

可重构力学超材料的设计与波动特性研究<sup>1)</sup>肖伯雅<sup>\*,†</sup> 杨 洸<sup>\*,†</sup> 冯亚菲<sup>\*\*</sup> 刘 宇<sup>\*,†</sup> 徐文帅<sup>\*,†</sup> 陈 猛<sup>\*,†,2)</sup> 姜 恒<sup>\*,†,3)</sup>  
王育人<sup>\*,†</sup>

\* (中国科学院力学研究所微重力实验室, 北京 100190)

† (中国科学院大学工程科学学院, 北京 100049)

\*\* (中国人民解放军 92228 部队, 北京 100072)

**摘要** 力学超材料中的弯曲梁双稳态结构由于其主动调控性强且调控精度高等优点近年来受到广泛关注. 文章利用中心受压弯曲梁的不稳定性设计了六角型双稳态结构, 首先建立了等效弯曲梁模型, 基于梁变形微分方程及能量最低原理探明了结构双稳态特性的产生机理, 之后利用有限元数值计算研究了结构几何参数对其整体力学性能的影响, 分别得到了具备自恢复及双稳态性能的结构几何参数范围, 绘制了几何参数与力学性能之间的相图. 同时, 可重构结构的可控变形能力有助于调整整体的色散特性, 利用数值仿真研究了具备双稳态特性的结构在拉伸和压缩两种构型下的色散关系, 对比分析了不同结构几何参数及构型转变对结构产生的带隙位置及范围的影响, 之后对由不同构型单胞组成的周期性结构进行了频响分析来验证带隙计算的准确性. 通过六角型可重构结构的力学特性、色散特性研究及频响分析表明可以通过结构几何参数的设计实现对结构整体性能的主动调控, 为可逆向设计的弹性波超材料结构研究分析提供了一条可靠路径.

**关键词** 力学超材料, 双稳态, 色散, 带隙, 主动调控

中图分类号: O327 文献标识码: A doi: 10.6052/0459-1879-22-366

DESIGN AND WAVE PROPERTIES OF RECONFIGURABLE MECHANICAL METAMATERIALS<sup>1)</sup>Xiao Boya<sup>\*,†</sup> Yang Tao<sup>\*,†</sup> Feng Yafei<sup>\*\*</sup> Liu Yu<sup>\*,†</sup> Xu Wenshuai<sup>\*,†</sup> Chen Meng<sup>\*,†,2)</sup> Jiang Heng<sup>\*,†,3)</sup>  
Wang Yuren<sup>\*,†</sup>

\* (NML, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

† (School of Engineering Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

\*\* (Unit 92228, People's Liberation Army of China, Beijing 100072, China)

**Abstract** The bending beam bistable structure in mechanical metamaterials has attracted extensive attention in recent years due to its strong active control and high control accuracy. In this paper, a hexagonal bistable structure is designed by using the instability of the centrally compressed bending beam. Firstly, the equivalent bending beam model is established and the basic principle of the bistability of the structure is proved based on the differential equation of beam

2022-08-10 收稿, 2022-10-06 录用, 2022-10-07 网络版发表.

1) 国家自然科学基金项目(11972034, 11802213), 中国科学院战略重点研究项目(XDB2204301)和中国科学院青年创新促进会(2020018)资助.

2) 陈猛, 副研究员, 主要研究方向: 声学超材料、复合材料力学. E-mail: chenmeng@imech.ac.cn

3) 姜恒, 研究员, 主要研究方向: 智能结构与材料力学、先进水声材料. E-mail: hengjiang@imech.ac.cn

引用格式: 肖伯雅, 杨洸, 冯亚菲, 刘宇, 徐文帅, 陈猛, 姜恒, 王育人. 可重构力学超材料的设计与波动特性研究. 力学学报, 2022, 54(10): 2708-2716

Xiao Boya, Yang Tao, Feng Yafei, Liu Yu, Xu Wenshuai, Chen Meng, Jiang Heng, Wang Yuren. Design and wave properties of reconfigurable mechanical metamaterials. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2022, 54(10): 2708-2716

deformation and the principle of minimum energy. Then, the influence of structural geometric parameters on its mechanical properties is studied by finite element numerical calculation. The range of structural geometric parameters with self recovery and bistable properties is obtained respectively, and the phase diagram between geometric parameters and mechanical properties is drawn. At the same time, the controllable deformation ability of the reconfigurable structure helps to adjust the dispersion characteristics, numerical simulation is used to study the dispersion relationship of the structure with bistable characteristics under the two configurations of tension and compression, and the effects of different structural geometric parameters and configuration changes on the band gap position and range of the structure are compared and analyzed. After that, the frequency response analysis of the periodic structure composed of different configuration cells is carried out to verify the accuracy of the band gap calculation. In conclusion, the mechanical properties, dispersion properties and frequency response analysis of the hexagonal reconfigurable structure show that the overall performance of the structure can be actively controlled through the design of the geometric parameters of the structure, which provides a reliable path for the research and analysis of the elastic wave metamaterial structure with reversible design.

**Key words** mechanical metamaterials, bi-stable, dispersion, bandgap, active control

## 引言

力学超材料由于其超常的物理属性,如负泊松比<sup>[1-2]</sup>、剪切模量消隐<sup>[3]</sup>、负压缩性<sup>[4]</sup>、可调刚度<sup>[5-7]</sup>、轻质高强<sup>[8]</sup>等,结构往往具备良好的抗变形、耐疲劳或耐高压能力,在航空航天轻质高强结构<sup>[9-10]</sup>、隔振吸能结构<sup>[11-13]</sup>、深海耐压结构<sup>[14-15]</sup>等领域有着广泛的应用.其中具有可调刚度的可重构双稳态结构可以通过外加力场的方式主动调控整体结构的构型,这一独特属性给研究人员提供了极大的设计自由度,大大拓展了功能材料的设计空间,因此近年来双稳态结构受到科研人员的广泛关注.

