

轮对非线性动力学系统蛇行运动的解析解¹⁾史禾慕^{*,†} 曾晓辉^{*,†,**,2)} 吴 晗^{*,†}^{*}(中国科学院力学研究所流固耦合系统力学重点实验室, 北京 100190)[†](中国科学院大学工程科学学院, 北京 100049)^{**}(大连理工大学海岸和近海工程国家重点实验室, 辽宁大连 116024)

摘要 在对铁路车辆系统的极限环幅值和非线性临界速度进行分析时通常采用数值方法, 不便于研究其随系统参数的变化规律. 轮对系统保留了影响车辆系统动力学性能的几个关键要素: 如轮轨几何非线性约束、轮轨接触蠕滑关系和悬挂系统等, 可以反映铁路车辆系统蛇行运动的本质特性. 轮对系统自由度少、参数少, 可以采用解析方法进行分析. 本文选取合适的特征量把轮对非线性动力学方程无量纲化, 得到了带有小参数的两自由度微分方程; 采用多尺度方法对方程进行了解析求解; 给出了轮对系统极限环幅值的解析表达式并对其稳定性进行了判定; 给出了轮对系统的分岔速度解析表达式, 并进而获得系统的非线性临界速度的解析表达式. 在对得到的解析解用数值结果进行验证后, 用得到的解析解进行了系统参数影响分析. 传统的分岔图计算方法(如降速法、路径跟踪法等)需对微分方程进行大量数值积分计算方可求解系统的非线性临界速度值, 而通过本文获得的解析表达式可直接给出系统的非线性临界速度值和极限环幅值, 便于研究轮对系统动力学特性随参数的变化规律, 进行快速方案比对和筛选, 为转向架结构优化设计提供参考.

关键词 轮对动力学, 多尺度法, 解析解, 极限环, 非线性临界速度

中图分类号: U270.1⁺¹ 文献标识码: A doi: 10.6052/0459-1879-22-003

ANALYTICAL SOLUTION OF THE HUNTING MOTION OF A WHEELSET
NONLINEAR DYNAMICAL SYSTEM¹⁾Shi Hemu^{*,†} Zeng Xiaohui^{*,†,**,2)} Wu Han^{*,†}^{*}(Key Laboratory for Mechanics in Fluid Solid Coupling Systems, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)[†](School of Engineering Science, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)^{**}(State Key Laboratory of Coastal and Offshore Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, Liaoning, China)

Abstract Numerical methods are usually used to analyze the amplitude of limit cycle and nonlinear critical speed of railway vehicle system, which is inconvenient to study the rule of variation with vehicle system parameters. The wheelset system retains several critical elements that affect the dynamic performance of the railway vehicle system, such as the geometric nonlinear constraints of the wheel-rail, the wheel-rail contact creep relationship, and the suspension system, which can reflect the essential characteristics of the hunting motion of the railway vehicle system. The wheelset system

2021-12-30 收稿, 2022-03-02 录用, 2022-03-03 网络版发表.

1) 国家自然科学基金(11672306, 51805522), 中国科学院先导项目(XDB22020101), 国家重点研发计划课题(2016YFB1200602)和大连理工大学海岸和近海工程国家重点实验室开放基金(LP21V1)资助.

2) 曾晓辉, 研究员, 主要研究方向: 工程结构系统动力学、海洋工程力学、车辆系统动力学. E-mail: zxh@imech.ac.cn

引用格式: 史禾慕, 曾晓辉, 吴晗. 轮对非线性动力学系统蛇行运动的解析解. 力学学报, 2022, 54(7): 1807-1819

Shi Hemu, Zeng Xiaohui, Wu Han. Analytical solution of the hunting motion of a wheelset nonlinear dynamical system. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2022, 54(7): 1807-1819

has fewer degrees of freedom and parameters, which can be analyzed by the analytical method. In this paper, the nonlinear dynamics equations are nondimensionalized by choosing appropriate characteristic parameters, and the two-degree-of-freedom nonlinear differential equations with small parameters are obtained. The method of multiple scales is used to solve the equations analytically. The analytical expressions of the amplitude of the limit cycle of the wheelset system are given and its stability is judged. The analytical expressions of the bifurcation speed of the wheelset system are given, and then the analytical expressions of the nonlinear critical speed of the wheelset system are obtained. After the analytical solutions are verified by the numerical results, the influence of wheelset system parameters is analyzed by using the analytical solutions. The traditional calculation methods of bifurcation diagram (such as speed reduction method, path-following method, etc.) require a large number of numerical integration calculations on the differential equations to solve the nonlinear critical speed of the system. However, the analytical expressions obtained in this paper can directly give the nonlinear critical speed and amplitude of the limit cycle of the wheelset system, which is convenient for studying the rule of variation of the dynamic performance of the wheelset system with parameters and for quick comparison and screening of schemes, and provide a reference for the optimization design of bogie structure.

