲失稳而引发的结构坍塌变形。在极限荷载下，X 撑杆的屈曲失稳本质上属于典型的多跨压杆稳定问题，其极限承载力与撑杆的结构组成、几何参数以及端部约束密切相关。本文主要研究有（无）面外支撑的非对称交叉支撑体系在任意弹性支撑下 X 撑结构屈曲特性，侧重于考察端部约束、受力形式、面外支撑刚度等因素的影响。首先基于线弹性理论框架，建立了双跨受压杆件平衡方程，利用牛顿迭代算法进行屈曲载荷计算。此外，基于欧拉临界应力假设，推导了两端固支的双跨受拉（压）杆件在跨中任意位置处的转角刚度计算公式，从而得到跨中连续的非对称交叉支撑杆的有效长度因子数值解，并对端点支撑刚度和跨中支撑刚度进行了敏感性分析。结合工程实践，给出了杆件屈曲长度系数和刚度约束条件关键设计参数。

关键词：任意弹性支撑；屈曲分析；牛顿迭代法；屈曲长度系数；X 撑结构；刚度约束

中图分类号：TU312

文献标识码：A

doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2022.05.S032

BUCKLING ANALYSIS OF LARGE OUT-OF-PLANE X - BRACE STRUCTURE WITH ARBITRARY ELASTIC SUPPORT

CUI Zhe-hua^{1,2,3}, KANG Yuan-shun^{1,3}, ZHANG Wei-wei^{1,2,3}, ZENG Xiao-hui^{1,3}

(1. Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China;

2. School of Future Technology, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China;

3. School of Engineering Science, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

Abstract: The X-braced structure has been widely used in the design of major support structures in large-scale ocean engineering, the collapse deformation of the structure may be caused by the buckling instability of the support rod if it is not designed properly. Under the ultimate load, the buckling instability of x-braced structure is a typical multi-span stability problem of columns in essence, and its ultimate bearing capacity is closely related to the structural composition, geometric parameters and end restraint of the strut. This paper mainly studies the buckling characteristics of X-braced structures with or without out-of-plane support under arbitrary elastic supports, focusing on the influence of end constraints, force forms and out-of-plane bracing stiffness. Firstly, based on the linear elastic theory framework, the equilibrium equation of double span compression bar was established, and the buckling load was calculated by newton iterative algorithm. In addition, based on the Euler critical stress assumptions, the formula for calculating the angular stiffness of the double-span tension (compression) rod with fixed ends at any position in the span is derived, so as to obtain the numerical solution of effective length factor for continuous asymmetric cross struts in mid-span, and the sensitivity analysis of the end support stiffness and mid-span support stiffness is also carried out. Combined with engineering practice, the key design parameters, such as

收稿日期：2022-05-26；修改日期：2023-01-11

基金项目：国家自然科学基金项目(11672306)

通讯作者：曾晓辉（1972—），男，湖南人，研究员，博导，主要从事结构动力响应、稳定性和流固耦合领域(E-mail: zzh@imech.ac.cn).

作者简介：崔哲华（1998—），男，山西人，博士生，主要从事工程力学研究(E-mail: 648140597@qq.com).

康元顺（1997—），男，贵州人，博士生，主要从事工程力学研究(E-mail: kangyuanshun@imech.ac.cn).

张伟为（1996—），男，江苏人，博士生，主要从事工程力学研究(E-mail: zhangweiwei@imech.ac.cn).

buckling length coefficient and stiffness, are given.

Key words: elastic support; buckling analysis; newton iteration method; buckling length coefficient; x-braced structure; stiffness constraint

近年来, 伴随着我国海洋科技逐渐向深水域发展, 超大型海洋平台的研究与建设越来越受到相关产业机构和科研单位的重视, 采取有效的措施来保证超大型海洋平台在复杂深海环境下安全稳定运行、提升海洋油气资源的开发效率具有重大意义。其中, 设计带有面外支撑的大型 X 型支撑结构是近年来深水海洋平台导管架结构改进优化的一项关键技术, X 型支撑结构因其具有良好的承载能力、抗侧性能、造价低廉且易于安装等优点, 已广泛应用于现代海洋工程主要支撑结构设计中^[1]。然而深水区常伴有飓风、海啸等极端外部荷载环境, 如果设计、施工或应用不当, 极有可能发生由支撑杆的屈曲失稳而引发的结构坍塌变形。同时从实际出发, 避免因过度保守设计增加建造成本。因而需要进一步探究 X 型支撑结构在极限荷载环境下屈曲失稳机理, 提高结构的承载力。

已有的研究中, X 撑的屈曲分析是基于线弹性屈曲理论并辅以数值计算进行的, 即根据杆的受力分析建立其挠曲微分方程、其次代入杆的边界条件, 通过求解特征值矩阵获得杆的屈曲长度系数^[2]。针对海上导管架平台, 国外学者 Knapp 和 Dixon^[3]给出任意跨中连接的 X 撑结构分别在两端简支和两端固定下的屈曲长度系数解, 发现受压杆两端均为简支时屈曲长度系数临界值趋近于 1.0, 而受压杆两端均为固支时屈曲长度系数临界值趋近于 0.5, 即在固定端条件下更容易发生屈曲失稳, 这表明当交叉构件提供的横向支撑得到适当利用时, 可以有效提高结构的稳定性。但是其结果仅适用于双杆截面属性和杆长相等的假设条件^[3]。Stoman^[4-5]则考虑了更一般的情况, 考虑了交叉杆的相对刚度以及受拉杆端约束条件, 基于能量法, 得到了任意荷载比下受压撑杆临界载荷的封闭关系以及有效长度因子的解析表达式。根据计算公式, 在任意约束条件下 X 撑杆的有效长度因子介于 0.35~1.0 之间。Thevendran^[6]针对非对称连接的 X 撑结构, 基于能量法给出其受压构件临界屈曲载荷和有效长度系数, 并得到了典型工况下 X 撑杆有效长度因子的曲线图。Davaran^[7]侧重考虑了中心连接对 X 撑结构平面外屈曲载荷的影响, 给出了端部铰接、跨中铰接或半刚性(不连续)连接的 X 支撑有效长度因子的计算公式。Moon^[8]研究了具有非连续连接 X 型支撑在具有不同的

截面特性、长度和轴向载荷时的屈曲特性, 给出了其有效长度因子的近似解。朱永庆等^[9]针对国内外关于输电塔架中交叉斜材的计算长度因子进行了分析和验证, 提出了斜材的布置、拉杆内力、受压和两杆交点变化对压杆稳定的影响, 并给出相应的计算公式。陈勇等^[10-11]针对一般非对称交叉支撑杆系的弹性屈曲临界荷载进行了数值分析, 建立了有效长度因子的闭式经验方程, 与理论计算结果相吻合。目前针对具有面外支撑杆的 X 撑结构系统进行屈曲分析的研究较为少见, 本组之前研究中只考虑了撑杆端部均为固定时的情形^[12]。然而实际工程结构中撑杆端部支撑情况较为复杂, 当端部无法提供适当的转动约束时, 在极限荷载下使得撑杆屈曲方式发生改变, 导致结构失效。因而在工程设计中, 需考虑更为一般地情形(任意弹性支撑)。

目前工程实践中, 对于海上导管架 X 撑结构设计, 主要参考国外规范 API^[13]、ISO^[14]以及 ASCE^[15]。而国内规范在这方面还有待发展。在已有的规范大多参照文献所给值, 其分析方法是基于两端固支(铰支)的双跨受压杆件进行分析, 在交点处仅考虑了平动刚度弹簧的约束, 这种假设对于没有面外支撑的 X 撑结构是合理的。当在交点处存在面外支撑时, 面外支撑杆的转动约束不能被忽略。此外, 实际情况中端部约束一般不会是理想支座(固支、铰支), 而应看作有限的平动刚度约束和有限的转动刚度约束组合。

因此, 本文侧重考察跨中带有任意线弹性的双跨受压杆件稳定性问题, 探究屈曲长度系数与撑杆端部弹性约束、面外支撑的弹性约束、交点连接位置以及双杆的载荷条件之间的关系。基于线弹性屈曲理论给出带有任意弹性约束下具有面外支撑杆 X 撑结构屈曲长度系数的数值解, 将其退化解与已有文献结果中关于无面外支撑下屈曲长度系数的解析结果做对比, 吻合度较好, 其计算结果可为工程设计提供理论支撑。