弯曲梁模型作为典型的双稳态结构于 2004 年由 Qiu 等<sup>[16]</sup>提出,利用深反应离子刻蚀 (DRIE) 制备了微米级的双稳梁,进行了试验和仿真计算,其测试结果与仿真结果基本一致.起初双稳态梁结构主要应用于微机电系统 (MEMS), Wu 等<sup>[17]</sup>利用双稳态梁结构设计制造出了微悬臂致动器,可以应用于低功率双稳态继电器中. Huang 等<sup>[18]</sup>通过双稳态梁结构与杠杆结构组成的双稳态装置,用来制作微机电系统中具有双稳性和推入推拉功能的设备.后续科研人员对双稳态梁结构也进行了力学方面的研究, Yang 等<sup>[19]</sup>利用热塑性聚氨酯弹性体橡胶 (TPU) 成功制备了弯曲梁双稳态结构,研究了结构几何参数对整体力学性能的影响.之后 Darwish 等<sup>[20]</sup>将钢板作为骨架,用尼龙材料制备了弯曲梁可重构结构,研究了多成分材料结构稳态转变过程中的力学特

性. Zhang 等<sup>[21]</sup>用 PLA 材料作为骨架,将 0.1 mm 厚的钢板加工成弯曲梁结构,两者合成的新型多稳态结构相比于之前的同类结构多了倾斜的稳态构型. Hua 等<sup>[22]</sup>研究了弯曲梁结构在隔振和吸能方面的性能,发现当拱高与曲梁厚度之比为 3.6 时结构具备最优的隔振吸能性能. Chen 等<sup>[23]</sup>利用弯曲梁结构设计出了多层圆环式的双稳态结构,系统研究了几何参数对稳定状态的影响,提出了三层超材料结构实现多稳态功能的有效方法. Yang 等<sup>[24]</sup>设计制造了可编程的周期性排列一维多稳态圆柱结构,可以实现稳定且可重复使用的构型转变.

同时,带隙可主动调控的结构一直都是科研人员关注的热点,而弯曲梁双稳态模型的出现为主动调控提供了一条新途径,在此之前实现主动调控的方式普遍都是通过外加各种物理场的形式来改变特殊胞元材料的密度和模量来实现的. Chen 等<sup>[25]</sup>提出了基于压电材料以及电流变弹性体的主动弹性超材料,同时进行了理论分析和数值验证,可以用来设计目标带隙结构以及特殊的波导装置. Xia 等<sup>[26]</sup>利用声学传输线法 (ATLM) 研究了温度对声学超材料产生带隙的影响,结果发现温度变化对结构的色散特性具有显著影响,为主动控制声学超材料的设计提供了新的方法. Zhang 等<sup>[27]</sup>通过在环氧树脂杆上周期地布置含有负电容的压电分流单元,构造了压电声子晶体杆结构,通过理论和仿真计算证明通过改变不同谐振频率的压电分流单元的个数,获得多

个局域共振带隙,增强带隙可调谐性.在弯曲梁双稳态结构提出之后,大量的研究集中在构型转变对结构色散特性的影响上.Meaud等<sup>[28]</sup>研究了弯曲梁双稳态结构不同构型下的色散关系,仿真结果表明两种构型下结构的色散特性发生了改变,该结构可以应用于声学开关.Tan等<sup>[29]</sup>提出了一种基于屈曲的可编程负刚度超材料,通过横向约束实现了结构构型的转变,结果表明稳态转换可以调控弹性波的传播,并指出在主动调控声学超材料方面引入形状记忆材料值得尝试.Liu等<sup>[30]</sup>研究了周期性双稳态结构的非线性弹性响应,特别是冲击波响应方面,结果表明结构一定程度上可以衰减冲击波的强度,可以用于精密设备的保护.Hu等<sup>[31]</sup>利用形状记忆材料(SMP)制备了弯曲梁双稳态结构,结构无需外加物理场的激发就可以实现构型的自主转变,同时系统地研究了模型的色散关系.针对不同构型的弯曲梁双稳态结构色散特性研究基本都局限于二维的平面构型之中,而二维的可重构结构在外力驱动调控之下由于其端部缺乏约束以及平面厚度较窄等因素,结构往往会发生横向变形和面内弯曲,导致达不到稳态转变的变形要求.Hua等<sup>[32]</sup>设计出了圆柱式的空间多稳态结构,探讨了多稳态结构作为吸能结构的应用前景并研究了了几何参数对结构吸能性能的影响.Giri等<sup>[33]</sup>也对圆柱式多稳态结构进行了研究,主要分析了多层可重构结构中单层几何参数的设置对整体构型转变顺序的影响,同时也对其吸能性能进行了对比.圆柱式空间可重构结构的提出解决了以往二维平面可重构结构容易产生多余变形的问题,周期性排列的平面可重构结构可以相互为对方提供端部约束.但是针对三维空间构型的可重构结构的研究集中在其力学性能方面,特别是结构的吸能性能,而对其色散特性的研究工作进行得很少.

因此,本文设计了基于弯曲梁结构的六角空间可重构模型,研究其构型转变过程中的力学特性以及不同构型形式下的色散特性.第一节构建中心受压直梁模型,从理论出发探明可重构结构构型转变的机理,并设计了六角的空间可重构结构;第二节介绍了标准拉伸试验以及结构力学性能及声学性能方面的仿真计算,并进行了相应的讨论分析;第三节总结本文的研究成果.本工作采用数值仿真方法,研究了六角空间双稳态结构的力学特性与色散特性,以期后续的进一步研究提供参考数据.

## 1 理论分析及结构设计

### 1.1 双稳态机制研究

基于弯曲梁可重构机制进行理论分析,建立中心受压、两端固定的弯曲梁模型,探明稳态转变的内在机理,弯曲梁模型如图1所示.