Key words wheelset dynamics, method of multiple scales, analytical solution, limit cycle, nonlinear critical speed

引言

铁路车辆蛇行动力学响应特性是列车设计和运营中的关键问题,国内外学者对此进行了大量研究。关于整车系统动力学的分析大都采用数值方法。Schupp^[1]将基于路径跟踪法的分岔分析软件和 Simpack 多体动力仿真软件相结合研究系统的分岔特性,计算了车辆系统的极限环。Cheng 等^[2-3]研究了车辆系统的不同参数对于临界速度的影响规律。文献 [4-5] 等研究了车辆系统的分岔特性,计算了车辆系统的分岔图和极限环等。文献 [6] 分别采用路径跟随 (path-following) 方法和蛮力 (brute-force) 方法研究了铁路客车的分岔和蛇行运动特性。True^[7]对于几种求解车辆系统非线性临界速度的方法进行了分析,并给出了求解非线性速度的正确方法。Iwnicki 等^[8]总结了铁路货车的发展历史,研究了几种常见铁路货车的动力学特性。翟婉明^[9]提出了车辆-轨道耦合动力学理论,使得理论研究更能反应铁路轮轨系统实际情况,对于轨道类型对车辆系统的临界速度影响进行了广泛研究。曾京^[10]采用 QR 算法和黄金分割法计算了 17 自由度经典客车模型的线性临界速度,采用打靶法计算了其邻域的极限环。罗仁和曾京^[11]的研究表明,在研究列车系统蛇行运动稳定性时,采用单节车模型计算得到的临界速度与多编组列车的临界速度相差很小。高学军等^[12-13]采用延续算法计算了车辆系统的周期解,研究了车辆系统的分岔和混沌现象。Zeng 等^[14-19]综合考虑了气动载

荷对车辆动力学系统固有特性的影响以及强迫激励的作用,给出了气动载荷作用下车辆系统动力学响应特性分析方法,分析了相关参数的影响规律。

上述对整车动力学系统进行研究更接近实际情况,也搞清楚了一些作用机理。尽管如此,目前仍然有一些问题的内在机制不很清楚。部分原因是,整车系统自由度较多、可变参数也多,各参数对蛇行稳定性影响的效应交织在一起,不易分清各种因素的贡献大小,也就不容易更深刻理解为什么会有这样的影响规律。这种状况并不利于高效地改进工程设计。

轮对系统保留了影响车辆系统动力学性能的几个关键的要素:轮轨几何非线性约束、轮轨接触蠕滑关系、悬挂系统等。从蛇行稳定性问题的角度来说,轮对系统也是能从相当程度上代表整车系统蛇行稳定性特性的典型子系统。而且,轮对系统自由度少、参数少,可以采用解析方法进行分析,便于更深入地认识车辆动力响应特性及内在机理。目前国内外学者针对轮对系统也开展了相关研究。

Wagner^[20]计算了具有亚临界霍普夫分岔的铁路轮对系统的两个稳定解的吸引域,并给出两个稳定解出现的概率。Casanueva 等^[21]建立了考虑轮对柔性的轮对动态稳定性模型,分析了轮对参数对于临界速度的影响规律。Antali 等^[22-23]推导了圆锥车轮在圆柱轨道的精确非线性方程,研究了铁路轮对的运动特性。Song 等^[24]建立了 1/5 轮对比模型,通过实验和数值研究了车轮踏面锥度对于横向动力学特性的影响。Pascal 和 Sany^[25]建立了考虑轮轨共

形接触的独立轮对动力学模型并研究了其动力学特性. 文献 [26] 研究了具有三次和五次非线性的轮对动力学方程的亚临界霍普夫分岔和鞍结分岔, 并通过实验进行了验证. 文献 [27] 研究了轮对系统在两分岔参数下的分岔行为. Ge 等^[28] 建立了具有非线性等效锥度和轮轨力的修正铁路轮对动力学模型, 并对其失稳机理进行了研究. Guo 等^[29] 建立了考虑轮轨接触非线性的铁路车辆轮对动力学模型, 并对其分岔特性进行了研究. 武世江等^[30] 对考虑陀螺效应的轮对系统的霍普夫分岔特性进行了研究, 给出了线性临界速度表达式, 基于打靶法计算了轮对系统的分岔图.