1 任意端部弹性支撑下有面外支撑 X 撑结构数学模型

1.1 模型描述

图 1 为某陆丰一大型海上导管架平台模型图, 模

型主体主要由大跨度有面外支撑 X 撑空间桁架结构单元组成。在外界风、浪、流及自重作用下，两撑杆主要受到恒定轴力作用，即双杆受压或一杆受拉、一杆受压。模型四个端点通常连接在具有一定刚度约束的立柱上。不考虑交叉点处复杂的连接方式以及端点处任何偏心构造，其横向支撑刚度和转动弹性支撑刚度主要由支撑对角线和面外支撑杆提供^[16]。

假设杆件满足线弹性，小变形条件，基于图 2 所建立的坐标系，大型有面外支撑的 X 撑结构可建模为双对称模型。长度为 L_2 的面外支撑杆 DD' 垂直于两个对称的 X 支撑平面，即长度为 L 的面内撑杆 $AB = A'B'$ ，长度为 L 的面内撑杆 $CE = C'E'$ 。D 点作为撑杆交叉点，将两撑杆分为四部分，即 AD 段长为 L_1' 、 BD 段长 L_2' 、 CD 段长为 L_1 、 DE 段长为 L_2 。考虑到面内撑杆的几何不对称性， $L_1 + L_2 \neq L_1' + L_2'$ ，并且交点不一定在中点， $L_1 \neq L_2 \neq L_1' \neq L_2'$ 。假设 AB 杆两端受压力荷载 F ，而 CE 杆两端受拉力荷载 P ，而 $A'B'$ 杆与 $C'E'$ 杆未受外力作用。受力的不对称由两支撑对角线的端部荷载特性决定，即 $|F| \neq |P|$ 。此外，设 AB 杆的弹性模量为 E_1 ，截面惯性矩为 I_1 ， CE 杆的弹性模量为 E ，截面惯性矩为 I 。面外支撑杆 DD' 的弹性模量为 E_2 ，截面惯性矩为 I_2 。支撑对角线的弯曲刚度不一致以考虑材料的不对称，

即 $E_1 I_1 \neq EI$ 。

如图 2 所示，在有面外支撑的 X 支撑系统中，通过 Libove 等^[17]提出的屈曲平面判定准则， AB 杆受压屈曲模式主要分为面内屈曲 ($yo z$ 平面) 和面外屈曲 (xoy 平面) 两种工况。假设 AB 杆两端受压， CE 杆两端受拉。针对受压杆 AB 进行受力分析，可考虑端部带有任意线弹性支撑的在交点处有横向支撑与转动支撑的计算模型。在交点处的支撑刚度由拉伸杆件和面外支撑杆件提供。

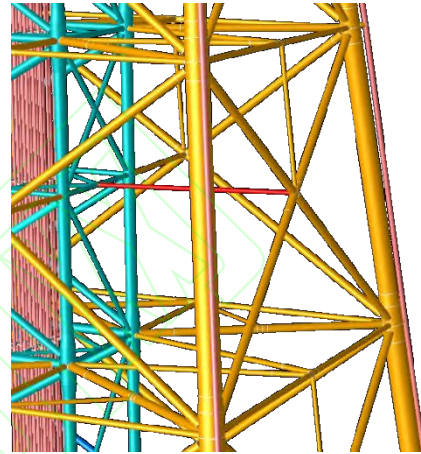


图 1 陆丰-海上大型导管架

Fig. 1 Large offshore jacket of Lufeng

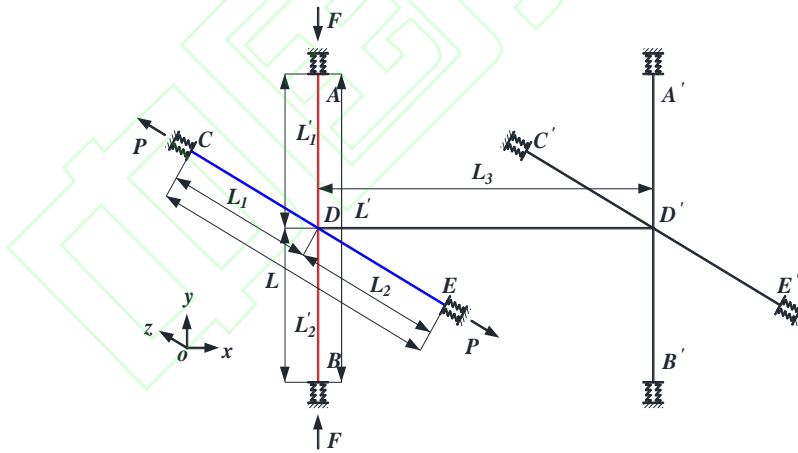


图 2 端点不同支撑情况的几何模型

Fig. 2 A geometric model of the different supports at the end points

1.2 公式推导

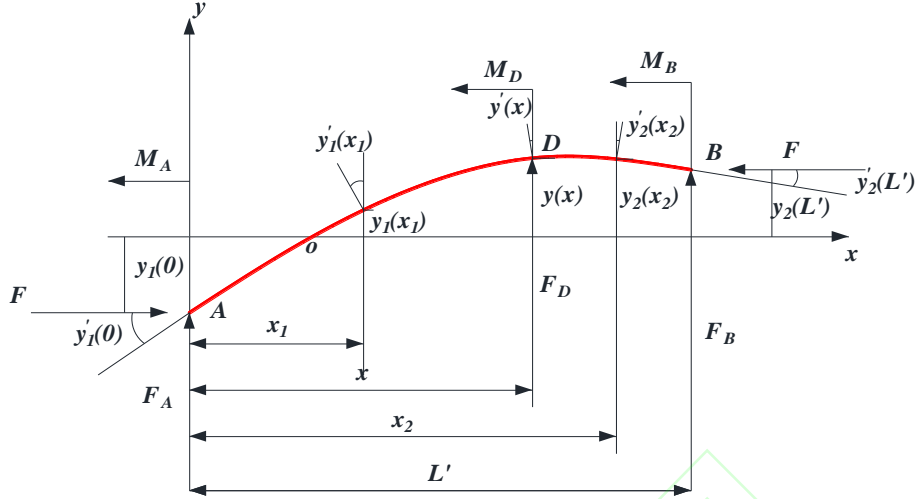


图3 连续压缩杆件的分析模型

Fig. 3 Analysis model of continuous compression bar

以 AB 杆为研究对象进行受力分析。如图3所示，设 AB 杆两端受轴向压力 F ，在 A 、 B 、 D 处由于刚性连接，分别受弯矩 M_A 、 M_B 、 M_D 。设 AD 段任意一点的挠度为 $y_1(x_1)$ 、转角为 $y_1'(x_1)$ ， BD 段任意一点的挠度为 $y_2(x_2)$ 、转角为 $y_2'(x_2)$ 。

建立平衡微分方程，在 AD 段，即 $0 \leq x_1 \leq x$ 时，控制微分方程为：

$$E_1 I_1 y_1''(x_1) = F_A x_1 - M_A - F(y_1(x_1) - y_1(0)) \quad (1)$$

引入 λ' ，令

$$\lambda'^2 = \frac{FL^2}{E_1 I_1} \quad (2)$$

容易求得 $y_1(x_1)$ 的通解，即 AD 段的挠曲线方程为（ a 、 b 为待定常数）：

$$y_1(x_1) = a \cos\left(\frac{\lambda'}{L'} x_1\right) + b \sin\left(\frac{\lambda'}{L'} x_1\right) + \frac{F_A}{F} x_1 - \frac{M_A}{F} + y_1(0) \quad (3)$$

上式对 x_1 取一阶导数，可得 AD 段的转角方程：

$$y_1'(x_1) = -a \frac{\lambda'}{L'} \sin\left(\frac{\lambda'}{L'} x_1\right) + b \frac{\lambda'}{L'} \cos\left(\frac{\lambda'}{L'} x_1\right) + \frac{F_A}{F} \quad (4)$$

