

水平电场下界面波的 Hamilton 原理与 多尺度建模

王 展*

中国科学院力学研究所, 北京 100190
中国科学院大学工程科学学院, 北京 100049

摘 要 本文研究水平电场下两层电介质流体间界面波动的多尺度建模. 首先对此系统的 Hamilton 原理给出详细证明; 然后基于 Hamilton 结构和 Dirichlet–Neumann 算子的解析性质, 将 Hamilton 量中的动能与电势能展开成收敛级数形式并确定截断阶数, 最后通过计算截断后近似总能量的变分导数得到约化模型. 上述过程对该问题给出了一套建立多尺度非线性模型的系统方法. 文章再以“上层深水、下层浅水”为例详细阐述了多尺度建模的全过程, 并利用修正的 Petviashvili 迭代方法计算了新模型中的非线性相干结构. 本文所发展的渐近分析技巧不同于之前的工作, 其优点在于所导出的约化模型自然保留能量守恒的性质; 同时, 本文亦将原有结果推广至三维情形.

关键词 哈密顿, 界面波, 电流体力学, 多尺度建模

中图分类号: O353 O361 文献标识码: A DOI: 10.6052/1000-0992-22-035

收稿日期: 2022-06-27; 录用日期: 2022-08-02; 在线出版日期: 2022-08-05

* E-mail: zwang@imech.ac.cn

引用方式: 王展. 水平电场下界面波的 Hamilton 原理与多尺度建模. 力学进展, 2022, 52(3): 719-729

Wang Z. Interfacial electrohydrodynamic waves under horizontal electric fields: Hamilton's principle and multi-scale modeling. *Advances in Mechanics*, 2022, 52(3): 719-729

© 2022 《力学进展》版权所有

1 引言

现代电流体界面力学发轫于 20 世纪六十年代, 美国的 Melcher (1963) 与英国的 Taylor (1964) 是该领域的开创者. Taylor 的出发点是研究水滴在强电场 (如雷电) 下的崩解, 随后他将问题抽象成垂直作用于导电液体自由表面的电场对系统稳定性的影响, 由此发现了“Taylor 锥”这一重要的物理现象. 垂直电场令导电流体失稳这一发现在后来的静电喷雾技术中发挥了重要作用, 被广泛应用于涂层工艺、冷却系统、微流控等工业领域. 与之相反, Melcher 则更关注平行于电介质流体间界面的电场对系统稳定性的影响 (Melcher 1968). 在无黏假设之下, 水平电场为界面上的线性波贡献色散效应, 故可延缓液膜断裂的形成, 甚至抑制 Rayleigh-Taylor 不稳定性 (Barannyk 2015, Guan 2022).

近二三十年来, 对电场下无黏液膜自由表面波/界面波的研究, 无论是基于对多尺度约化模型的理论分析还是对原始 Euler 方程的直接数值模拟, 都越来越聚焦于界面波动的非线性特征. 例如, 电场作用下液膜界面的触壁奇异性 (即形变界面触碰到槽道上下壁) (Barannyk 2015)、电场作用下的 Rayleigh-Taylor 不稳定性 (Mohamed 1983)、完全非线性 Euler 方程中任意大振幅的电毛细孤立波 (Guan 2022) 等. 在过去的几十年间, 对电流体界面波非线性约化模型的研究往往集中于二维流体, 流体力学家和应用数学家建立了大量新的多尺度非线性模型, 感兴趣的读者可参看 D. T. Papageorgiou 教授于 2019 年发表在《流体力学年鉴》上的综述文章 (Papageorgiou 2019).

本文聚焦三维流体系统中非线性电流体界面波的多尺度建模. 研究对象限于无黏不可压缩流体, 讨论槽道内上下叠放的两种不相溶电介质流体在电场力、重力、界面张力共同作用下的界面波动问题. 为简单起见, 假设每层流体的运动都是无旋的; 在界面有形变的情况下, 水平电场通过 Maxwell 应力作用于界面; 第 3 节证明该自由界面问题构成一个 Hamilton 系统. 第 4 节引入处理位势方程的关键——Dirichlet-Neumann 算子, 并在此基础上重写 Hamilton 量中的动能与电势能. 第 5 节提出一种利用 Dirichlet-Neumann 算子的解析性质建立非线性多尺度模型的普适方法, 并以“上层深水、下层浅水”为例给出详细的推导过程, 建立全新的约化模型. 结论与进一步的拓展在第 6 节中讨论.