本文采用解析方法对轮对系统的蛇行运动稳定性问题开展研究. 推导出带有小参数的两自由度方程, 并采用多尺度方法^[31] 进行解析求解; 给出轮对系统极限环幅值的解析表达式并对其稳定性进行判定; 给出了轮对系统非线性临界速度的解析表达式. 将所获得的解析解与数值结果进行对比, 验证了解析解的正确性. 采用得到的解析解进行了参数影响分析.

1 轮对动力学建模

1.1 模型概述

轮对系统是铁路车辆动力学系统中最关键的部分, 它包含悬挂系统以及两个通过车轴连在一起的车轮 (称为轮对). 一系悬挂系统将轮对和转向架构架连接起来; 轮对受钢轨约束, 在钢轨上无跳跃地运动. 轮对系统示意图如图 1 所示.

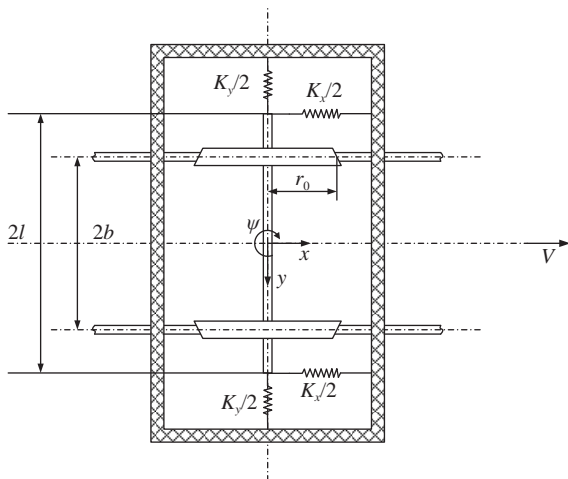


图 1 轮对模型示意图

Fig. 1 Schematic diagram of the wheelset model

在上述轮对系统中, 转向架构架沿水平方向匀速前进, 轮对沿着轨距不变、刚性路基的平直轨道运动. 轮对和构架之间由一系悬挂弹簧连接. 车轮与钢轨永保接触, 由此轮对的垂向和侧滚位移与其横摆和摇头位移相关联, 于是考虑模型有横摆 y 和摇头 ψ 两个自由度, 车轮和钢轨间的蠕滑符合线性规律, 不考虑自旋蠕滑的影响. 系统的非线性来自于轮轨接触非线性回复力.

1.2 轮对动力学方程

通过牛顿-欧拉法推导轮对动力学方程如下所示

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{y} - (F_{Ly} + F_{Ry}) + K_y y + F_c &= 0 \\ J\ddot{\psi} + (F_{Rx} - F_{Lx})b + K_x l^2 \psi &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中, m 是轮对的质量, J 是轮对相对于垂直轴的摇头转动惯量, F_{Lx} 和 F_{Ly} 是左侧车轮的纵向和横向蠕滑力, F_{Rx} 和 F_{Ry} 是右侧车轮的纵向和横向蠕滑力, K_x 和 K_y 是一系悬挂纵向、横向弹簧总刚度. F_c 代表由轴重和轮轨几何关系引起的横向复原力, b 是名义滚动圆距离之半, l 是一系悬挂横向距离之半.

本文中采用卡尔克 (Kalker) 线性蠕滑理论计算轮轨接触蠕滑力^[20, 27-28, 30, 32-33], 如下

$$\left. \begin{aligned} F_{Lx} &= -f_{11}\xi_{Lx} \\ F_{Rx} &= -f_{11}\xi_{Rx} \\ F_{Ly} &= -f_{22}\xi_{Ly} \\ F_{Ry} &= -f_{22}\xi_{Ry} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中, f_{11} 和 f_{22} 是车轮的纵向、横向蠕滑系数, ξ_{Lx} 和 ξ_{Ly} 是左侧车轮的纵向、横向蠕滑率, ξ_{Rx} 和 ξ_{Ry} 是右侧车轮的纵向、横向蠕滑率, 具体表达式如下

$$\left. \begin{aligned} \xi_{Lx} &= \frac{\lambda}{r_0}y + \frac{b}{V}\dot{\psi}, \quad \xi_{Ly} = \frac{\dot{y}}{V} - \psi \\ \xi_{Rx} &= -\frac{\lambda}{r_0}y - \frac{b}{V}\dot{\psi}, \quad \xi_{Ry} = \frac{\dot{y}}{V} - \psi \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中, λ 是等效锥度, r_0 是名义滚动圆半径, V 是轮对运行速度.