同理，在 BD 段，即 $x \leq x_2 \leq L'$ 时，控制微分方程为（ c 、 d 为待定常数）：

$$y_2(x_2) = c \cos\left(\frac{\lambda'}{L'} x_2\right) + d \sin\left(\frac{\lambda'}{L'} x_2\right) + \frac{F_B}{F}(L' - x_2) + \frac{M_B}{F} + y_2(L') \quad (5)$$

同样对 x_2 取一阶导数，可得 BD 段的转角方程：

$$y_2'(x_2) = -c \frac{\lambda'}{L'} \sin\left(\frac{\lambda'}{L'} x_2\right) - \frac{F_B}{F} + d \frac{\lambda'}{L'} \cos\left(\frac{\lambda'}{L'} x_2\right) \quad (6)$$

在式（3）、式（4）中令 $x_1 = 0$ ，得到压杆 A 处的变形满足：

$$a - \frac{M_A}{F} = 0 \quad (7)$$

$$b \frac{\lambda'}{L'} + \frac{F_A}{F} - y_1'(0) = 0 \quad (8)$$

在式（5）、（6）中令 $x_2 = L'$ ，得到压杆 B 处的变形满足：

$$c \cos(\lambda') + d \sin(\lambda') + \frac{M_B}{F} = 0 \quad (9)$$

$$-c \frac{\lambda'}{L'} \sin(\lambda') + d \frac{\lambda'}{L'} \cos(\lambda') - \frac{F_B}{F} - y_2'(L') = 0 \quad (10)$$

压杆在 D 处变形连续，满足变形连续性条件，即：

$$y_1(x) = y(x) = y_2(x) \quad (11)$$

$$y_1'(x) = y'(x) = y_2'(x) \quad (12)$$

在式（3）和式（4）中令 $x_1 = x$ ，得：

$$y_1(x) = a \cos\left(\frac{\lambda'}{L'}x\right) + b \sin\left(\frac{\lambda'}{L'}x\right) + \frac{F_A}{F}x - \frac{M_A}{F} + y_1(0) \quad (13)$$

$$F_i = K_i y(i) \quad (19)$$

$$M_i = C_i y(i) \quad (20)$$

$$y_1'(x) = -a \frac{\lambda'}{L'} \sin\left(\frac{\lambda'}{L'}x\right) + b \frac{\lambda'}{L'} \cos\left(\frac{\lambda'}{L'}x\right) + \frac{F_A}{F}$$

当 i 分别取 0 、 x 、 L' 时，带入上式可得：

$$F_A + K_A y_1(0) = 0 \quad (21)$$

在式 (5) 和式 (6) 中令 $x_2=x$ ，得：

$$M_A + C_A y_1'(0) = 0 \quad (22)$$

$$y_2(x) = c \cos\left(\frac{\lambda'}{L'}x\right) + d \sin\left(\frac{\lambda'}{L'}x\right) + \frac{F_B}{F}(L'-x) + \frac{M_B}{F} + y_2(L')$$

$$F_D + K_D y(x) = 0 \quad (23)$$

$$y_2'(x) = -c \frac{\lambda'}{L'} \sin\left(\frac{\lambda'}{L'}x\right) - \frac{F_B}{F} + d \frac{\lambda'}{L'} \cos\left(\frac{\lambda'}{L'}x\right)$$

$$M_D + C_D y_1'(x) = 0 \quad (24)$$

$$F_B + K_B y_2(L') = 0 \quad (25)$$

$$M_D + C_D y_1'(x) = 0 \quad (26)$$

由静力平衡条件可知：

$$\sum F_y = 0 \quad (17)$$

$$\sum M_o = 0 \quad (18)$$

在上式中，支撑刚度系数 K_A 、 C_A 、 K_D 、 C_D 、 K_B 和 C_B 由端点连接杆件和面外支撑杆件提供。联立上述方程，经整理化简可以得到一个关于 16 个参量的齐次线性方程组，即 a 、 b 、 c 、 d 、 F_A/F 、 F_B/F 、 F_D/F 、 M_A/F 、 M_B/F 、 M_D/F 、 $y_1(0)$ 、 $y_1'(0)$ 、 $y(x)$ 、 $y'(x)$ 、 $y_2(L')$ 、 $y_2'(L')$ ，有非零解的充要条件是方程组的系数行列式为零，即：

根据线弹性屈曲理论，杆端和连接处的变形符合胡克定律，即：

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos kx & \sin kx & 0 & 0 & x & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -k \sin kx & k \cos kx & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos kx & \sin kx & 0 & 0 & 0 & 0 & L'-x & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -k \sin kx & k \cos kx & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos kl & \sin kl & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k \sin kl & k \cos kl & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -x & 1 & 0 & 1 & L'-x & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{K_A}{k^2 E_1 I_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_A}{k^2 E_1 I_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{K_D}{k^2 E_1 I_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_D}{k^2 E_1 I_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{K_B}{k^2 E_1 I_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_B}{k^2 E_1 I_1} \end{vmatrix} = 0 \quad (27)$$

在式 (27) 中，中间支撑的刚度系数 K_D 和 C_D 由拉伸杆件 CE 杆或面外支撑杆件提供，而 K_A 、 C_A 、 K_B

和 C_B 由端点约束决定, $K=\infty, C=0$ 代表铰支端约束, $K=\infty, C=\infty$ 代表固定端约束。对端点弹性约束的数值分析, 将在本章第三节进行详细讨论。

1.3 面外支撑刚度计算

1.3.1 线刚度 K_D

1) 当 AB 杆发生面内 (yoz 平面) 屈曲时, 线刚度 K_D 由 CE 杆提供:

$$K_D = EA / L \quad (28)$$

2) 当 AB 杆发生面外 (xoy 平面) 屈曲时, 由 Chen 的工作, 可知受拉支撑对角线 CE 提供的线刚度为^[11]:

$$K_{CE} = \frac{P\lambda \sinh(\lambda)}{L[(1-\alpha)\alpha\lambda \sinh(\lambda) - \sinh(\lambda - \lambda\alpha)\sinh(\lambda\alpha)]} \quad (29)$$

式中:

$$\lambda^2 = Pl^2 / (EI) \quad (30)$$

$$\alpha = L_1 / L \quad (31)$$

特别地, 当 $P=0$ 时 CE 杆的线刚度为:

$$K_{CE} = \frac{3EI}{\alpha^2(1-\alpha)^2 L^3} \quad (32)$$

此时, 线刚度 K_D 由面外支撑杆 (DD') 与无外力的 X 支撑 ($A'B'C'E'$) 共同提供:

$$K_{A'B'C'D'} = \frac{3EI_1}{L'^3(1-\alpha')^2} + \frac{3EI}{L^3(1-\alpha)^2} \quad (33)$$

$$K_{D'D'} = \frac{E_2 A_2}{L_2} \quad (34)$$

$$K_D = K_{CE} + \frac{K_{A'B'C'D'} K_{D'D'}}{K_{A'B'C'D'} + K_{D'D'}} \quad (35)$$

此外, 定义无量纲平动刚度因子 m :

$$m = K / K_e \quad (36)$$

其中, K_e 代表单位线弹簧刚度:

$$K_e = 3EI / L^3 \quad (37)$$

1.3.2 角刚度 C_D

1) 当 AB 杆发生面内 (yoz 平面) 屈曲时, 受拉

杆件 CE 可通过对图 2 建立平衡微分方程, 通过推导得到 CE 杆提供的转动约束为:

$$C_D = \frac{PL_1 \sinh(\lambda)}{\lambda \cosh(\alpha\lambda) \cosh(\alpha\lambda - \lambda) - \sinh(\lambda)} \quad (38)$$