2 问题的数学描述

如图 1 所示, 考虑三维槽道内由两种无黏不可压缩流体组成的系统. 两种流体上下叠放且互不相溶, 以强间断面隔开, 界面记为 $z = \eta(x, y, t)$, 其中 z 代表垂直方向的坐标, x 和 y 代表水平方向的坐标, 而 t 表示时间. 用上标+和-分别标记与上层和下层流体相关的物理量. $z = 0$ 为未经扰动的界面, 槽道的上下壁与未经扰动的界面平行, 分别记为 $z = h^+$ 和 $z = -h^-$. 上下两种流体均为理想电介质, 介电常数分别为 ϵ^+ 和 ϵ^- , 密度记为 ρ^+ 和 ρ^- . 未经扰动时, 槽道整体处于沿 x 方向强度为 E_0 的均匀水平电场作用下. 当界面发生形变时, 记扰动后的上下流体层中的电场强度分别为 $\mathbf{E}^+(x, y, z, t)$ 和 $\mathbf{E}^-(x, y, z, t)$. Maxwell 方程的静电极限意味着 $\tilde{\nabla} \times \mathbf{E}^\pm = 0$, 其中 $\tilde{\nabla} = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)^\top$ 是三维梯度算子. 由于静电场无旋, 故可引入电势函数 V^\pm , 使得 $\mathbf{E}^\pm = -\tilde{\nabla} V^\pm$. 最后,

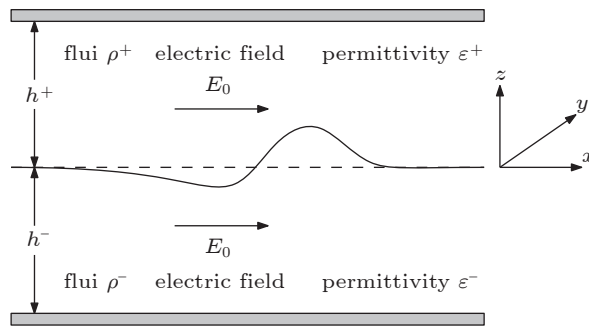


图 1

水平电场下两层电介质流体间界面波问题的概图.

假设流体在各自区域内的流动是无旋的, 故可以引入速度势函数 ϕ^\pm , 使得速度场可以表示为 $\tilde{\nabla}\phi^\pm$. 在这些基本假设之下, 电势与速度势均满足 Laplace 方程

$$\tilde{\Delta}\phi^- = 0, \quad \tilde{\Delta}V^- = 0, \quad \text{在区域 } -h^- < z < \eta(x, y, t) \text{ 中} \quad (1)$$

$$\tilde{\Delta}\phi^+ = 0, \quad \tilde{\Delta}V^+ = 0, \quad \text{在区域 } \eta(x, y, t) < z < h^+ \text{ 中} \quad (2)$$

其中 $\tilde{\Delta} = \partial_{xx} + \partial_{yy} + \partial_{zz}$ 为三维 Laplace 算子. 电场在界面 $z = \eta(x, y, t)$ 上需要满足两个边界条件, 即电势连续与电位移场连续

$$V^- = V^+, \quad \epsilon^- \frac{\partial V^-}{\partial \mathbf{n}} = \epsilon^+ \frac{\partial V^+}{\partial \mathbf{n}} \quad (3)$$

其中 $\mathbf{n} = (-\eta_x, -\eta_y, 1)^\top / \sqrt{1 + \eta_x^2 + \eta_y^2}$ 是界面处方向朝上的单位法向量. 界面上流体运动满足运动学边界条件与动力学边界条件, 分别为

$$\eta_t = \phi_z^- - \nabla\eta \cdot \nabla\phi^- = \phi_z^+ - \nabla\eta \cdot \nabla\phi^+ \quad (4)$$

$$0 = \rho^- \left(\phi_t^- + \frac{1}{2} |\tilde{\nabla}\phi^-|^2 + g\eta \right) - \rho^+ \left(\phi_t^+ + \frac{1}{2} |\tilde{\nabla}\phi^+|^2 + g\eta \right) + [\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n}]_+^- - \sigma \nabla \cdot \left[\frac{\nabla\eta}{\sqrt{1 + |\nabla\eta|^2}} \right] \quad (5)$$

式中, g 为重力加速度, σ 为界面张力系数, $\nabla = (\partial_x, \partial_y)^\top$ 为水平方向上的二维梯度算子, 而 $\boldsymbol{\Sigma}$ 是 Maxwell 应力张量, 故有

$$[\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n}]_+^- = \epsilon^- \left[\left(\frac{\partial V^-}{\partial \mathbf{n}} \right)^2 - \frac{1}{2} |\tilde{\nabla}V^-|^2 \right] - \epsilon^+ \left[\left(\frac{\partial V^+}{\partial \mathbf{n}} \right)^2 - \frac{1}{2} |\tilde{\nabla}V^+|^2 \right] \quad (6)$$

注意到, 未经扰动的电场势为 $V^\pm = -E_0x$; 而具体研究时, 只有扰动部分才有实际意义, 故可以令 $W^\pm = V^\pm / E_0 + x$, 此时函数 W^\pm 仍然满足 Laplace 方程, 而方程 (3) 转变为

$$W^- = W^+ \quad (7)$$

$$\epsilon^- (W_z^- - \nabla\eta \cdot \nabla W^-) - \epsilon^+ (W_z^+ - \nabla\eta \cdot \nabla W^+) = -(\epsilon^- - \epsilon^+) \eta_x \quad (8)$$