车辆动力学中轮轨接触恢复力通常由轮轨接触几何和轮对轴重决定, 表达式如下

$$F_c = \frac{W}{2} [\tan(\delta_R - \theta) - \tan(\delta_L + \theta)] \quad (4)$$

式中, W 是轴重, δ_L 和 δ_R 是左、右车轮接触角, θ 是

轮对侧滚角. 对于 LMA 型车轮踏面和 CHN60 型钢轨接触配合, 接触几何参数 $\tan(\delta_R - \theta) - \tan(\delta_L + \theta)$ 随轮对横摆的变化关系可用多项式函数拟合, 如图 2 所示.

具体的拟合公式如下

$$[\tan(\delta_R - \theta) - \tan(\delta_L + \theta)] = 5.163\ 78y - 3.031\ 45 \times 10^5 y^3 + 8.624\ 98 \times 10^9 y^5 \quad (5)$$

将式 (5) 代入式 (4) 有

$$F_c = \delta_0 y - \delta_1 y^3 + \delta_2 y^5 \quad (6)$$

式中 δ_0 , δ_1 和 δ_2 是关于轮轨接触横向复原力的多项式拟合函数的系数.

将式 (2)~式 (6) 代入式 (1), 重写轮对动力学表达式如下

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{y} + 2f_{22}\left(\frac{\dot{y}}{V} - \psi\right) + K_y y + \delta_0 y - \delta_1 y^3 + \delta_2 y^5 &= 0 \\ J\ddot{\psi} + 2f_{11}\left(\frac{b\lambda}{r_0} y + \frac{b^2}{V}\psi\right) + K_x l^2 \psi &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

方程 (7) 中各符号参数的取值参见附录 A 中的表 A1.

由于方程 (7) 带有三次和五次非线性, 很难得到其精确解, 于是考虑采用摄动法求解其近似解析解.

为采用多尺度方法求解如式 (7) 所示的非线性方程, 首先选择合适的特征量对动力学方程进行无量纲化, 把式 (7) 变为带有小参数的无量纲方程, 如式 (8) 所示

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 &= -\varepsilon \alpha_1 \dot{x}_1 + \varepsilon \alpha_2 x_2 + \varepsilon (1 - x_1^2) x_1^3 \\ \dot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 &= -\varepsilon \alpha_3 \dot{x}_2 - \varepsilon \alpha_4 x_1 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

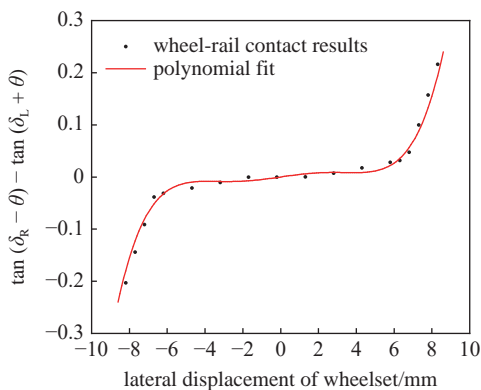


图 2 $\tan(\delta_R - \theta) - \tan(\delta_L + \theta)$ 随轮对横摆变化关系
Fig. 2 $\tan(\delta_R - \theta) - \tan(\delta_L + \theta)$ varies with the lateral displacement of wheelset

式中

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \sqrt{\frac{\delta_2}{\delta_1}} y, \quad x_2 = 2b \sqrt{\frac{\delta_2}{\delta_1}} \psi, \quad \omega_1^2 = 1, \quad \omega_2^2 = \frac{\omega_{20}^2}{\omega_{10}^2} \\ \omega_{10}^2 &= \frac{K_y + \delta_0}{m}, \quad \omega_{20}^2 = \frac{K_x l^2}{J}, \quad \tau = \omega_{10} t, \quad \varepsilon = \frac{\delta_1^2}{m \delta_2 \omega_{10}^2} \\ \alpha_1 &= \frac{2f_{22} \delta_2 \omega_{10}}{\delta_1^2 V}, \quad \alpha_2 = \frac{f_{22} \delta_2}{\delta_1^2 b}, \quad \alpha_3 = \frac{2m f_{11} \delta_2 b^2 \omega_{10}}{J \delta_1^2 V} \\ \alpha_4 &= \frac{4m f_{11} \delta_2 \lambda b^2}{J \delta_1^2 r_0} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

对于目前常用的轮轨外形 (LMA 型车轮踏面和 CHN60 型钢轨) 和刚度^[20, 28] 等参数进行计算, 式 (8) 中非线性项的系数 ε 约 0.1, 此时无量纲化的动力学方程 (8) 可以采用多尺度方法进行求解.