上式中, 当 $P=0$ 时应转换成:

$$C_D = \frac{4EIL}{L_1(L-L_1)} \quad (39)$$

2) 当 AB 杆发生面外 (xoy 平面) 屈曲时:

$$C_D = \frac{3EI}{L_1(3+(1-\alpha)^3 + \alpha^3)} \quad (40)$$

此外, 定义无量纲转动刚度因子 n :

$$n = C / C_e \quad (41)$$

其中, C_e 代表单位转动弹簧刚度:

$$C_e = 4EI / L \quad (42)$$

综上, 特征值矩阵中跨中的弹性刚度 K_D 和 C_D 由 2.3 小节中的方法进行计算。由此, 可对无量纲刚度系数, 长度比例系数和拉压比等进行参数化研究。

2 程序验证

为便于结果讨论, 定义无量纲线刚度系数 β :

$$\beta = K_D L' / F_0 \quad (43)$$

其中:

$$F_0 = \pi^2 E_1 I_1 / L'^2 \quad (44)$$

另外, 定义无量纲角刚度系数为 η :

$$\eta = C_D / (F_0 L') \quad (45)$$

将屈曲荷载无量纲化为 F_{cr} / F_0 。而杆件长度比例系数为:

$$\alpha' = L'_1 / L' = x' / L' \quad (46)$$

$$\alpha = L_1 / L = x / L \quad (47)$$

须定义无量纲拉压比 (CE 杆受力与 AB 杆受力之比):

$$\delta / \xi = \tilde{P} / \tilde{F} \quad (48)$$

其中: $\delta = \tilde{P}$, $\xi = \tilde{F}$ 。

此处, \tilde{P} 为 CE 杆的无量纲受力大小:

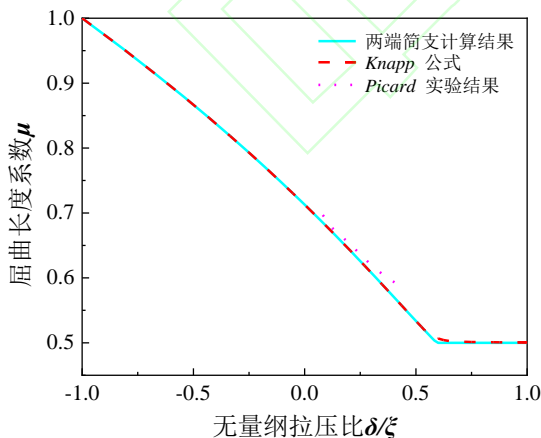
$$\tilde{P} = P / F_0 \quad (49)$$

而 \tilde{F} 为 AB 杆的无量纲受力大小:

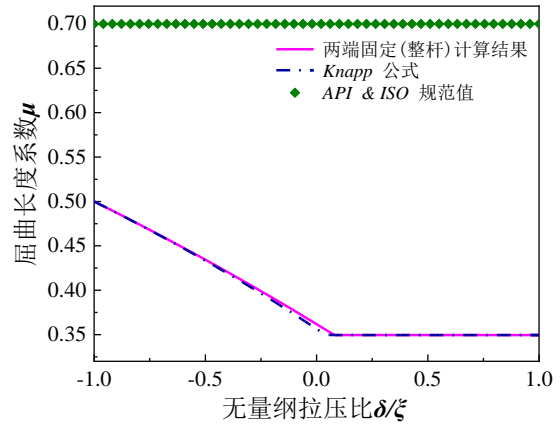
$$\tilde{F} = F / F_0 \quad (50)$$

对于受压杆 AB ，假设 $L'_1/L'_2 \geq 1$ ，即只讨论 $\alpha'=0.5$ 的情况。同时认为 $\alpha'=a$ 、 $L'=L$ 、 $E_1I_1 \neq EI$ 。此外，在分析同一工况时，认为受压（拉）杆 AB （ CE ）的两端约束情况一致。

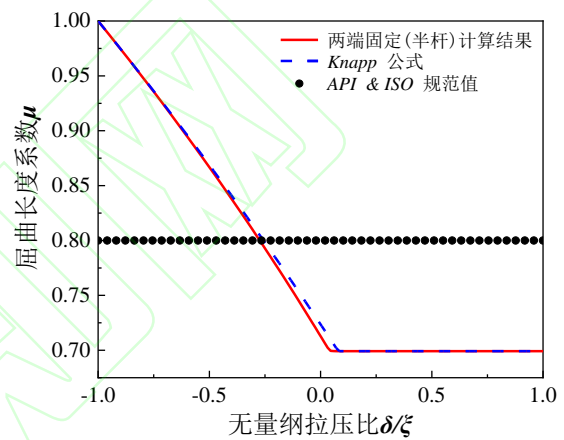
为验证上述理论方法的有效性，令交点刚度为 0，即不考虑面外支撑杆的作用，可将其视为无面外支撑的 X 撑杆结构。将计算结果和现有文献结果 Picard^[18] 所做的实验（受压杆件与受拉杆件的端点均为铰支，交点处连续固接）和 Knapp^[3] 提出的导管架 X 撑结构屈曲长度系数计算公式（两端均固定和两端均铰支）作了对比。通过调整受压杆件 AB 两端约束情况， $K_A=K_B=\infty$ 、 $C_A=C_B=0$ 代表铰支支座， $K_A=K_B=\infty$ 、 $C_A=C_B=\infty$ 代表固定支座。如图 4（a）所示，给出屈曲长度系数 μ 和拉压比 δ/ξ （规定受拉为正）的变化曲线，当两端简支时，理论计算结果与 Picard 实验结果以及 Knapp 的计算公式吻合良好，当撑杆两端简支时，压杆的屈曲长度系数随着拉压比的增加而降低，最终趋于 0.5。如图 4（b）和图 4（c）所示，当杆两端均为固定时，不论整杆还是半杆，其结果与 Knapp 的计算公式吻合良好，即当撑杆两端固定时，压杆的屈曲长度系数随着拉压比的增加而降低，最终趋于 0.35。此外，在现行规范中给定^[13-14]，对于整杆长，当两端固定且受压时，屈曲长度系数规范值为 0.70；而对于半杆长，当两端固定且一端受压、一端受拉时，屈曲长度系数规范值为 0.80，这相对于本文的理论分析值尚存在一定的安全裕度，侧面证明本文方法的合理性。此外，给出了其余两类工况（拉杆简支、压杆固定和压杆简支、拉杆固定）的理论计算值。



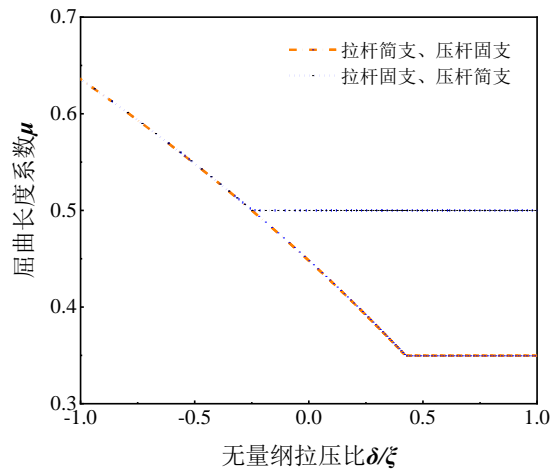
(a) 两端简支（整杆）计算结果对比



(b) 两端固定（整杆）计算结果对比



(c) 两端固定（半杆）计算结果对比



(d) 一端固定、一端简支计算结果

图 4 与文献或规范中无面外支撑时研究结果对比

Fig. 4 Comparison of the results with the data in the literature or the specification without out-of-plane X-Brace

3 结果分析

3.1 工况设计

表 1 工况设计表

Table 1 Design table of working conditions

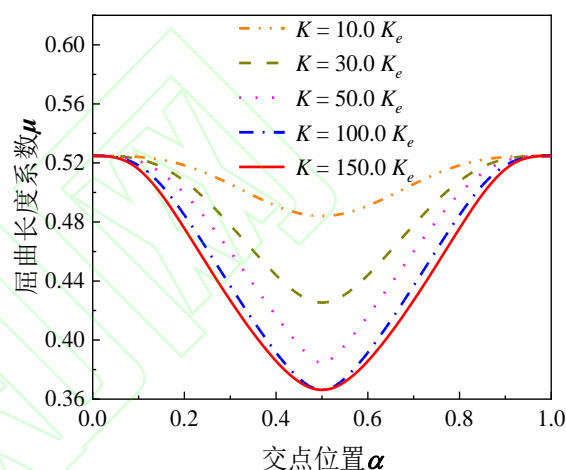
序号	面外支撑	工况	不变量	自变量
1	有	端点约束一定时交点弹性约束敏感性分析	拉压比、端点线(角)刚度	交点线(角)刚度 交点位置
2	有	端点约束任意时交点及端点弹性约束敏感性分析	拉压比、端点线刚度	交点线(角)刚度、端点角刚度、 交点位置
3	无	端点弹性约束敏感性分析	交点(端点)线刚度	拉压比、交点角刚度、 端点角刚度、交点位置