同时有

$$[\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n}]_{\pm}^{\pm} = E_0^2 \varepsilon^{\pm} \left[\left(\frac{\partial W^{\pm}}{\partial \mathbf{n}} \right)^2 - \frac{1}{2} |\tilde{\nabla} W^{\pm}|^2 \right] - E_0^2 \varepsilon^{\mp} \left[\left(\frac{\partial W^{\mp}}{\partial \mathbf{n}} \right)^2 - \frac{1}{2} |\tilde{\nabla} W^{\mp}|^2 \right] - \frac{E_0^2 (\varepsilon^- - \varepsilon^+) \eta_x^2}{1 + |\nabla \eta|^2} + E_0^2 (\varepsilon^- W_x^- - \varepsilon^+ W_x^+) \quad (9)$$

最后, 在槽道的上下壁, 流场与电场均需满足无穿透边界条件, 即

$$\frac{\partial \phi^+}{\partial z} = \frac{\partial W^+}{\partial z} = 0, \quad \text{当 } z = h^+ \quad (10)$$

$$\frac{\partial \phi^-}{\partial z} = \frac{\partial W^-}{\partial z} = 0, \quad \text{当 } z = -h^- \quad (11)$$

从物理上来讲, 有关电场的无穿透边界条件用于模拟电绝缘壁 (见 Barannyk 2015, Guan 2022). 方程 (1)(2)(4)(5)(7) ~ (11) 构成水平电场下理想电介质流体界面问题的完整数学描述.

3 Hamilton 原理

这一节将证明, 在假定方程 (1)(2) 和 (7) ~ (11) 成立的前提下, 式 (4) 和式 (5) 构成一个 Hamilton 系统. V. E. Zakharov 在 1968 年开创性地给出了水波动力学的 Hamilton 原理 (这一经典工作的中译本请见 (Zakharov 2021), 读者也可阅读综述 (张宝善 1998) 以了解更多相关内容). 以 Zakharov 为代表的前苏联波动力学学派应该也知道电流体界面力学的 Hamilton 原理, 尽管他们并没有给出任何推导过程 (如 Zubarev 2013). 但事实上, 他们关于该问题在深水情形下的结论并非显而易见, 这里我们给出任意水深情形下的详细证明.

在不存在电场的情况下 (等价于令 $E_0 = 0$), 式 (4) 和式 (5) 亦构成 Hamilton 系统, Hamilton 量为系统的总能量 \mathcal{H} , 而两个正则变量则为界面形变 η 和广义冲量 $\xi = \rho^- \phi^-(x, y, \eta, t) - \rho^+ \phi^+(x, y, \eta, t)$ (界面上下速度位势的线性组合), 即

$$\mathcal{H}[\eta, \xi] = E_k + E_p \quad (12)$$

其中动能 E_k 和势能 E_p 的具体表达式为

$$E_k = \frac{\rho^-}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{-h^-}^{\eta} |\tilde{\nabla} \phi^-|^2 dz dx dy + \frac{\rho^+}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\eta}^{h^+} |\tilde{\nabla} \phi^+|^2 dz dx dy \quad (13)$$

$$E_p = \frac{g(\rho^- - \rho^+)}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \eta^2 dx dy + \sigma \int_{\mathbb{R}^2} (\sqrt{1 + |\nabla \eta|^2} - 1) dx dy \quad (14)$$

而 η 与 ξ 满足 Hamilton 正则方程

$$\eta_t = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \xi}, \quad \xi_t = -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \eta} \quad (15)$$

其中 δ 代表变分. 这一结果最初由 Kuznetsov 等 (1993) 和 Benjamin 等 (1997) 独立给出. 因此可合理猜测, 电流体界面力学的 Hamilton 量也是总能量; 注意到 W^{\pm} 只与 η 相关, 故预测正则变量依旧保持不变, 即

$$\mathcal{H}[\eta, \xi] = E_k + E_p + E_e \quad (16)$$

其中 E_k 和 E_p 已由式 (13) 和式 (14) 给出, 而电势能 E_e 的表达式如下

$$E_e = \frac{E_0^2 \varepsilon^-}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{-h^-}^{\eta} |\tilde{\nabla} W^-|^2 dz dx dy + \frac{E_0^2 \varepsilon^+}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\eta}^{h^+} |\tilde{\nabla} W^+|^2 dz dx dy \quad (17)$$

需要检验的只是电势能的变分, 而这部分只与 η 的变分相关. 当界面由 η 变为 $\eta + \delta\eta$ 时, 方程式 (8) 变为

$$\varepsilon^- \left[\overline{W}_z^- - (\nabla\eta + \nabla\delta\eta) \cdot \nabla \overline{W}^- \right] - \varepsilon^+ \left[\overline{W}_z^+ - (\nabla\eta + \nabla\delta\eta) \cdot \nabla \overline{W}^+ \right] = -(\varepsilon^- - \varepsilon^+) (\eta + \delta\eta)_x \quad (18)$$

此式在 $z = \eta + \delta\eta$ 上成立, 其中 $\overline{W}^\pm(x, y, z, t)$ 代表新界面下的电势函数. 方程 (18) 减去方程 (8), 并舍去高阶量 (仅保留一阶项) 后得到