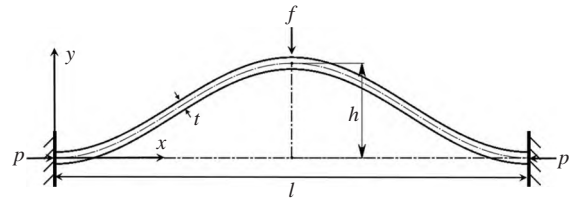


图1 双稳态屈曲梁模型

Fig. 1 Bistable buckling beam model

梁的基本微分方程为

$$EIw^{(4)} + pw^{(2)} = 0 \quad (1)$$

式中,  $E$  为材料的杨氏模量,  $I = bt^3/12$  为梁的横截面惯性矩,  $w$  为梁的挠度,  $p$  为梁的轴向力. 其满足的几何条件为

$$w(0) = w(l) = w'(0) = w'(l) = 0 \quad (2)$$

其通解为

$$w = A \sin(nx) + B \cos(nx) + Cx + D \quad (3)$$

最终求得挠曲线方程的两类解. 第一类为

$$\left. \begin{aligned} w_i(x) &= c[1 - \cos(n_i x)] \\ n_i l &= (i+1)\pi, \quad i = 1, 3, 5, \dots \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

第二类为

$$\left. \begin{aligned} w_i(x) &= c \left[ 1 - \cos(n_i x) - \frac{2x}{l} + \frac{2 \sin(n_i x)}{n_i l} \right] \\ n_i l &= 2.86\pi, 4.92\pi, 6.94\pi, \dots, \quad i = 2, 4, 6, \dots \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式中  $c$  为待定常数.

曲梁的初始形状为

$$\bar{w}(x) = \frac{h}{2} \left[ 1 - \cos\left(2\pi \frac{x}{l}\right) \right] \quad (6)$$

变形过程中轴向变形为  $d_p$ , 则变形过程中曲梁的真实长度为

$$s = \int_0^l \sqrt{1 + [w'(x)]^2} dx \quad (7)$$

曲梁在受到力  $f$  作用变形时, 挠曲线可表示为式(4)和式(5)中解的叠加, 即

$$w(x) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i w_i(x) \tag{8}$$

式中,  $A_i$  为叠加各项的系数, 曲梁中点的位移  $d$  可表示为

$$d = \bar{w}\left(\frac{l}{2}\right) - w\left(\frac{l}{2}\right) = h - w\left(\frac{l}{2}\right) \tag{9}$$

根据胡克定律, 轴向力为

$$p = Ebt \left[ 1 - \frac{s}{(s)_{w=\bar{w}}} \right] \tag{10}$$

曲梁的轴向变形为  $d_p$ , 在变形过程中由于轴向力压缩产生的压缩应变能为

$$U_s = pd_p \tag{11}$$

由于弯曲产生的应变能为

$$U_b = \frac{EI}{2} \int_0^L \left( \frac{d^2 \bar{w}}{dx^2} - \frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx \tag{12}$$

由外力  $f$  做功引起的势能变化为

$$U_f = -fd \tag{13}$$

系统的总能量表达式为

$$U_t = U_b + U_s + U_f \tag{14}$$

令  $\partial U_t = 0$ , 由  $\partial(A_i)|_{i=1,5,9,\dots} = 0$  解得各项的系数  $A_i$

$$A_i = \begin{cases} \frac{-n_1^2 h}{2(n^2 - n_1^2)} + \frac{4f}{Eln_1^2(n^2 - n_1^2)}, & i = 1 \\ \frac{4f}{Eln_i^2(n^2 - n_i^2)}, & i = 5, 9, 13, 17, 21, \dots \end{cases} \tag{15}$$

当  $i = 2, 3, 4, 6, 7, \dots$  时, 有

$$A_i = \begin{cases} 0, & n^2 < n_i^2 \\ \text{must be constrained,} & n^2 > n_i^2 \\ \text{take any value,} & n^2 = n_i^2 \end{cases} \tag{16}$$

在变形过程中轴向力只能连续变化, 因此第一种形式的力-位移关系是

$$\left. \begin{aligned} f &= f_1 \\ p &< \begin{cases} Eln_3^2, & \text{with second mode constrained} \\ Eln_2^2, & \text{with second mode not constrained} \end{cases} \\ A_i &= 0 \\ &(i = 2, 3, 4, 6, 7, 8, \dots) \end{aligned} \right\} \tag{17}$$

由于梁的变形主要取决于前三阶屈曲模式, 联立式

(9)、式 (15) 和式 (17) 并忽略高阶模态 (即  $A_i$  取 0), 解得

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= \frac{\pi^4 EId}{2\beta^3 t^2} [3(d-h)(d-2h) + 4t^2] \\ f_2 &= \frac{\pi^4 EId}{\beta^3} \left( 4.09 - 2.09 \frac{d}{h} \right) \\ f_3 &= \frac{\pi^4 EId}{\beta^3} \left( 8 - 6 \frac{d}{h} \right) \end{aligned} \right\} \tag{18}$$

定义拱高厚度比  $Q = h/t$ , 当  $Q$  取值不同时, 力-位移曲线也会发生相应变化, 如图 2 所示。

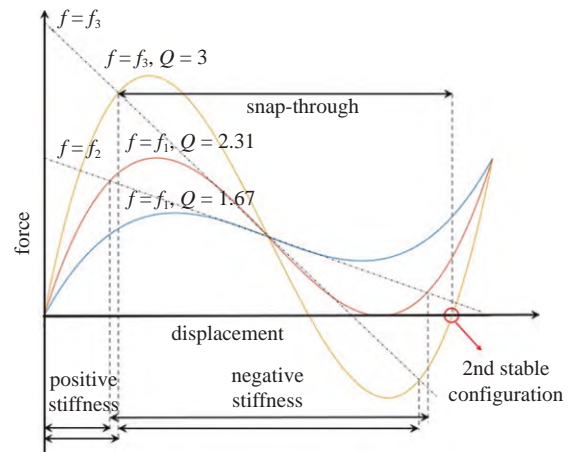


图 2 弯曲梁的不同力-位移特性  
Fig. 2 Different force-displacement behaviors

由力-位移曲线图可以看出, 当  $Q$  达到第二阶屈曲变形的临界值 2.31 时, 力-位移曲线此时正好与  $x$  轴相切,  $Q$  大于 2.31 的情况下, 梁的变形情况由第三阶屈曲模式决定, 比如  $Q = 3$  时, 变形过程力出现负值, 表明结构此时已经具备了双稳态特性. 在发生由第二阶屈曲模式和第三阶屈曲模式所决定的变形过程中结构具备明显的正刚度阶段以及负刚度阶段, 特别是在  $Q = 3$  的情况下, 其负刚度阶段即为结构发生突弹跳变 (snap-through) 的过程, 在图 2 中红圈标注处, 当结构力值再次为 0 时, 此时结构的势能达到另一个极低点, 意味着结构此时转变为另一个稳定的构型。