2 多尺度法求解轮对动力学方程

本节给出基于多尺度方法的方程 (8) 的一阶解析解.

设方程 (8) 的解的形式

$$\left. \begin{aligned} x_1(\tau, \varepsilon) &= x_{10}(T_0, T_1) + \varepsilon x_{11}(T_0, T_1) + \dots \\ x_2(\tau, \varepsilon) &= x_{20}(T_0, T_1) + \varepsilon x_{21}(T_0, T_1) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

式中 $T_n = \varepsilon^n \tau$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), 于是对时间的微分可表示为如下形式

$$\left. \begin{aligned} d/d\tau &= D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots \\ d^2/d\tau^2 &= D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

将式 (10) 和式 (11) 代入方程 (8), 并令两端 ε^0 和 ε^1 的系数分别相等, 得到

$$\left. \begin{aligned} D_0^2 x_{10} + \omega_1^2 x_{10} &= 0 \\ D_0^2 x_{20} + \omega_2^2 x_{20} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} D_0^2 x_{11} + \omega_1^2 x_{11} &= -2D_0 D_1 x_{10} - \alpha_1 D_0 x_{10} + \alpha_2 x_{20} + x_{10}^3 - x_{10}^5 \\ D_0^2 x_{21} + \omega_2^2 x_{21} &= -2D_0 D_1 x_{20} - \alpha_3 D_0 x_{20} - \alpha_4 x_{10} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

方程 (12) 的解可写成如下形式

$$\left. \begin{aligned} x_{10} &= A_1(T_1) \exp(i\omega_1 T_0) + cc \\ x_{20} &= A_2(T_1) \exp(i\omega_2 T_0) + cc \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

式中 A_n ($n = 1, 2$) 为待定复函数, cc 表示左边各项的

共轭复数.

将式 (14) 代入方程 (13) 有

$$\left. \begin{aligned} D_0^2 x_{11} + \omega_1^2 x_{11} &= [-i\omega_1(2D_1 A_1 + \alpha_1 A_1) + \\ & 3A_1^2 \bar{A}_1 - 10A_1^3 \bar{A}_1^2] \exp(i\omega_1 T_0) + \\ & \alpha_2 A_2 \exp(i\omega_2 T_0) + \\ & (A_1^3 - 5A_1^4 \bar{A}_1) \exp(3i\omega_1 T_0) - \\ & A_1^5 \exp(5i\omega_1 T_0) + cc \\ D_0^2 x_{21} + \omega_2^2 x_{21} &= -i\omega_2(2D_1 A_2 + \alpha_3 A_2) \cdot \\ & \exp(i\omega_2 T_0) - \alpha_4 A_1 \exp(i\omega_1 T_0) + cc \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

式中横线代表该函数的共轭复数. 为避免久期项的存在, 函数 A_n ($n = 1, 2$) 需满足以下方程

$$\left. \begin{aligned} -i\omega_1(2D_1 A_1 + \alpha_1 A_1) + 3A_1^2 \bar{A}_1 - 10A_1^3 \bar{A}_1^2 &= 0 \\ -i\omega_2(2D_1 A_2 + \alpha_3 A_2) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

在上式中将 A_n ($n = 1, 2$) 写成指数形式

$$A_n = \frac{1}{2} a_n(T_1) \exp[i\theta_n(T_1)], \quad n = 1, 2 \quad (17)$$

式中 a_n 和 θ_n ($n = 1, 2$) 都是实数, 将式 (17) 代入式 (16), 并分离实部和虚部, 得到

$$\left. \begin{aligned} a_1' &= -\frac{1}{2} \alpha_1 a_1 \\ \theta_1' &= -\frac{1}{\omega_1} \left(\frac{3}{8} a_1^2 - \frac{5}{16} a_1^4 \right) \\ a_2' &= -\frac{1}{2} \alpha_3 a_2 \\ \theta_2' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