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + |\nabla\eta|^2} \left(\varepsilon^- \frac{\partial \delta W^-}{\partial \mathbf{n}} - \varepsilon^+ \frac{\partial \delta W^+}{\partial \mathbf{n}} \right) &= -(\varepsilon^- - \varepsilon^+) (\delta\eta)_x + \nabla\delta\eta \cdot \nabla (\varepsilon^- W^- - \varepsilon^+ W^+) - \\ \sqrt{1 + |\nabla\eta|^2} \left(\varepsilon^- \frac{\partial W_z^-}{\partial \mathbf{n}} - \varepsilon^+ \frac{\partial W_z^+}{\partial \mathbf{n}} \right) \delta\eta & \end{aligned} \quad (19)$$

上面的等式在 $z = \eta$ 上成立, 其中 $\delta W^\pm = \overline{W}^\pm - W^\pm$. 下面处理电势能的变分

$$\begin{aligned} \delta \left(\frac{\varepsilon^-}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{-h^-}^{\eta} |\tilde{\nabla} W^-|^2 dz dx dy \right) &= \\ \frac{\varepsilon^-}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{-h^-}^{\eta + \delta\eta} |\tilde{\nabla} \overline{W}^-|^2 dz - \int_{-h^-}^{\eta} |\tilde{\nabla} W^-|^2 dz \right) dx dy &= \\ \frac{\varepsilon^-}{2} \int_{\mathbb{R}^2} |\tilde{\nabla} W^-|^2 \delta\eta dx dy + \varepsilon^- \int_{\mathbb{R}^2} \left(W^- \frac{\partial \delta W^-}{\partial \mathbf{n}} \right)_{z=\eta} \sqrt{1 + |\nabla\eta|^2} dx dy & \end{aligned} \quad (20)$$

上面第二个等号在保留一阶项的意义下成立. 同理可以得到上层电势能的变分. 根据式 (7) 定义 $W(x, y, t) = W^\pm(x, y, \eta, t)$, 利用式 (19) 和式 (20), 通过变分计算可以得到

$$\begin{aligned} \frac{\delta E_e}{E_0^2} &= \int_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{\varepsilon^-}{2} |\tilde{\nabla} W^-|^2 - \frac{\varepsilon^+}{2} |\tilde{\nabla} W^+|^2 - W \sqrt{1 + |\nabla\eta|^2} \frac{\partial (\varepsilon^- W_z^- - \varepsilon^+ W_z^+)}{\partial \mathbf{n}} \right]_{z=\eta} \delta\eta dx dy + \\ \int_{\mathbb{R}^2} \left\{ (\varepsilon^- - \varepsilon^+) W_x - \nabla \cdot \left[W (\varepsilon^- \nabla W^- - \varepsilon^+ \nabla W^+) \right]_{z=\eta} \right\} \delta\eta dx dy &= \\ \int_{\mathbb{R}^2} \left[-\frac{\varepsilon^-}{2} |\tilde{\nabla} W^-|^2 + \frac{\varepsilon^+}{2} |\tilde{\nabla} W^+|^2 - (\varepsilon^- W_z^- - \varepsilon^+ W_z^+) \nabla\eta \cdot \nabla W \right] \delta\eta dx dy + \\ \int_{\mathbb{R}^2} \left\{ (\varepsilon^- - \varepsilon^+) W_x + \left[\varepsilon^- (W_z^-)^2 - \varepsilon^+ (W_z^+)^2 \right] (1 + |\nabla\eta|^2) \right\} \delta\eta dx dy &= \\ \int_{\mathbb{R}^2} \left[\varepsilon^- \left(\frac{\partial W^-}{\partial \mathbf{n}} \right)^2 - \frac{\varepsilon^-}{2} |\tilde{\nabla} W^-|^2 - \varepsilon^+ \left(\frac{\partial W^+}{\partial \mathbf{n}} \right)^2 + \frac{\varepsilon^+}{2} |\tilde{\nabla} W^+|^2 \right] \delta\eta dx dy + \\ \int_{\mathbb{R}^2} \left[\varepsilon^- W_x^- - \varepsilon^+ W_x^+ - \frac{(\varepsilon^- - \varepsilon^+) \eta_x^2}{1 + |\nabla\eta|^2} \right] \delta\eta dx dy & \end{aligned} \quad (21)$$

上面的推导过程用到了 $\tilde{\Delta} W^\pm = 0$, 以及下面两个等式

$$\nabla W = \nabla W^\pm + W_z^\pm \nabla\eta, \quad W_z^\pm = \frac{\partial W^\pm}{\partial \mathbf{n}} \sqrt{1 + |\nabla\eta|^2} + \nabla\eta \cdot \nabla W$$

比较式 (21) 和式 (9), 即完成证明.