### 1.2 六角型模式转换结构设计

外力作用下单个二维的可重构结构在变形的过程中往往会发生面内弯曲, 而且最大承载力也比较小, 这些问题限制了模式转换功能性材料的应用范围. 因此, 为了保证整体结构变形的稳定性, 提高结构的承载峰值力, 基于二维的可重构结构单胞设计了六角型的模式转换结构, 结构的具体几何参数如



图3(a)所示, 曲梁的跨长为 $l$ , 拱高为 $h$ , 自身厚度为 $t$ , 上下框架结构的宽度均为 $a$ , 结构整体厚度为 $b$ , 通过 SolidWorks 得到的整体架构如图3(b)所示。

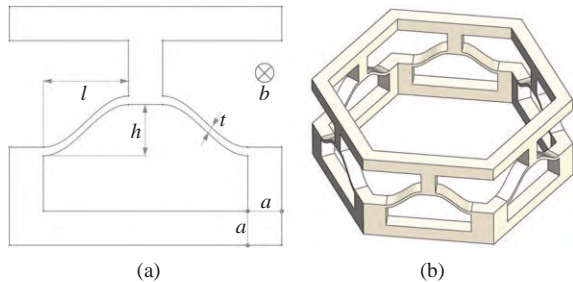


图3 六角型结构示意图  
Fig. 3 Hexagonal structure

## 2 标准拉伸试验与数值仿真

### 2.1 标准拉伸试验

选用万华化学公司热塑性聚氨酯弹性体橡胶 (TPU) 作为制备双稳态结构的打印材料。TPU 材料的弹性模量可以通过单轴拉伸实验测得, 参考 GB/T 528—2009 设计了单轴拉伸试件, 试件的几何尺寸如图4所示。

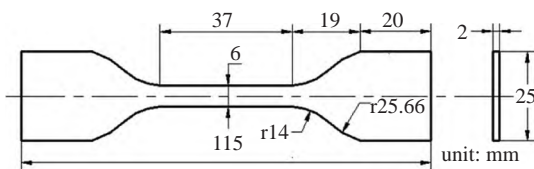


图4 基于 GB/T 528—2009 的拉伸试样的尺寸  
Fig. 4 Dimensions of tensile specimen based on GB/T 528—2009

为获得材料的力学参数进行了标准拉伸试验, 拉伸的速度设为 20 mm/min, 采用引伸计记录单轴拉伸过程中标定段的位移, 最终测得试样的平均弹性模量为 145.2 MPa, 泊松比为 0.46。图5为测试照片。

### 2.2 结构力学性能数值仿真分析

通过双稳态机制的理论分析得知: 弯曲梁单胞的几何参数 (弯曲梁的厚度 $t$ 、拱高 $h$ ) 对结构的力学性能起着决定性作用, 为探明六角型结构几何参数对其整体力学性能的影响, 采用控制变量方法, 设定 $t = 1$  mm,  $b = 4$  mm,  $l = 10$  mm,  $h$  从 2 mm 到 9 mm, 步长为 1;  $a$  为 1 mm 到 5 mm, 步长为 0.5。利用 ABAQUS/Explicit 研究不同几何参数下结构变形过程中的力学行为。仿真过程中通过在模型上表面耦合点施加位移载荷的方式实现整体结构的变形,

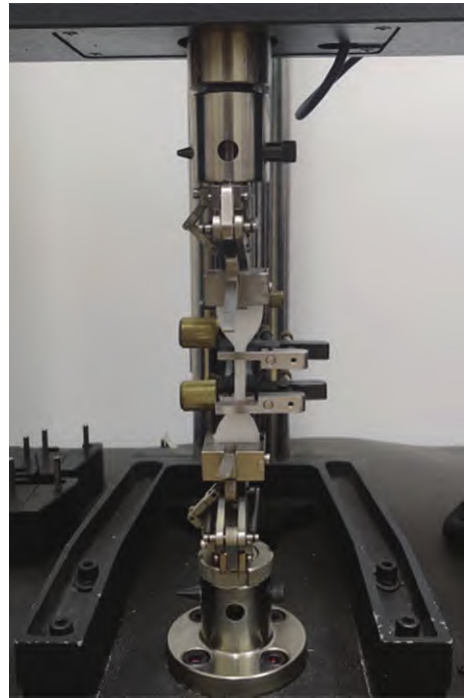


图5 标准拉伸测试  
Fig. 5 Standard tensile test

同时在模型底部施加固定约束 (如图6所示)。依照标准拉伸测试测得数据, 采用 neo-Hookean 超弹性模型对材料本构进行拟合, 网格划分选用 8 节点线性减缩积分实体单元 (C3D8R)。

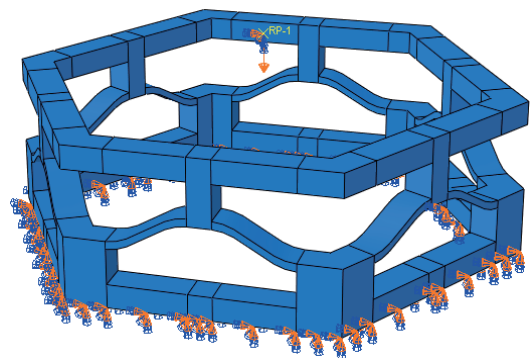


图6 ABAQUS 仿真示意图  
Fig. 6 ABAQUS simulation schematic diagram

对不同几何参数六角型结构进行系统化的仿真分析, 得到了两者之间对应关系的相图 (图7)。

结果显示当曲梁自身宽度 $t$ 固定为 1 mm, 跨长 $l$ 固定为 10 mm, 其拱高 $h$ 与曲梁跨度 $l$ 比值比较小如 0.2 时, 随着下压位移的增加结构呈现出负刚度特性, 但作用力始终为正值, 说明结构此时具备自恢复特性; 而当两者比值达到 0.3 后, 随着下压位移的增加结构也呈现出负刚度特性, 不同的是作用力出现