式中, 一撇代表对 T_1 求导数. 对上式积分可以得到

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= a_{10} \exp\left(-\frac{1}{2} \alpha_1 T_1\right) \rightarrow 0 \\ a_2 &= a_{20} \exp\left(-\frac{1}{2} \alpha_3 T_1\right) \rightarrow 0 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

众所周知, 铁路轮对动力系统是一个自激振动系统, 当运行速度超过临界速度后, 系统会出现蛇行失稳导致蛇行运动振幅不再衰减, 此时蛇行运动的振幅和频率与运行速度相关. 工程实际中, 式 (19) 中参数 α_1 和 α_3 总是正数, 因此无论速度如何变化, 随着时间的增加, 系统蛇行运动幅值 a_1 和 a_2 总是趋近于零. 这显然与实际情况不符. 实际上在这里需要考虑系统的内共振的影响. 由于轮对的蛇行运动是轮对的横摆和摇头相耦合的运动, 通过内共振可以将轮对的横摆和摇头运动结合起来, 这一点也是符合

实际意义的. 下面给出考虑内共振时方程的解.

对于系统的内共振情况, 引入解谐参数 σ_1 来表示频率 ω_1 和 ω_2 的接近程度, 即

$$\omega_1 = \omega_2 - \varepsilon \sigma_1 \quad (20)$$

将上式代入式 (15), 为避免久期项的存在, 函数 A_n ($n = 1, 2$) 需满足以下方程

$$\left. \begin{aligned} [-i\omega_1(2D_1 A_1 + \alpha_1 A_1) + 3A_1^2 \bar{A}_1 - \\ 10A_1^3 \bar{A}_1^2 + \alpha_2 A_2 \exp(i\sigma_1 T_1)] &= 0 \\ -i\omega_2(2D_1 A_2 + \alpha_3 A_2) - \alpha_4 A_1 \exp(-i\sigma_1 T_1) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

将式 (17) 代入上式, 分离实部和虚部有

$$\left. \begin{aligned} a_1' &= -\frac{1}{2} \alpha_1 a_1 - \frac{\alpha_2 a_2}{2\omega_1} \sin(\theta_1 - \theta_2 - \sigma_1 T_1) \\ a_2' &= -\frac{1}{2} \alpha_3 a_2 - \frac{\alpha_4 a_1}{2\omega_2} \sin(\theta_1 - \theta_2 - \sigma_1 T_1) \\ a_1 \theta_1' &= -\frac{1}{\omega_1} \left[\frac{3}{8} a_1^2 - \frac{5}{16} a_1^4 + \right. \\ & \left. \frac{\alpha_2 a_2}{2} \cos(\theta_1 - \theta_2 - \sigma_1 T_1) \right] \\ a_2 \theta_2' &= \frac{\alpha_4 a_1}{2\omega_2} \cos(\theta_1 - \theta_2 - \sigma_1 T_1) \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

可见, 系统总有零解, 当系统的幅值 (a_1, a_2) 不为零时, 引入

$$\gamma = \theta_1 - \theta_2 - \sigma_1 T_1 \quad (23)$$

利用上式将式 (22) 化为自治形式

$$\left. \begin{aligned} a_1' &= -\frac{1}{2} \alpha_1 a_1 - \frac{\alpha_2 a_2}{2\omega_1} \sin \gamma \\ a_2' &= -\frac{1}{2} \alpha_3 a_2 - \frac{\alpha_4 a_1}{2\omega_2} \sin \gamma \\ \gamma' &= -\sigma_1 - \frac{3}{8\omega_1} a_1^2 + \frac{5}{16\omega_1} a_1^4 - \\ & \left(\frac{\alpha_2 a_2}{2\omega_1 a_1} + \frac{\alpha_4 a_1}{2\omega_2 a_2} \right) \cos \gamma \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

当 $a_1' = a_2' = \gamma' = 0$ 时系统存在稳态运动, 系统的稳态运动幅值 (极限环幅值) 对应着方程组 (25) 的解

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{2} \alpha_1 a_1 - \frac{\alpha_2 a_2}{2\omega_1} \sin \gamma &= 0 \\ -\frac{1}{2} \alpha_3 a_2 - \frac{\alpha_4 a_1}{2\omega_2} \sin \gamma &= 0 \\ \sigma_1 + \frac{3}{8\omega_1} a_1^2 - \frac{5}{16\omega_1} a_1^4 + \\ \left(\frac{\alpha_2 a_2}{2\omega_1 a_1} + \frac{\alpha_4 a_1}{2\omega_2 a_2} \right) \cos \gamma &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