3.2 端点约束一定时交点弹性约束敏感性分析

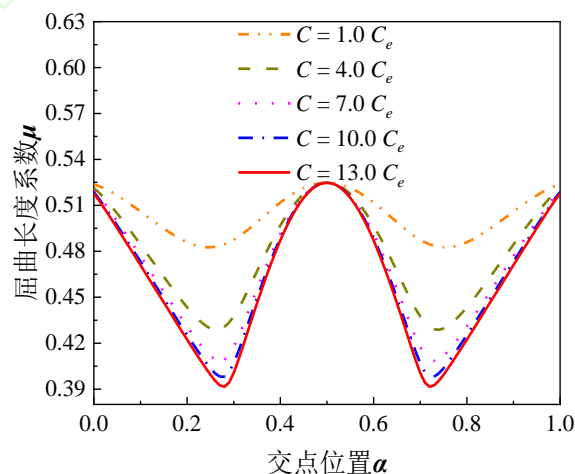
针对两端任意线弹性连接的分析模型，分别讨论了跨中弹性平动刚度和弹性转动刚度对结构屈曲长度系数的影响，从而对面外支撑杆的支撑作用进行有效评估。使用屈曲特征方程式(27)进行迭代求解，考察在两端为弹性约束时，跨中交点处弹性约束所在位置对屈曲长度系数的影响。同时也对端点处的弹性刚度进行了敏感性分析，探讨了端点处不同弹性刚度因子对 X 撑杆件屈曲长度系数的影响。

在实际工程中，X 撑系统的四个端点 A、B、C、E 一般焊接在刚度比较大的立柱上。因此假设四个端点的平动刚度为 $EA/L \gg K_e$ ，并假设端点处转动刚度为 $10 C_e$ 。图 5 分别给出 X 撑杆结构屈曲长度系数在不同弹性平动刚度和弹性转动刚度下的计算结果。为了计算方便，选取若干代表值，即平动刚度 $K=(10.0, 30.0, 50.0, 100.0, 150.0) K_e$ ，而转动刚度 $C=(1.0, 4.0, 7.0, 10.0, 13.0) C_e$ 。

此处考察了 X 撑交点处不同弹性刚度下，交点位置对屈曲长度系数的影响。图像具有很好的对称性，证明了本文理论模型的正确性。如图 5 (a) 所示，考察交点弹性平动刚度对屈曲长度系数的影响，忽略弹性转动刚度的作用。可以发现，在端点处 ($\alpha=0.0, \alpha=1.0$) 弹性平动刚度对于结构屈曲影响较小，而在跨中 ($\alpha=0.5$) 弹性平动刚度的影响最大。交点越靠近端点处，X 撑结构屈曲长度系数介于两端铰支和两端固支的极限屈曲长度系数之间，即 $0.5 < \mu < 1.0$ 。交点越靠近跨中，此时弹性平动刚度对屈曲长度系数的影响越大，并随着交点弹性平动刚度增大，屈曲长度系数逐渐减小，可以发现，当无量纲平动因子 ($m \geq 100.0$) 时，此时曲线基本不再下降，因而可近似认为此时的交点弹性平动约束已经对结构有了足够的支撑作用。



(a) 平动刚度对结构屈曲的影响



(b) 转动刚度对结构屈曲的影响

图 5 不同刚度条件下屈曲长度系数与弹性支点的位置的关系
Fig. 5 Relationship between buckling length coefficient and elastic fulcrum position under different stiffness conditions

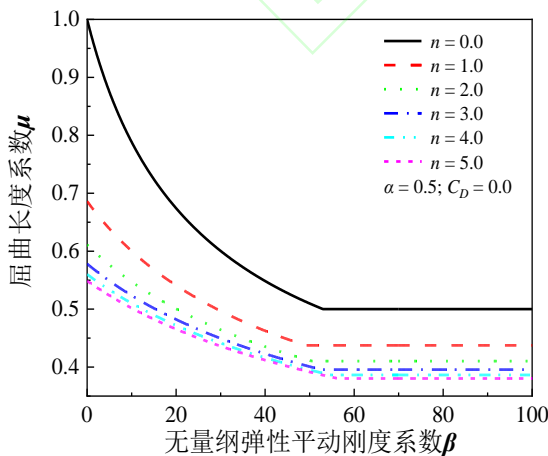
此外，可以发现，在弹性约束中，交点处提供的平动刚度对端点处 ($\alpha=0, \alpha=1.0$) 屈曲长度系数几乎没有影响，这是由于端点的平动刚度为 $EA/L \gg K_e$ 。若端点处平动刚度较小且非远大于交点所提供的平动

刚度，交点处提供的平动刚度将对屈曲长度系数产生影响，并随着 K_D/K_A 的比值增大，产生的影响也越大，如图 5 (b) 所示，考察交点弹性转动刚度对屈曲长度系数的影响，忽略弹性平动刚度的作用。可以发现，在端点处 ($\alpha=0.0, \alpha=1.0$) 和跨中处 ($\alpha=0.5$) 弹性转动刚度对于结构屈曲影响较小，而在跨中两侧 ($\alpha\approx 0.28, \alpha\approx 0.72$) 弹性转动刚度的影响最大，随着交点弹性转动刚度增大，屈曲长度系数逐渐减小，可以发现，当无量纲转动因子 ($n\geq 10.0$) 时，此时曲线基本不再下降，因而可近似认为此时的交点弹性转动约束已经对结构有了足够的支撑作用。

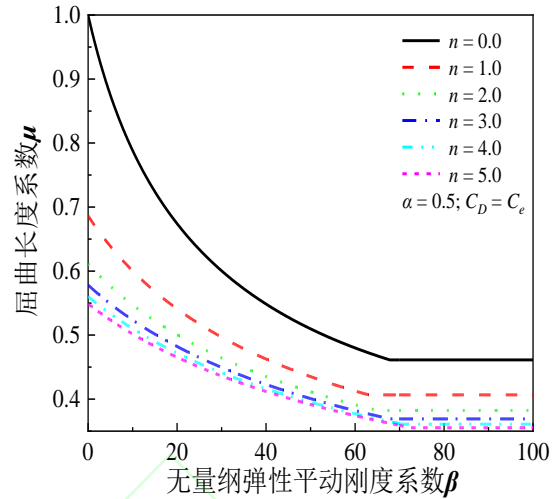
端点处平动刚度无穷大时，从数学上可以解释为端点处的挠度 $w(0)=w(L)=0$ 。但是，端点处的转动刚度和交点处的转动刚度对跨中 ($\alpha=0.5$) 的屈曲长度系数几乎没有影响。这是由于撑杆结构发生了半波形屈曲，此时对应 $w'(0)=0$ ，故支点处的转动刚度对跨中的屈曲长度系数没有影响。交点在跨中的屈曲长度系数只取决于端点处的平动刚度和 X 撑杆交点处的平动刚度。这对于结构设计有十分重要的意义。

3.3 端点约束任意时交点及端点弹性约束敏感性分析

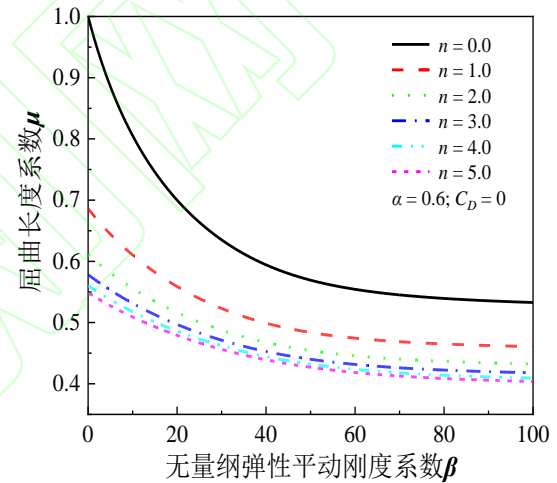
结合工程实际进行了理论计算，在实际工程结构中，X 撑的四个端点通常被固定在刚度较大的立柱或梁上。此时端点处 (A 点、B 点、C 点、E 点) 平动刚度可设置为 $EA/L \gg K_e$ ，而端点处的转动刚度因子 n 通常大于 5，即 $C_A > 5C_e$ ，基于此，分别考察了端点处线弹性转动刚度因子为 $n=1.0, n=2.0, n=3.0, n=4.0, n=5.0$ 五种工况。同时，当发生面外 (yoz 平面) 屈曲时，此时面外撑杆提供的转动刚度一般为定值，不失一般性，这里分别讨论了 X 撑交点提供的转动刚度