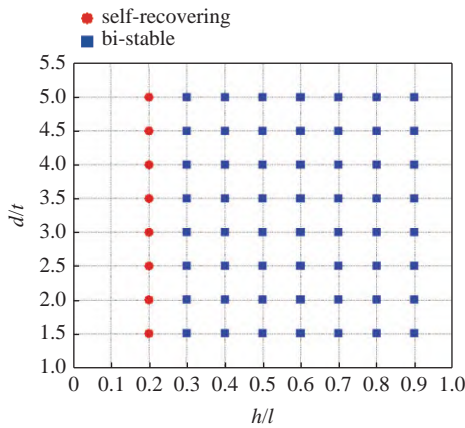


图 7 几何参数与力学性能相图

Fig. 7 Phase diagram of geometric parameters and mechanical properties

了负值的情况, 说明结构具备双稳态特性. 通过几何参数与力学性能之间关系的研究分析, 可以根据目标性能设计出构型合理的可重构超材料结构.

### 2.3 结构色散关系数值仿真分析

通过上述力学性能数值仿真分析得知具备双稳态特性的结构可以实现可控变形的能力, 图 8 展示了六角型空间结构的构型转变行为, 而其构型的改变会导致色散特性出现变化, 为了研究构型改变对色散特性的具体影响情况, 利用有限元数值仿真对双稳态结构进行了色散关系分析, 在上下表面施加 floquet 周期性边界条件, 对结构竖直方向 ( $z$  方向) 色散特性进行数值计算, 得到不同构型下结构的色散曲线. 图 9 和图 10 分别给出了  $a = 2 \text{ mm}$ ,  $h = 4 \text{ mm}$  情况下拉伸和压缩两种构型下的色散关系曲线.

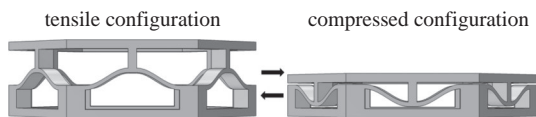


图 8 几何构型转变

Fig. 8 The geometric configuration switching

结果显示在拉伸构型下结构在计算频率范围内形成了两个完全带隙, 分别位于 1224.29~1740.16 Hz, 1794.16~1842.44 Hz. 其中第一带隙位于第六支与第七支色散曲线之间, 第二带隙位于第七支与第八支色散曲线之间. 而压缩构型下在计算频率范围内则产生了三个带隙, 分别位于 1087.22~1603.46 Hz, 1745.19~1846.91 Hz 和 1850.53~2047.68 Hz. 其中第一带隙介于第六支与第七支色散曲线之间, 第二带隙介于第七支与第八支色散曲线之间, 第三带隙介

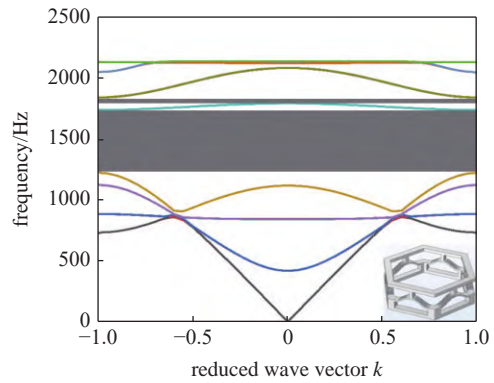


图 9 拉伸构型下的色散关系曲线

Fig. 9 Dispersion relationship curve in stretched configuration

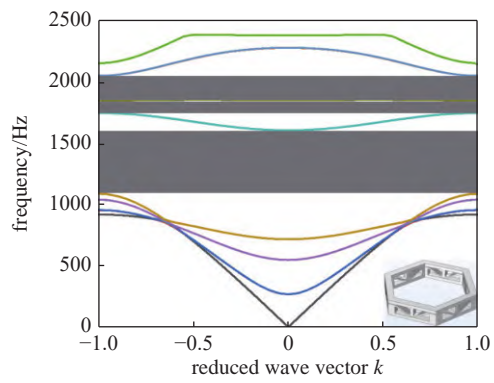


图 10 压缩构型下的色散关系曲线

Fig. 10 Dispersion relationship curve in compressed configuration

于第九支与第十支色散曲线之间. 可以看出结构构型从拉伸转变为压缩的过程中, 结构的第一带隙向低频方向移动, 压缩构型下的第二带隙相比于拉伸情况下禁带频率范围有所增加, 另外由于构型的转变导致结构的晶格常数发生了变化, 从而改变了其色散模式, 在压缩构型的情况下产生了新的第三带隙.

仿真结果初步说明可以通过结构构型的调整来改变结构的波动特性, 实现对波的主动控制. 此外拉伸构型下两个带隙中心频率对应的波长分别为 0.282 m, 0.198 m. 而拉伸构型下晶格尺寸为 0.018 m, 说明结构可以在亚波长尺度下形成带隙, 可以推断出这些带隙是由局域共振机制引起的. 为了进一步验证六角型双稳态结构的带隙形成机制, 对其截至频率处的振动模态进行了研究分析, 如图 11 所示, 从左至右依次给出了拉伸构型下两个带隙截至频率处的振动模态图, 可以看出在第一带隙的振动模态主要表现为上下质量块的振动, 而在第二带隙的振动模态图中可以看到框架结构保持静止而单胞的中间连接部分在振动, 结合之前对中心频率处波长的

计算数据可以判定拉伸构型下的第一带隙是由于上下框架结构作为质量块振动引起的局域共振,而第二带隙则是由于弯曲梁部分振动引起的局域共振.