由方程组 (25) 中前两式可得

$$\alpha_1\alpha_4\omega_1a_1^2 = \alpha_2\alpha_3\omega_2a_2^2 \quad (26)$$

在这里考虑稳态幅值均为正, 由式 (26) 可得

$$\frac{a_1}{a_2} = \sqrt{\frac{\alpha_2\alpha_3\omega_2}{\alpha_1\alpha_4\omega_1}} \quad (27)$$

将上式代入方程组 (25) 中第二式有

$$\sin\gamma = -\frac{\omega_2\alpha_3a_2}{\alpha_4a_1} = -\sqrt{\frac{\alpha_1\alpha_3\omega_1\omega_2}{\alpha_2\alpha_4}} \quad (28)$$

利用三角恒等式 $\cos^2\gamma + \sin^2\gamma = 1$, 有

$$\cos\gamma = \pm\sqrt{1 - \frac{\alpha_1\alpha_3\omega_1\omega_2}{\alpha_2\alpha_4}} \quad (29)$$

将上式和式 (27) 代入方程组 (25) 中第三式, 化简有

$$a_1^4 + \Gamma_1a_1^2 + \Gamma_{2\pm} = 0 \quad (30)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_1 &= -\frac{6}{5} \\ \Gamma_{2\pm} &= -\frac{16\omega_1}{5}(\sigma_1 \pm \Gamma_3) \\ \Gamma_3 &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_3}} + \sqrt{\frac{\alpha_3}{\alpha_1}}\right)\sqrt{\frac{\alpha_2\alpha_4}{\omega_1\omega_2}} \\ &\quad \sqrt{1 - \frac{\alpha_1\alpha_3\omega_1\omega_2}{\alpha_2\alpha_4}} \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

令

$$\Delta_{\pm} = \Gamma_1^2 - 4\Gamma_{2\pm} \quad (32)$$

由于 $\Gamma_1 < 0$, 需要分情况讨论

(1) $\Delta_{\pm} \geq 0, \Gamma_{2\pm} \geq 0$

$$\left. \begin{aligned} a_1^{(1)} &= \sqrt{\frac{-\Gamma_1 + \sqrt{\Delta_+}}{2}}, a_1^{(2)} = \sqrt{\frac{-\Gamma_1 - \sqrt{\Delta_+}}{2}} \\ a_1^{(3)} &= \sqrt{\frac{-\Gamma_1 + \sqrt{\Delta_-}}{2}}, a_1^{(4)} = \sqrt{\frac{-\Gamma_1 - \sqrt{\Delta_-}}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

(2) $\Gamma_{2\pm} < 0$

$$a_1^{(5)} = \sqrt{\frac{-\Gamma_1 + \sqrt{\Delta_+}}{2}}, a_1^{(6)} = \sqrt{\frac{-\Gamma_1 + \sqrt{\Delta_-}}{2}} \quad (34)$$

(3) $\Delta_{\pm} < 0$, 系统无非零稳态解, 此时系统只有零解.

根据稳态解幅值表达式 (33) 和式 (34) 可知, 稳态解幅值是随速度变化的函数. Δ_{\pm} 和 $\Gamma_{2\pm}$ 也是随速度变化的函数, 于是不同的运行速度下, 系统稳态解的数目可能也不相同. 通常情况下, 系统的非线性临界

速度 V_n 对应系统发生分岔时的速度, 于是, 通过求解系统发生分岔时的运行速度来判定系统的 V_n . 结合式 (33) 和式 (34) 可知, 此时系统可能有多个分岔点, 每一个分岔点对应的速度可能并不相同, 即系统在不同的速度下均有可能发生分岔, 通常系统发生分岔时的最小速度对应系统的 V_n . 基于此, 下面对系统可能发生分岔的情况逐一讨论.