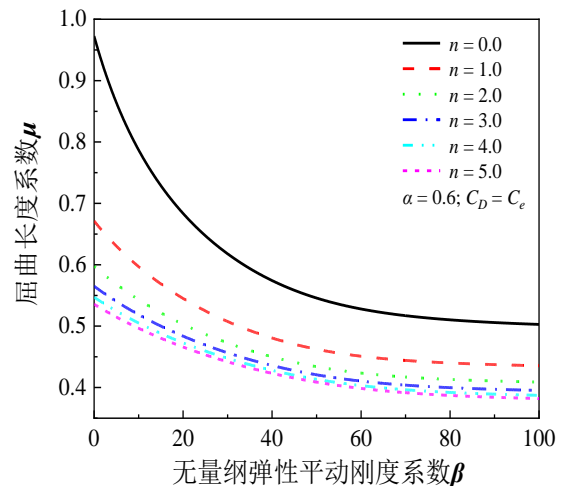
(a) 交点无转动约束，长度因子 $\alpha=0.5$



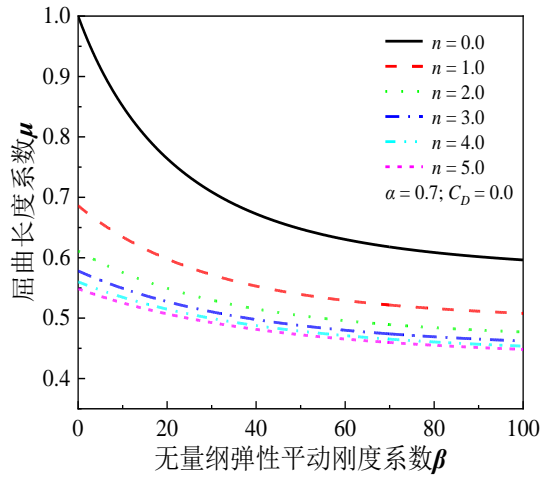
(b) 交点转动约束为 C_e ，长度因子 $\alpha=0.5$



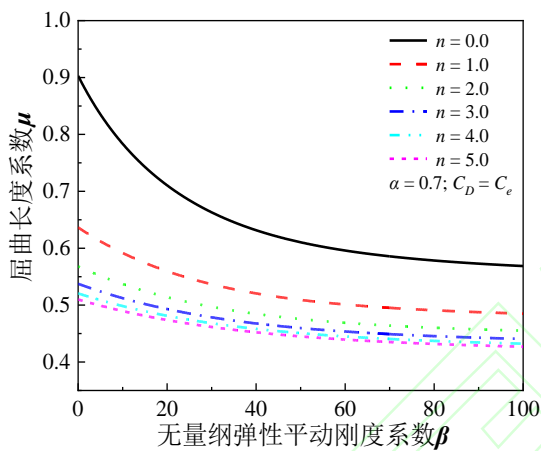
(c) 交点无转动约束，长度因子 $\alpha=0.6$



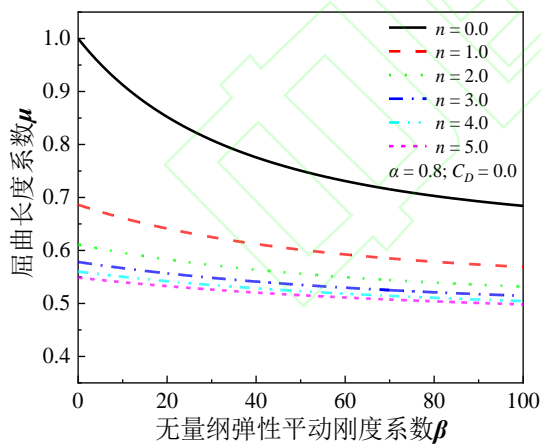
(d) 交点转动约束为 C_e ，长度因子 $\alpha=0.6$



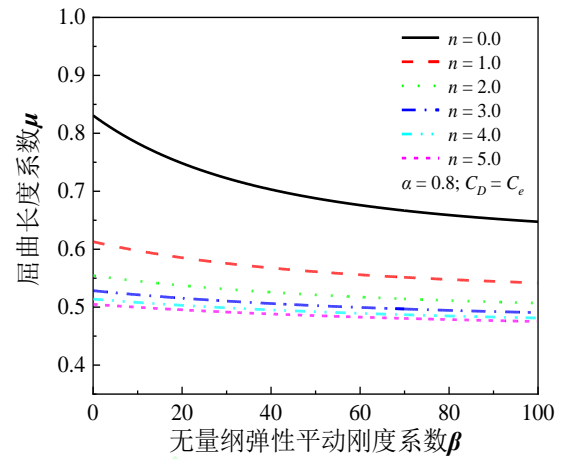
(e) 交点无转动约束, 长度因子 $\alpha=0.7$



(f) 交点转动约束为 C_e , 长度因子 $\alpha=0.7$



(g) 交点无转动约束, 长度因子 $\alpha=0.8$



(h) 交点转动约束为 C_e , 长度因子 $\alpha=0.8$

图 6 不同转动刚度下屈曲长度系数与平动刚度的关系
Fig. 6 The relationship between buckling length coefficient and translational stiffness under different rotational stiffness

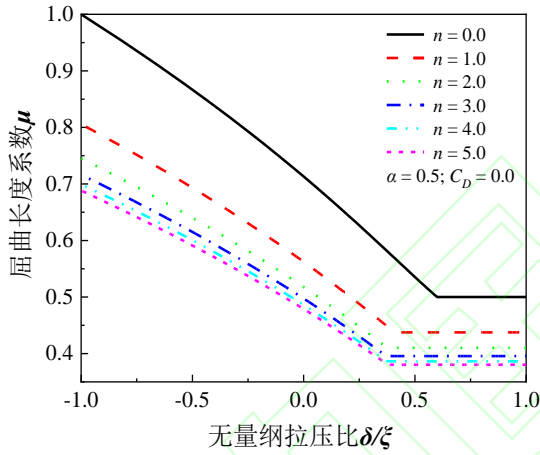
为 $C_D=0$ 和 $C_D=C_e$ 两种工况。各个工况下交点处提供的无量纲的线弹性平动刚度与屈曲长度系数的计算结果如图 6 所示。总体来看, 在任意端部弹性约束下, 整体结构的屈曲长度系数随着交点的弹性平动刚度的增加呈现先快后慢的下降趋势, 最终趋于收敛。此外, 当 $\alpha=0.5$ 时, 交点提供的转动约束对屈曲长度系数几乎没有影响, 当 α 值远离 0.5 时, 其对屈曲长度系数的影响逐渐增大, 在 $\alpha=0.8$ 时影响超过 25%。由图 6 (a)~图 6 (h) 可得, $C_A \geq 5C_e$ 时, 结构屈曲长度系数已趋于收敛, 而实际工程中端点处的转动约束往往会更大。因此, 此时端点约束可以当做固支进行分析。同时, 对于交点处面外支撑提供的平动刚度 K_D , 只需 $K_D > 100.0K_e$ 可起到很好的约束作用。而这意味着面外支撑杆的横截面积只需满足 $A_c/A > 0.08$ (A_c 为面外支撑杆 DD' 杆的横截面积, A 为受压杆 AB 杆的横截面积), 就可以起到良好的支撑效果。而这个条件是很容易达到的。此时进行屈曲分析时, 认为面外支撑杆为稳固支点, 此时只需对单跨进行稳定性设计即可。(取 AD 和 BD 中长度较长一跨)。