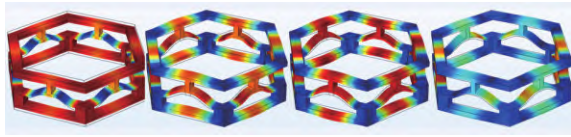


图 11 模态振型  
Fig. 11 Modal diagram

同时构建了两种构型的动力学特性分析模型以进行频率响应 (frequency response) 计算,如图 12 所示两者的动力学特性分析模型均为单胞沿  $z$  轴周期性排布形成的,阵列数量为 10. 将模型中底部单胞下表面的边界定义为激励位置,施加沿  $z$  轴正向的指定加速度,加速度数值为  $0.1 \text{ mm/s}^2$ ,并在此边界定义积分条件作为频响计算的初始值. 同样将模型端部第一个单胞的下表面作为响应位置,定义积分条件作为频响计算的响应值.

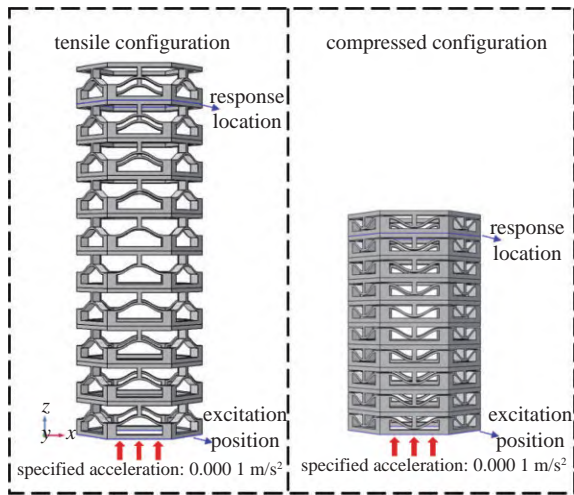


图 12 色散特性分析模型  
Fig. 12 Dispersion characteristic analysis model

得到的结果如图 13 所示,频响计算更为直观地展现了结构构型改变对自身色散特性带来的变化,从拉伸构型到压缩构型的转变过程中,带隙是朝着低频方向移动的.

另外,对其他不同几何参数的结构也进行了相应的带隙计算分析,通过柱状图的形式展示了带隙随着几何参数的变化情况,如图 14~图 17 所示.

图 14 为  $t = 1 \text{ mm}$ ,  $a = 5 \text{ mm}$ ,  $l = 10 \text{ mm}$  情况下,结构在拉伸构型下产生的带隙随着拱高  $h$  的变化示意图,在  $h = 4 \text{ mm}$  即  $h/l = 0.4$  时结构产生了四个带

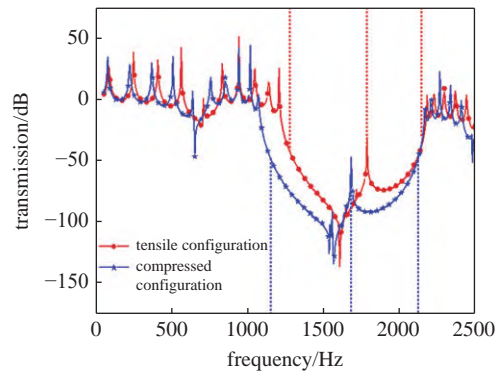


图 13 频响曲线  
Fig. 13 Frequency response curve

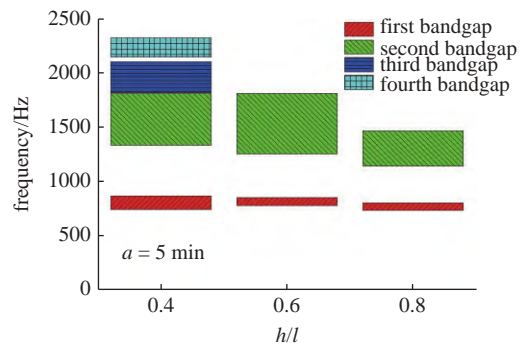


图 14 拉伸构型下带隙变化柱状图  
Fig. 14 Histogram of band gap change in tensile configuration

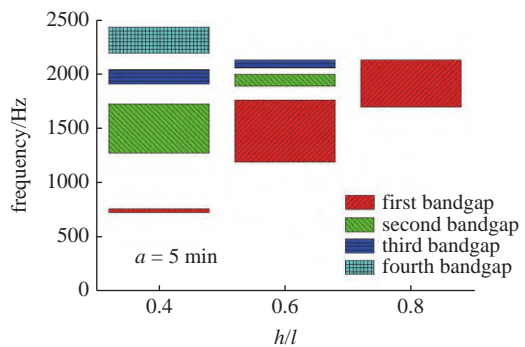


图 15 压缩构型下带隙变化柱状图  
Fig. 15 Histogram of band gap change in compressed configuration

隙,分别位于  $744.86 \sim 867.38 \text{ Hz}$ ,  $1336.86 \sim 1815.21 \text{ Hz}$ ,  $1820.92 \sim 2106.35 \text{ Hz}$  以及  $2148.52 \sim 2325.64 \text{ Hz}$  处;当  $h$  为  $6 \text{ mm}$  即  $h/l = 0.6$  时,结构仅产生了两个带隙,分别位于  $777.95 \sim 852.12 \text{ Hz}$ ,  $1255.36 \sim 1814.53 \text{ Hz}$  处;当  $h$  为  $8 \text{ mm}$  即  $h/l$  为  $0.8$  时,结构产生了两个带隙,位于  $735.93 \sim 803.74 \text{ Hz}$ ,  $1145.05 \sim 1468.66 \text{ Hz}$  处.可以看出在拉伸构型下,随着拱高  $h$  的增加,结构的带隙总体是朝着低频移动的,而且  $h$  为  $4 \text{ mm}$  时结构在  $1800 \text{ Hz}$  之上产生的两个带隙随着  $h$  的增加消失了.图 15 为  $t = 1 \text{ mm}$ ,  $a = 5 \text{ mm}$ ,  $l = 10 \text{ mm}$  情况