4 Dirichlet-Neumann 算子

定义 $\xi^\pm = \phi^\pm(x, y, \eta, t)$ 和 $W = W^\pm(x, y, \eta, t)$ 为未知函数在界面上的值, 根据方程 (1)(2) 及上下壁处的无穿透条件式 (10)、式 (11), 界面上未知量的法向导数可表示为

$$G^\pm(\eta, h^\pm) \xi^\pm = \mp (\phi_z^\pm - \nabla \eta \cdot \nabla \phi^\pm)_{z=\eta} = \mp \eta_t \quad (22)$$

$$G^\pm(\eta, h^\pm) W = \mp (W_z^\pm - \nabla \eta \cdot \nabla W^\pm)_{z=\eta} \quad (23)$$

这里引入了依赖于 η 和 h^\pm 的拟微分算子 G^\pm , 这一算子在位势问题中至关重要, 它将 Dirichlet 边界条件映射为边界上的 Neumann 条件, 因此被称为 Dirichlet-Neumann 算子. 为简单起见, 在之后的论述中忽略算子对于 η 和 h^\pm 的依赖关系. 可以证明, 当界面的振幅与斜率小于特定值时, G^\pm 是解析算子; 也即是讲, G^\pm 可以展开成收敛的 Taylor 级数 $\sum_{j=0}^{\infty} G_j^\pm(\eta, h^\pm)$. 在文献 (Craig 1993) 中, Craig 与 Sulem 以递归函数的形式第一次给出了 G_j^\pm 的具体表达式, 这里仅展示展开式的前三项

$$G_0^\pm = \tanh(h^\pm(-\Delta)^{1/2}) (-\Delta)^{1/2} \quad (24)$$

$$G_1^\pm = \pm G_0^\pm \eta G_0^\pm \pm \nabla \cdot \eta \nabla \quad (25)$$

$$G_2^\pm = \frac{1}{2} G_0^\pm \eta^2 \Delta + \frac{1}{2} \Delta \eta^2 G_0^\pm + G_0^\pm \eta G_0^\pm \eta G_0^\pm \quad (26)$$

其中 $\Delta = \partial_{xx} + \partial_{yy}$ 是平面上的 Laplace 算子. 利用 Dirichlet-Neumann 算子, 方程 (8) 可改写为

$$W = -(\varepsilon^- - \varepsilon^+) (\varepsilon^- G^- + \varepsilon^+ G^+)^{-1} \eta_x \quad (27)$$

类似地, 利用运动学边界条件 $G^- \xi^- = -G^+ \xi^+$ 以及 ξ 的定义, 可得

$$\xi^+ = -(\rho^- G^+ + \rho^+ G^-)^{-1} G^- \xi, \quad \xi^- = (\rho^- G^+ + \rho^+ G^-)^{-1} G^+ \xi \quad (28)$$

最后, 利用散度定理改写动能 (13) 与电势能 (17), 并将式 (28) 和式 (27) 代入, 可得

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} (\rho^- \xi^- G^- \xi^- + \rho^+ \xi^+ G^+ \xi^+) \, dx dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \xi G^- (\rho^- G^+ + \rho^+ G^-)^{-1} G^+ \xi \, dx dy \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} E_e &= \frac{E_0^2}{2} \int_{\mathbb{R}^2} (\varepsilon^- W G^- W + \varepsilon^+ W G^+ W) \, dx dy = \\ &= \frac{E_0^2 (\varepsilon^- - \varepsilon^+)^2}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \eta_x (\varepsilon^- G^- + \varepsilon^+ G^+)^{-1} \eta_x \, dx dy \end{aligned} \quad (30)$$

5 多尺度建模

利用电流体界面力学的 Hamilton 原理和 Dirichlet-Neumann 算子的解析性质, 此节给出一种具有普适意义的多尺度建模方法. 不同于 (Guan 2022), 本文中给出的方法直接从 Hamilton 原

理出发, 因此得到的约化模型自动满足能量守恒. 这里以“下层浅水、上层深水”为例, 说明建立多尺度约化模型的具体操作步骤. 需要预先说明两点: 其一, 所谓“浅水”和“深水”是相对于界面波的波长来讲的; 其二, 为记号简单起见, 直接假定上层水深是无穷 (即 $h^+ \rightarrow \infty$). 记界面波的特征波长为 λ ; 由于下层流体的平均厚度相较于特征波长为小量, 如果记 $\mu = \frac{h^-}{\lambda}$, 则有 $\mu \ll 1$. 这里推导强非线性模型, 也是对界面波动的振幅不作特别假设, 只是要求 $\eta \sim h^-$. 用 λ 和 h^- 分别表示水平和垂直方向的特征长度进行无量纲化, 则 Dirichlet-Neumann 算子可展开成

$$G^- = -\frac{1}{\lambda} [\mu\Delta + \mu\nabla \cdot \eta\nabla + O(\mu^3)] \tag{31}$$

$$G^+ = \frac{1}{\lambda} [(-\Delta)^{1/2} + \mu(-\Delta)^{1/2}\eta(-\Delta)^{1/2} + \mu\nabla \cdot \eta\nabla + O(\mu^2)] \tag{32}$$