3.4 无面外支撑时端点弹性约束敏感性分析

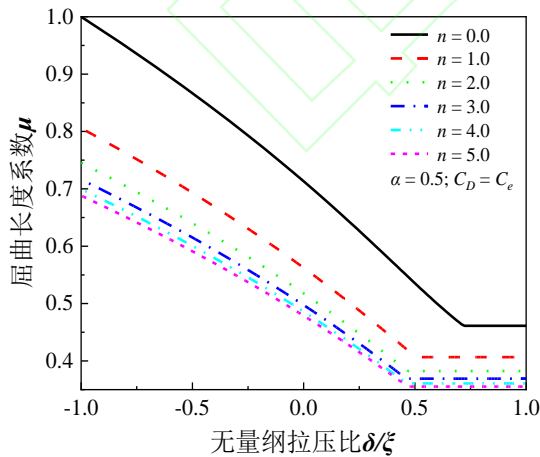
此外, 针对转动约束的刚度敏感性进行了考察。如前所述, 由于面外支撑提供的平动刚度大小只会是屈曲曲线在横坐标 (拉压比) 上发生平移, 对结构的屈曲长度系数临界值并不产生影响。不失一般性, 选取无面外支撑的 X 撑来考察转动约束对结构屈曲的

影响，即认为面外撑杆提供的平动刚度为 0 ($m=0$)。

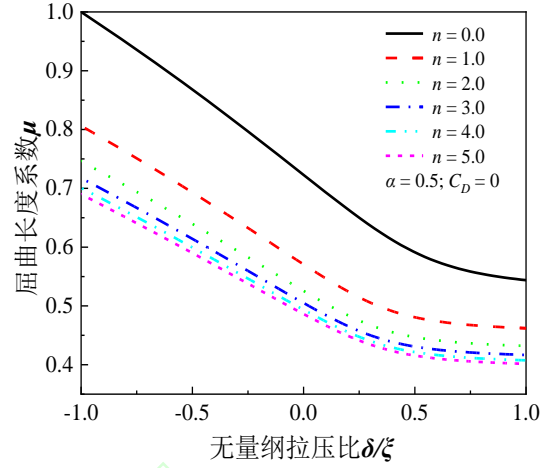
(A 点、B 点、C 点、E 点) 点处的动刚度可设置为 $EA/L \gg K_e$ 。分别考察了端点处线弹性转动刚度因子为 $n=1.0$ 、 $n=2.0$ 、 $n=3.0$ 、 $n=4.0$ 、 $n=5.0$ 五种工况。同时，当发生面外 (yoz 平面) 屈曲时，此时面外撑杆提供的转动刚度一般为定值，这里分别讨论了 X 撑交点提供的转动刚度为 $C_D=0$ 和 $C_D=C_e$ 两种工况。各个工况下 X 撑拉压比与屈曲长度系数的计算结果如图 7 所示，总体来看，在任意端部弹性约束下，整体结构的屈曲长度系数随着无量纲拉压比的增加，呈现先快速下降后趋于收敛的变化趋势。而且，当 $\alpha=0.5$ 时，交点提供的转动约束对屈曲长度系数几乎没有影响，当 α 值远离 0.5 时，其对屈曲长度系数的影响逐渐增大。由图 7 (a) ~ 图 7 (h) 可得， $C_A \geq 5C_e$ 时，结构屈曲长度系数已趋于收敛，此时可近似认为，端点的转动约束已经对结构有了足够的支撑作用。



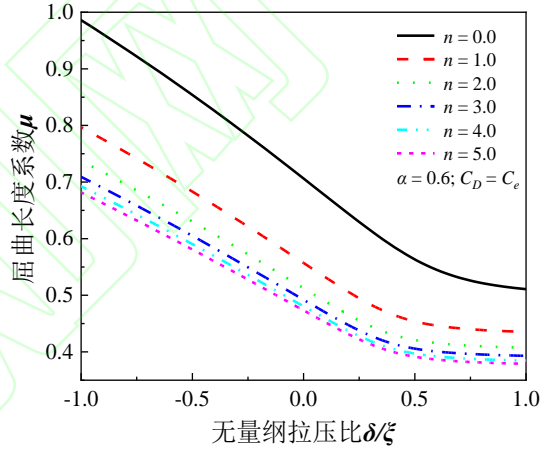
(a) 交点无转动约束，长度因子 $\alpha=0.5$



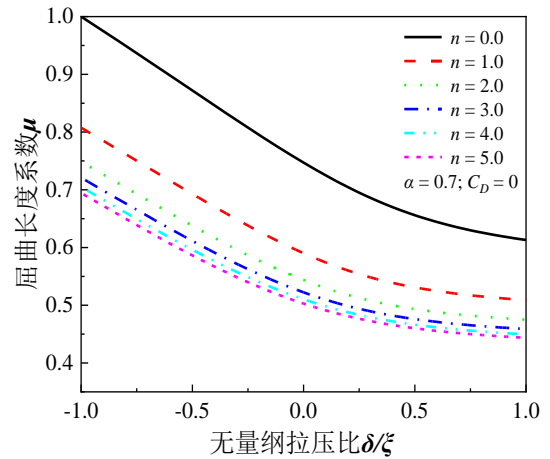
(b) 交点转动约束为 C_e ，长度因子 $\alpha=0.5$



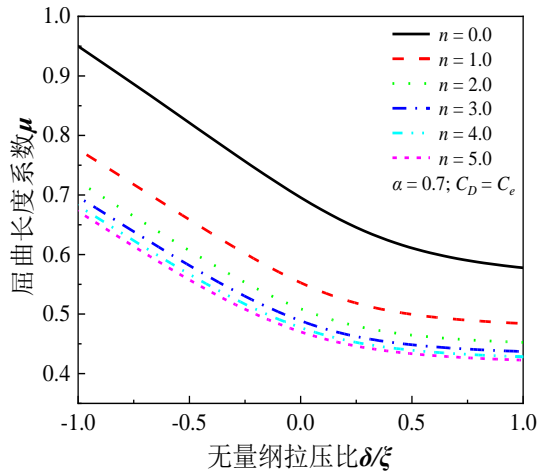
(c) 交点无转动约束，长度因子 $\alpha=0.6$



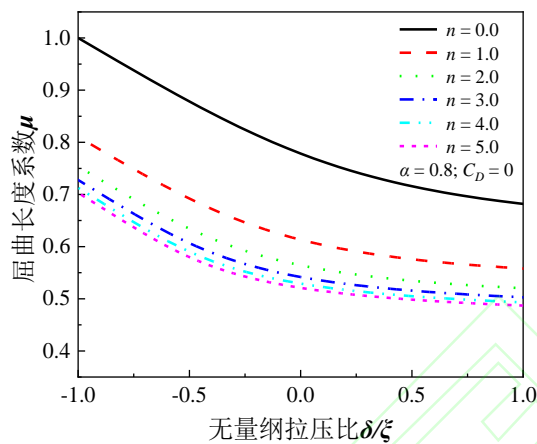
(d) 交点转动约束为 C_e ，长度因子 $\alpha=0.6$



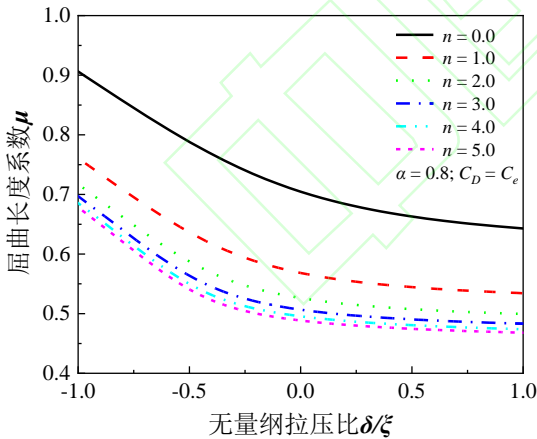
(e) 交点无转动约束，长度因子 $\alpha=0.7$



(f) 交点转动约束为 C_e , 长度因子 $\alpha=0.7$



(g) 交点无转动约束, 长度因子 $\alpha=0.8$



(h) 交点转动约束为 C_e , 长度因子 $\alpha=0.8$

图7 不同转动刚度下屈曲长度系数与拉压比的关系

Fig. 7 Relationship between buckling length coefficient and tension-compression ratio under different rotational stiffness