下, 结构在压缩构型下产生的带隙随着拱高  $h$  的变化示意图, 可以看出随着拱高  $h$  的增加, 带隙数量逐渐减少, 当  $h$  为 8 mm 时结构仅产生了一个带隙。

图 16 给出了  $t = 1$  mm,  $h = 6$  mm,  $l = 10$  mm 的情况下, 结构在拉伸构型下产生的带隙随着框架宽度  $a$  的变化示意图。当  $a$  为 2 mm 即  $a/t = 2$  时结构产生了一个带隙, 位于 1254.93~1665.67 Hz 处; 当  $a$  为 3 mm 即  $a/t = 3$  时结构也产生了一个带隙, 位于 1216.04~1772.81 Hz 处; 当  $a$  为 4 mm 即  $a/t = 4$  时结构产生的带隙位于 1270.88~1836.05 Hz 处; 当  $a$  为 5 mm 即  $a/t = 5$  时结构产生了两个带隙, 其中第一带隙位于 777.95~852.12 Hz, 第二带隙位于 1255.36~1814.53 Hz 处。总体来看框架宽度对结构的带隙的影响作用甚微, 除了在  $a = 5$  mm 的情况下产生了一个新带隙之外, 其他情况下带隙的位置和带宽变换均不大。图 17 给出了  $t = 1$  mm,  $h = 6$  mm,  $l = 10$  mm 的情况下, 结构在压缩构型下产生的带隙随着框架宽度  $a$  的变化示意图。可以看出与拉伸构型相同, 框架宽度  $a$  对结构带隙的影响不大, 随着  $a$  的持续增加, 带隙总体是朝着高频移动的, 但移动幅度也很有限。

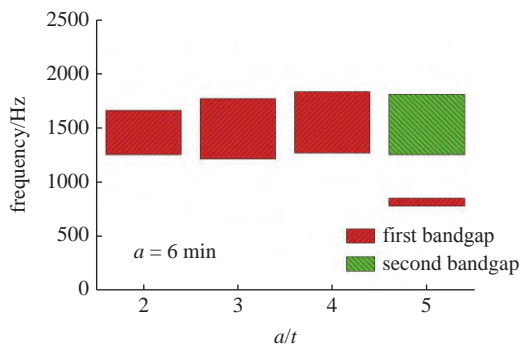


图 16 拉伸构型下带隙变化柱状图

Fig. 16 Histogram of band gap change in tensile configuration

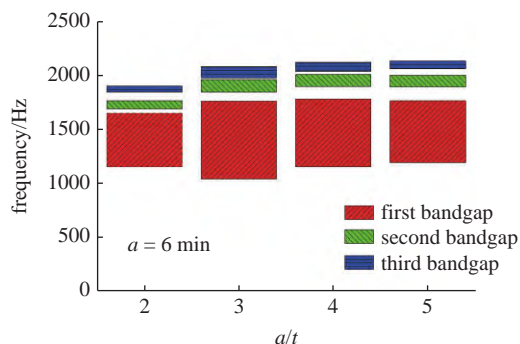


图 17 压缩构型下带隙变化柱状图

Fig. 17 Histogram of band gap change in compressed configuration

结构构型转换及几何参数的变化对色散关系产生的影响证明, 可以通过改变具备双稳态特性结构的构型来主动调控波的传输特性, 另一方面也可以根据目的带隙来逆向设计合理几何参数的双稳态结构。

### 3 结论

本文基于弯曲梁双稳态结构设计了六角型可重构结构, 并利用有限元数值仿真进行了力学性能与色散特性分析。首先研究了六角型可重构结构几何参数对其整体力学性能的影响, 得到了具备自恢复、双稳态特性的具体结构几何参数; 之后在具备双稳态特性结构的基础上进行了两种构型下的色散关系分析, 研究构型变化对结构色散关系的影响并进行了相应的频率响应计算。得到的结论可以总结如下。

(1) 通过研究几何参数对结构力学性能的影响, 得到了具备不同力学性能的结构几何参数, 在弯曲梁自身宽度  $t$  为 1 mm 且跨度  $l$  为 10 mm 的基础上, 当  $h/l$  大于等于 0.3 时即  $h$  取值大于等于 3 mm 时结构即呈现双稳态特性, 而  $h$  取值为 2 mm 时结构则呈现自恢复特性。

(2) 具备双稳态特性的结构在两种构型下的色散曲线发生明显变化, 在  $t = 1$  mm,  $a = 2$  mm,  $h = 4$  mm,  $l = 10$  mm 的情况下, 其压缩构型下的带隙相比于拉伸构型下, 具备明显的朝向低频移动趋势。两种构型几何特征的改变导致其晶格常数出现差异, 进而影响到结构整体的色散特性, 导致带隙的位置、范围以及数量均发生变化。

(3) 通过对六角型可重构结构力学性能和色散特性的分析, 初步证明可以通过调整结构的几何参数实现对整体力学性能的主动设计和色散特性的主动调控, 可以根据应用需求设计合适的结构构型。

### 参 考 文 献

- 1 吴文旺, 肖登宝, 孟嘉旭等. 负泊松比结构力学设计、抗冲击性能及在车辆工程应用与展望. 力学学报, 2021, 53(3): 611-638 (Wu Wenwang, Xiao Dengbao, Meng Jiayu, et al. Mechanical design, impact energy absorption and applications of auxetic structures in automobile lightweight engineering. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2021, 53(3): 611-638 (in Chinese))
- 2 Babae S, Shim J, Weaver JC, et al. 3D soft metamaterials with negative Poisson's ratio. *Advanced Materials*, 2013, 25(36): 5044-5049
- 3 Bückmann T, Thiel M, Kadic M, et al. An elasto-mechanical un-