假设流体系统处于密度稳定的结层状态, 即 $\rho^+ < \rho^-$; 记 $R = \frac{\rho^+}{\rho^-} < 1$ 和 $\varepsilon = \frac{\varepsilon^-}{\varepsilon^+}$, 通过直接的符号计算可得

$$G^- (G^+ + RG^-)^{-1} G^+ = -\frac{\mu}{\lambda} (\Delta + \nabla \cdot \eta\nabla) + \frac{\mu^2 R}{\lambda} [(-\Delta)^{1/2}\nabla \cdot \eta\nabla - (-\Delta)^{3/2} - \nabla \cdot \eta\nabla(-\Delta)^{-1/2}\nabla \cdot \eta\nabla + \nabla \cdot \eta\nabla(-\Delta)^{1/2}] + \frac{1}{\lambda} O(\mu^3) \tag{33}$$

$$(G^+ + \varepsilon G^-)^{-1} = \lambda [(-\Delta)^{-1/2} - \mu(\eta + \varepsilon) - \mu(1 - \varepsilon)(-\Delta)^{-1/2}\nabla \cdot \eta\nabla(-\Delta)^{-1/2}] + \lambda O(\mu^2) \tag{34}$$

再用

$$h^-, \quad \frac{\lambda}{\sqrt{(1-R)gh^-}}, \quad \lambda\sqrt{(1-R)gh^-} \tag{35}$$

依次表示 W 、时间、速度势的特征尺度对系统进行无量纲化, 并重新定义 $\xi = \xi^- - R\xi^+$, 得到新的能量表达式

$$E_p = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \eta^2 dx dy + \frac{\mu^2 B_o}{2} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla\eta|^2 dx dy \tag{36}$$

$$E_k = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \left\{ (1 + \eta)|\nabla\xi|^2 + \mu R \left[2\xi(-\Delta)^{1/2}\nabla \cdot \eta\nabla\xi - \xi(-\Delta)^{3/2}\xi - \xi\nabla \cdot \eta\nabla(-\Delta)^{-1/2}\nabla \cdot \eta\nabla\xi \right] \right\} dx dy \tag{37}$$

$$E_e = \frac{\mu B_e}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \left[\eta_x(-\Delta)^{-1/2}\eta_x - \mu(\eta + \varepsilon)\eta_x^2 + \mu(1 - \varepsilon)\eta \left| \nabla(-\Delta)^{-1/2}\eta_x \right|^2 \right] dx dy \tag{38}$$

其中 $B_o = \frac{\sigma}{(1-R)g\rho^-(h^-)^2}$ 为 Bond 数, 而 $B_e = \frac{E_0^2(\varepsilon^- - \varepsilon^+)^2}{(1-R)g\rho^-h^-\varepsilon^+}$ 可称为电场 Bond 数. 能量表达式 (36)~(38) 都做了截断, 舍弃了高阶项. 如 (Benjamin 1992) 中所讨论的, 可假设 B_o 是大参数, $B_o \sim 1/\mu$ (相当于两层流体的密度非常接近, 且界面张力系数较大); 为简便起见, 假设电场强度较弱, 即 $B_e \sim 1$. 最后, 将式 (36) ~ 式 (38) 的项保留到 $O(\mu)$, 并计算截断后的 Hamilton 量的变分导数 (如式 (15) 所示), 即可得到约化模型

$$\eta_t = \frac{\delta E_k}{\delta \xi} = -\nabla \cdot [(1 + \eta)\nabla \xi] + \mu R \left[(-\Delta)^{1/2} \nabla \cdot \eta \nabla \xi + \nabla \cdot \eta \nabla (-\Delta)^{1/2} \xi - (-\Delta)^{3/2} \xi - \nabla \cdot \eta \nabla (-\Delta)^{-1/2} \nabla \cdot \eta \nabla \xi \right] \quad (39)$$

$$\xi_t = -\frac{\delta (E_k + E_p + E_e)}{\delta \eta} = -\frac{1}{2} |\nabla \xi|^2 - \mu R \nabla \xi \cdot \left[\nabla (-\Delta)^{-1/2} \nabla \cdot \eta \nabla \xi - \nabla (-\Delta)^{1/2} \xi \right] - \eta + \mu^2 B_o \Delta \eta + \mu B_e (-\Delta)^{-1/2} \eta_{xx} \quad (40)$$

方程 (39)(40) 构成关于未知量 η 和 ξ 的时间演化方程组, 满足能量守恒性质, 是 (Guan 2022) 中方程组 (16)(17) 的高维推广. 然而, 这个方程组需要进一步修正, 原因在于模型的线性色散关系存在问题. 忽略方程组 (39)(40) 中的非线性项, 并令 $\eta = \hat{\eta} e^{i(k_1 x + k_2 y - \omega t)}$ 及 $\xi = \hat{\xi} e^{i(k_1 x + k_2 y - \omega t)}$, 其中 k_1 与 k_2 分别代表 x 与 y 方向的波数, 而 ω 代表波的频率, 则有

$$\omega^2 = k^2 (1 - \mu R k) \left(1 + \mu^2 B_o k^2 + \frac{\mu B_e k_1^2}{k} \right) \quad (41)$$