4 结论

本文推导了任意线弹性的双跨压杆稳定的屈曲特征

方程, 与现有研究中关于无面外支撑杆屈曲长度系数计算结果进行了对比, 验证了其有效性。在此基础上, 考察了极限状态下压杆的屈曲长度系数随支撑刚度、拉压比、长度因子等因素的变化关系, 并针对不同支撑刚度(平动刚度和转动刚度)进行了敏感性分析, 分析得到屈曲长度系数随这些因素的变化规律, 并结合工程实践, 给出了结构设计的理论推荐值, 其主要结论如下:

(1) 当面外支撑杆刚度为0时, 此时可近似将其看作无面外支撑结构。计算发现, 在端部固定或端部简支条件下, 其屈曲长度系数随拉压比的增加(拉压比小于0代表两端受压、拉压比大于0代表一端受压、另一端受拉), 呈现出先减小, 而后趋于某一稳定值。即表明一端受压、另一端受拉时杆件可承受相对较大的承载力、稳定性优于两端受压工况, 且在同等受力条件下, 不容易发生屈曲。这与现有的研究结果以及规范参考值相符, 进一步验证程序的正确性。

(2) 假定杆端为任意弹性支撑(平动刚度无限大, 转动刚度有限值), 当面外支撑杆只提供有限的平动刚度时, X 撑交点位置越靠近跨中, 其屈曲长度系数值越小, 反之交点越靠近两端, 杆的屈曲长度系数趋于稳定值, 其数值大小只取决于端部的弹性支撑(介于两端固定极限值0.5和两端简支极限值1.0)。当交点位置不变时, 增加撑杆的平动刚度使得屈曲长度系数减小, 当无量纲平动刚度系数趋于100时, 屈曲长度系数已经达到稳定, 为此时的平动刚度已经对结构有了足够的支撑作用。

(3) 假定杆端为任意弹性支撑(平动刚度无限大, 转动刚度有限值), 当面外支撑杆只提供有限的转动刚度时, X 撑交点位置越靠近跨中和两端, 其屈曲长度系数值趋于稳定值, 而其最小值发生在跨中两侧。这表明端点处的转动刚度和交点处的转动刚度对跨中($\alpha=0.5$)的屈曲长度系数几乎没有影响。当交点位置不变时, 增加撑杆的转动刚度使得屈曲长度系数减小, 当无量纲转动刚度系数趋于10时, 屈曲长度系数已经达到稳定, 为此时的转动刚度已经对结构有了足够的支撑作用。

(4) 当 X 撑交点提供有限的刚度(平动或转动)时, 在不同端点转动刚度下, 压杆的屈曲长度系数随着端点的平动刚度的增加, 呈现先加速下降, 后趋于稳定值的变化趋势。而当平动刚度一定时, 屈曲长度系数随着端点转动刚度的增加, 同样呈现先加速下降, 后趋于稳定值的变化趋势。

(5) 其余条件一定时, 增加 X 撑杆的转动刚度, 使得杆件屈曲长度系数减小, 这种效应在交叉点位置偏离跨中位置越远越明显。

(6) 其余条件一定时, X 撑杆的屈曲长度系数和拉压比的变化关系和其与平动刚度的变化规律类似。

(7) 特别地, 对于工程实际而言, 撑杆端部平动刚度一般为无穷大, 通过计算发现当交叉点的无量纲平动刚度系数达到 100 左右, 交叉点无量纲转动刚度系数达到 10 左右, 且端部无量纲转动刚度系数达到 5 左右时, 对于撑杆整体结构具有较好的约束作用。

综上, 对于有面外撑杆的 X 撑系统, 当端点处有较大的平动和转动刚度, 此时面外撑杆的存在 (增加交点的平动刚度或转动刚度) 将有效降低结构屈曲长度系数, 考虑极端情况, 即不存在面外撑杆时, 此时屈曲长度系数临界值 $\mu \approx 0.7$ 。考虑到结构设计时应留有足够的安全余度, 推荐在结构设计中屈曲长度系数 μ 取值为 0.8。

参考文献

- [1] 张伟为, 康元顺, 崔哲华, 曾晓辉. 基于正交试验方法的大型有面外支撑杆 X 撑结构的屈曲分析和优化设计[J]. 工程力学, 2022, 39(增刊): 261-271.
Zhang Wei-wei, Kang Yuan-shun, Cui Zhe-hua, Zeng Xiao-hui. Buckling analysis and optimal design of large-scale x-brace structure with out-of-plane support bars based on orthogonal test method[J]. Engineering Mechanics, 2022, 39(Suppl): 261-271. (in Chinese)
- [2] Timoshenko S P. Theory of Elastic Stability. /-second ed[M]. McGraw-Hill Book Co, 1961.
- [3] Knapp A E. The Use of X-Bracing in Fixed Offshore Platforms[J]. Society of Petroleum Engineers Journal, 1973, 13(2).
- [4] Stoman S H. Stability Criteria for X-Bracing Systems[J]. Journal of Engineering Mechanics, 1988, 114(8): 1426-1434.
- [5] Stoman, S H. Effective Length Spectra for Cross Bracings[J]. Journal of Structural Engineering, 1989, 115(12): 3112-3122.
- [6] Thevendran V, Wang C M. Stability of Nonsymmetric Cross-Bracing Systems[J]. Journal of Structural Engineering, 1993, 119(1): 169-180.
- [7] Davaran A. Effective Length Factor For Discontinuous X-Bracing Systems. J Eng Mech[J]. 2001;127:106-112.
- [8] Moon J, Yoon K-Y, Han T-S, Lee H-E. Out-of-plane buckling and design of X-bracing systems with discontinuous diagonals. Journal of Constructional Steel Research[J]. 2008;64(3):285-94.
- [9] 朱永庆, 何守理, 何明胜. 输电塔交叉斜材计算长度的分析和计算[J]. 特种结构, 2013, 30(1): 18-23, 108.
Zhu Yongqing, He Shouli, He Mingsheng. Analysis and calculation of the calculation length of the cross inclined beam of transmission tower [J]. Special Structures, 2013, 30(1): 18-23 + 108. (in Chinese)
- [10] 郭勇, 陈勇, 胡文侃, 徐意娟, 王激扬. 输电铁塔非对称交叉支撑杆系的面外弹性稳定分析[J]. 工业建筑, 2017, 47(6): 131-137, 173.
Guo Yong, Chen Yong, Hu Wen-kan, XU Yi-juan, WANG Ji-yang. Out-of-plane buckling ansysis of non-symmetric cross-bracing systems of transmission towers [J]. Industrial Architecture, 2017, 47(6): 131-137, 173. (in Chinese)
- [11] Yong CHEN, Yong GUO, Hai-wei XU. Effective length factor of a non-symmetrical cross-bracing system with a discontinuous diagonal[J]. Journal of Zhejiang University-Science A (Applied Physics & Engineering), 2019, 20(8): 590-600.
- [12] 康元顺, 张伟为, 刘梦娟, 曾晓辉. 基于牛顿迭代算法的大型有面外支撑杆 X 撑结构的屈曲分析[J]. 工程力学. 2022, 39(增刊): 286-295.
Kang Yuan-shun, Zhang Wei-wei, Liu Meng-juan, Zeng Xiao-hui. Buckling analysis of a large x-supported structure with out-of-plane braces based on newton's iteration[J]. Engineering Mechanics, 2022, 39(Suppl): 286-295. (in Chinese)
- [13] American Petroleum Institute. API RP 2A-LRFD[M]. Washington: API, 2019.
- [14] EN ISO 19902-2007, Petroleum and natural gas industries — Fixed steel offshore structures [S], 2007.
- [15] ASCE 10—2015 Design of latticed steel transmission structures[S]. USA: American Society of Civil Engineers, 2015.
- [16] Attia WA, Irheem MMM. Boundary condition effect on response modification factor of X-braced steel frames. HBRC Journal[J]. 2019; 14(1): 104-121.
- [17] LIBOVE, C. Buckling of a compression member in a rigid- joint truss. I - Equalend restraints.[J]. Journal of Aircraft, 1966, 3(4): 347-353.
- [18] Picard, Andr'ue, Beaulieu, et al. Experimental study of the buckling strength of compression members connected to coplanar tension members[J]. Canadian Journal of Civil Engineering, 1989, 16(3): 249-257.