- feelability cloak made of pentamode metamaterials. *Nature Communications*, 2014, 5(1): 1-6
- 4 Nicolaou ZG, Motter AE. Mechanical metamaterials with negative compressibility transitions. *Nature Materials*, 2012, 11(7): 608-613
- 5 邱海, 方虹斌, 徐鉴. 多稳态串联折纸结构的非线性动力学特性. *力学学报*, 2019, 51(4): 1110-1121 (Qiu Hai, Fang Hongbin, Xu Jian. Nonlinear dynamical characteristics of a multi-stable series origami structure. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2019, 51(4): 1110-1121 (in Chinese))
- 6 Rafsanjani A, Bertoldi K, Studart AR. Programming soft robots with flexible mechanical metamaterials. *Science Robotics*, 2019, 4(29): eaav7874
- 7 Bodaghi M, Liao WH. 4D printed tunable mechanical metamaterials with shape memory operations. *Smart Materials and Structures*, 2019, 28(4): 045019
- 8 Lee JH, Singer JP, Thomas EL. Micro-/nanostructured mechanical metamaterials. *Advanced Materials*, 2012, 24(36): 4782-4810
- 9 Pontecorvo ME, Barbarino S, Murray GJ, et al. Bistable arches for morphing applications. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 2013, 24(3): 274-286
- 10 Boston DM, Phillips FR, Henry TC, et al. Spanwise wing morphing using multistable cellular metastructures. *Extreme Mechanics Letters*, 2022, 53: 101706
- 11 Qin HX, Yang DQ. Vibration reduction design method of metamaterials with negative Poisson's ratio. *Journal of Materials Science*, 2019, 54(22): 14038-14054
- 12 Liu K, Han L, Hu W, et al. 4D printed zero Poisson's ratio metamaterial with switching function of mechanical and vibration isolation performance. *Materials & Design*, 2020, 196: 109153
- 13 Benichou I, Givli S. Force-sensitive metamaterials for vibration mitigation and mechanical protection. *Extreme Mechanics Letters*, 2020, 40: 100932
- 14 Ye C, Wang YQ. Nonlinear forced vibration of functionally graded graphene platelet-reinforced metal foam cylindrical shells: internal resonances. *Nonlinear Dynamics*, 2021, 104(3): 2051-2069
- 15 Li Q, Yang D, Mao X. Pressure-resistant cylindrical shell structures comprising graded hybrid zero Poisson's ratio metamaterials with designated band gap characteristics. *Marine Structures*, 2022, 84: 103221
- 16 Qiu J, Lang JH, Slocum AH. A curved-beam bistable mechanism. *Journal of Microelectromechanical Systems*, 2004, 13(2): 137-146
- 17 Wu Y, Ding G, Zhang C, et al. Design and implementation of a bistable microcantilever actuator for magnetostatic latching relay. *Microelectronics Journal*, 2010, 41(6): 325-330
- 18 Huang HW, Lee FW, Yang YJJ. Design criteria for a push-on push-off MEMS bistable device. *Journal of Microelectromechanical Systems*, 2016, 25(5): 900-908
- 19 Yang H, Ma L. Multi-stable mechanical metamaterials by elastic buckling instability. *Journal of Materials Science*, 2019, 54(4): 3509-3526
- 20 Darwish Y, ElGawady M. Analysis of metamaterial bi-stable elements as energy dissipation systems. *Bridge Structures*, 2019, 15(4): 151-159
- 21 Zhang Y, Wang Q, Tichem M, et al. Design and characterization of multi-stable mechanical metastructures with level and tilted stable configurations. *Extreme Mechanics Letters*, 2020, 34: 100593
- 22 Hua J, Lei H, Gao CF, et al. Parameters analysis and optimization of a typical multistable mechanical metamaterial. *Extreme Mechanics Letters*, 2020, 35: 100640
- 23 Chen B, Chen L, Du B, et al. Novel multifunctional negative stiffness mechanical metamaterial structure: Tailored functions of multistable and compressive mono-stable. *Composites Part B: Engineering*, 2021, 204: 108501
- 24 Yang H, Ma L. 1D and 2D snapping mechanical metamaterials with cylindrical topology. *International Journal of Solids and Structures*, 2020, 204: 220-232
- 25 Chen YY, Huang GL. Active elastic metamaterials for sub-wavelength wave propagation control. *Acta Mechanica Sinica*, 2015, 31(3): 349-363
- 26 Xia B, Chen N, Xie L, et al. Temperature-controlled tunable acoustic metamaterial with active band gap and negative bulk modulus. *Applied Acoustics*, 2016, 112: 1-9
- 27 张亚茹, 郭辉, 袁涛等. 压电分流声子晶体杆带隙调控研究. *压电与声光*, 2020, 42(6): 772-776 (Zhang Yaru, Guo Hui, Yuan Tao, et al. Study on band gap regulation of phononic crystal rod with piezoelectric shunting. *Piezoelectrics & Acousto-optics*, 2020, 42(6): 772-776 (in Chinese))
- 28 Meaud J, Che K. Tuning elastic wave propagation in multistable architected materials. *International Journal of Solids and Structures*, 2017, 122: 69-80
- 29 Tan X, Wang B, Yao Y, et al. Programmable buckling-based negative stiffness metamaterial. *Materials Letters*, 2020, 262: 127072
- 30 Liu E, Fang X, Wen J. Harmonic and shock wave propagation in bistable periodic structure: regularity, randomness, and tenability. *Journal of Vibration and Control*, 2021, doi: 10.1177/10775463211031060
- 31 Hu W, Ren Z, Wan Z, et al. Deformation behavior and band gap switching function of 4 D printed multi-stable metamaterials. *Materials & Design*, 2021, 200: 109481
- 32 Hua J, Lei H, Zhang Z, et al. Multistable cylindrical mechanical metastructures: Theoretical and experimental studies. *Journal of Applied Mechanics*, 2019, 86(7): 071007
- 33 Giri TR, Mailen R. Controlled snapping sequence and energy absorption in multistable mechanical metamaterial cylinders. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2021, 204: 106541