其中 $k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$ 为波矢量的模. 显然, 当 k 较大时, ω^2 变成负数, 这意味静止系统在无穷小扰动下是不稳定的, 而原始方程并没有这样的性质. 为了保持 ω 是实值函数, 需要对方程式 (39) 进行必要的处理. 注意到

$$\Delta \xi = -\eta_t - \nabla \cdot \eta \nabla \xi + O(\mu) \quad (42)$$

将上式代入 $(-\Delta)^{3/2} \xi$, 则可以将式 (39) 等价地改写为

$$\left[1 + \mu R (-\Delta)^{1/2} \right] \eta_t = -\nabla \cdot [(1 + \eta)\nabla \xi] + \mu R \left[\nabla \cdot \eta \nabla (-\Delta)^{1/2} \xi - \nabla \cdot \eta \nabla (-\Delta)^{-1/2} \nabla \cdot \eta \nabla \xi \right] \quad (43)$$

从线性波的角度来讲, 方程式 (43) 和式 (40) 构成一个适定的方程组, 因为此时的线性色散关系为

$$\omega^2 = \frac{k^2}{1 + \mu R k} \left(1 + \mu^2 B_o k^2 + \frac{\mu B_e k_1^2}{k} \right) \quad (44)$$

约化模型 (43) 和 (40) 中存在“块状波”解 (lump), 一种在三维空间中完全局域化的行进波 (即局部波动在保持形状不变的情况下以固定速度直线传播). 这里采用修正的 Petviashvili 迭代技巧计算块状波, 具体的数值格式可参看 (Wang 2022), 此处只简单叙述结果. 假设块状波沿 x 方向以速度 c 进行传播, 图 2 给出了 $c = 0.5$ 时块状波波形, 此时其他参数为: $\mu = 0.1$, $B_o = 10$, $B_e = 1$, $R = 0.99$.

水平电场下的界面波表现出有趣的动力学行为, 尤其是在抑制 Rayleigh-Taylor 不稳定性、界面的触壁奇性、自相似解等方面 (低维问题的相关结果可参看 Barannyk 2015), 许多行为可以用目前建立的约化模型来展现; 因篇幅原因, 关于方程组 (43) 和 (40) 的行波解全局分岔机理、系统稳定性与动力学等问题的研究留待将来.

若假设界面振幅远小于 h^- , 方程组 (43)(40) 可简化为弱非线性的二维 Benjamin 方程 (感兴趣的读者可参看 (Guan 2022), 尽管那篇文章中只给出了一维 Benjamin 方程的推导过程). 从上面的例子可以看出, 在长波、短波、小振幅波、有限振幅波等不同尺度的假设之下, 利用 Dirichlet-Neumann 算子的解析性质, 可合理展开 Hamilton 量中的动能与电势能, 截断后取变分导

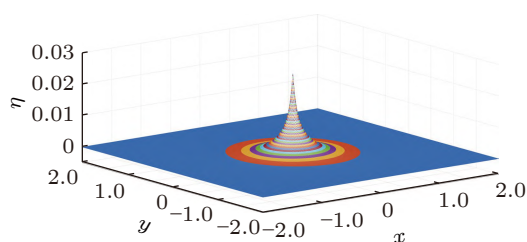


图 2

典型的“块状波”波形图, 波移动的速度为 $c = 0.5$, 其余的参数为: $\mu = 0.1$, $B_o = 10$, $B_e = 1$, $R = 0.99$.

数即可得到各类约化模型. 特别地, 不难得到“上层浅水、下层浅水”的弱非线性弱色散的 Boussinesq 型方程组与 Kadomtsev-Petviashvili 型方程, 以及“上层深水、下层深水”的全色散弱非线性的 Whitham 型方程. 囿于篇幅, 这里不再一一赘述推导过程, 有兴趣的读者可自行验证.

6 结论与讨论

本文研究两种电介质流体间的界面在水平电场作用下的波动问题. 证明了该自由边界问题具有 Hamilton 结构, 其 Hamilton 量为总能量, 而正则变量为界面形变 η 与广义冲量 $\rho^-\phi^- - \rho^+\phi^+$. 引入位势问题中至关重要的 Dirichlet-Neumann 算子可改写 Hamilton 量中有关动能与电势能的部分. 在此基础上, 利用 Dirichlet-Neumann 算子的解析性质, 可以将原来的三维问题简化为二维问题. 最后, 按照所研究问题的时间与空间尺度的具体情况, 对 Hamilton 量进行展开与截断, 通过计算变分导数即可得到所需的约化模型. 这一套渐近方法具有一定的普适性, 可导出各类多尺度模型, 文章仅以“上层深水、下层浅水”为例进行了详细说明. 相比于作者在 (Guan 2022) 中提出的多尺度建模方法, 本文提出的方法由于直接截断 Hamilton 量进行变分, 所得的约化模型天然具有 Hamilton 结构, 是更为直截了当的方法.

在无黏不可压缩的假设之下, 因水平电场为电介质流体系统提供了更多的色散效应, 故起到了稳定系统之作用. 但是水平电场的存在也破坏了系统的对称性, 这一点非常明显地展示在色散关系式 (41) 和式 (44) 中, 也就是说从线性理论层面来看, 水平电场的稳定作用对那些垂直于电场方向传播的波而言是无效的. 最后需要指出, 使用 Hamilton 正则变量来构造模型并不一定是最优的, 某些时候直接使用非正则变量所得到模型形式上更为简洁 (见 (Guan 2022) 中的讨论).

致谢 感谢中国科学院力学研究所的许葛幸在此领域与作者的有益讨论. 本项目受中国科学院 B 类战略先导 (XDB22040203) 与中国科学院青年交叉团队项目的资助.

参考文献

- 张宝善, 卢东强, 戴世强, 程友良. 1998. 非线性水波 Hamilton 系统理论与应用研究进展. 力学进展, **28**: 521-531
- Zakharov V E. 2021. 深水表面有限振幅周期波的稳定性. 王展译, 卢东强校. 力学进展, **51**(4): 920-930. (Zakharov V E. 2021. Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid. Wang Z trans, Lu D Q proof.

- Advances in Mechanics*, **51**(4): 920–930.)
- Barannyk L L, Papageorgiou D T, Petropoulos P G, Vanden-Broeck J-M. 2015. Nonlinear dynamics and wall touch-up in unstably stratified multilayer flows in horizontal channels under the action of electric fields. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, **75**: 92-113.
- Benjamin T B. 1992. A new kind of solitary wave. *Journal of Fluid Mechanics*, **245**: 401-411.
- Benjamin T B, Bridges T J. 1997. Reappraisal of the Kelvin-Helmholtz problem. Part 1. Hamiltonian structure. *Journal of Fluid Mechanics*, **333**: 301-325.
- Craig W, Sulem C. 1993. Numerical simulation of gravity waves. *Journal of Computational Physics*, **108**: 73-83.
- Guan X, Wang Z. 2022. Interfacial electrohydrodynamic solitary waves under horizontal electric fields. *Journal of Fluid Mechanics*, **940**: A15.
- Kuznetsov E A, Spector M D, Zakharov V E. 1993. Surface singularities of ideal fluid. *Physics Letters A*, **182**: 387-393.
- Melcher J R. 1963. *Field-coupled Surface Waves*. MIT Press.
- Melcher J R, Schwarz W J. 1968. Interfacial relaxation overstability in a tangential electric field. *Physics of Fluids*, **11**: 2604.
- Mohamed A A, El Shehawey E F. 1983. Nonlinear electrohydrodynamic Rayleigh-Taylor instability. part 1. A perpendicular field in the absence of surface charges. *Journal of Fluid Mechanics*, **129**: 473-494.
- Papageorgiou D T. 2019. Film flows in the presence of electric fields. *Annual Review of Fluid Mechanics*, **51**: 155-187.
- Taylor G I. 1964. Disintegration of water droplets in an electric field. *Proceedings of the Royal Society A*, **280**: 383-397.
- Wang Z, Wang Z, Yuan C X. 2022. Oceanic internal solitary waves in three-layer fluids of great depth. *Acta Mechanica Sinica*, **38**: 321473.
- Zubarev N M, Kochurin E A. 2013. Three-dimensional nonlinear waves at the interface between dielectric fluid in an external horizontal electric field. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, **54**: 212-217.

(责任编辑: 倪明玖)

Interfacial electrohydrodynamic waves under horizontal electric fields: Hamilton's principle and multi-scale modeling

WANG Zhan^{*}

Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China

School of Engineering Science, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China

Abstract This paper is concerned with the multi-scale modeling of interfacial waves between two dielectric fluids under a horizontal electric field. First, we give a detailed proof of the Hamilton principle for this system. Next, based on the Hamiltonian structure and the analytical property of the Dirichlet-Neumann operator, the kinetic energy and electric potential energy in the Hamiltonian are expanded into the form of convergent series, and the order of truncation is determined. Finally, the reduced model is obtained by calculating the variational derivatives of the approximate total energy after truncation. The above process provides a systematic method for establishing nonlinear multi-scale models. Taking the case of “deep upper layer and shallow lower layer” as an example, we describe the whole modeling process in detail. Furthermore, the nonlinear coherent structure in the newly proposed model is computed using the modified Petviashvili iterative method. The asymptotic technique developed in this paper differs from previous work. Its advantage is that the derived reduced models naturally retain the energy conservation property; at the same time, this paper also extends the previous results to the three-dimensional situation.

Keywords Hamiltonian, interfacial waves, electrohydrodynamics, multi-scale modeling



王展, 中国科学院力学研究所研究员, 中科院流固耦合系统力学重点实验室副主任。博士毕业于美国威斯康星大学麦迪逊分校, 此后在英国先后担任伦敦大学学院研究助理和巴斯大学讲师。长期从事水波动力学、地球物理流体力学、电磁流体力学、流固耦合等方向的基础研究。现任中国科学院力学研究所学术委员会副主任、中国力学学会环境力学专业委员会副主任委员、《力学进展》副主编、《Theoretical & Applied Mechanics Letters》编委等。

Received: 27 June 2022; accepted: 2 August 2022; online: 5 August 2022

* E-mail: zwang@imech.ac.cn

© 2022 *Advances in Mechanics*.