(1) 当 $\Delta_{\pm} = 0$ 时, 系统发生分岔, 此时对应系统的一个分岔速度, 称为第一分岔速度

$$V_1 = \sqrt{\frac{\Theta_1}{\Theta_1 - \left(\sigma_1 + \frac{9}{80}\right)^2} \frac{br_0}{\lambda} \sqrt{\frac{K_y + \delta_0}{m} \frac{K_x l^2}{J}}} \quad (35)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \Theta_1 &= \left(\frac{Jf_{22}}{mb^2f_{11}} + \frac{mb^2f_{11}}{Jf_{22}} + 2\right) \\ &\quad \frac{\lambda bf_{11}f_{22}\delta_2^2}{\delta_1^4 r_0} \sqrt{\frac{m(K_y + \delta_0)}{JK_x l^2}} \\ \sigma_1 &= \frac{\omega_2 - \omega_1}{\varepsilon} = \frac{(K_y + \delta_0)\delta_2}{\delta_1^2} \left[\sqrt{\frac{mK_x l^2}{J(K_y + \delta_0)}} - 1 \right] \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

(2) 当 $\Gamma_{2\pm} = 0$ 时, 系统发生分岔, 此时也对应系统的一个分岔速度, 称为第二分岔速度

$$V_2 = \sqrt{\frac{\Theta_1}{\Theta_1 - \sigma_1^2} \frac{br_0}{\lambda} \sqrt{\frac{K_y + \delta_0}{m} \frac{K_x l^2}{J}}} \quad (37)$$

(3) 当 $\Delta_+ = \Delta_-$, 并且系统满足 $\Delta_{\pm} > 0$ 时, 此时对应系统的一个分岔速度, 称为第三分岔速度

$$V_3 = \sqrt{\frac{br_0}{\lambda} \sqrt{\frac{K_y + \delta_0}{m} \frac{K_x l^2}{J}}} \quad (38)$$

此时系统还需满足

$$\sigma_1 + \frac{9}{80} > 0 \quad (39)$$

综合上述分析, 可判定系统的 V_n 为

$$(1) \text{ 如果 } \sigma_1 + \frac{9}{80} \leq 0, \text{ 那么 } V_n = \min\{V_1, V_2\} = V_1 \quad (40)$$

$$(2) \text{ 如果 } \sigma_1 + \frac{9}{80} > 0, \text{ 那么 } V_n = \min\{V_1, V_2, V_3\} = V_3 \quad (41)$$

当求得系统稳态幅值 a_1 后, 代入式 (27)~式 (29) 可求得 a_2, γ . 对于求得的稳态解稳定性判定, 可采用文献 [31] 中的方法, 为此设

$$a_1 = a_{10} + \delta a_1, a_2 = a_{20} + \delta a_2, \gamma = \gamma_0 + \delta \gamma \quad (42)$$

式中 a_{10}, a_{20}, γ_0 是系统的一组稳态解, 它对应方程组 (24) 的奇点, 即满足式 (25). $\delta a_1, \delta a_2, \delta \gamma$ 是叠加的小的摄动量. 将式 (42) 代入方程组 (24), 并对 $\delta a_1, \delta a_2, \delta \gamma$ 进行泰勒展开保留一次项, 得到

$$\left. \begin{aligned} \delta a_1' &= -\frac{1}{2}\alpha_1\delta a_1 - \frac{\alpha_2}{2\omega_1}\delta a_2 \sin \gamma_0 - \frac{\alpha_2 a_{20}}{2\omega_1}\delta \gamma \cos \gamma_0 \\ \delta a_2' &= -\frac{\alpha_4}{2\omega_2}\delta a_1 \sin \gamma_0 - \frac{1}{2}\alpha_3\delta a_2 - \frac{\alpha_4 a_{10}}{2\omega_2}\delta \gamma \cos \gamma_0 \\ \delta \gamma' &= -\left[\frac{3}{4\omega_1}a_{10} - \frac{5}{4\omega_1}a_{10}^3 - \left(\frac{\alpha_2 a_{20}}{2\omega_1 a_{10}^2} - \frac{\alpha_4}{2\omega_2 a_{20}}\right)\cos \gamma_0\right]\delta a_1 - \\ &\quad \left(\frac{\alpha_2}{2\omega_1 a_{10}} - \frac{\alpha_4 a_{10}}{2\omega_2 a_{20}^2}\right)\delta a_2 \cos \gamma_0 + \\ &\quad \left(\frac{\alpha_2 a_{20}}{2\omega_1 a_{10}} + \frac{\alpha_4 a_{10}}{2\omega_2 a_{20}}\right)\delta \gamma \sin \gamma_0 \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

此时系统稳态运动的稳定性依赖于式 (43) 右端的系数矩阵的特征值, 右边系数矩阵如下

$$J = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \quad (44)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} m_{11} &= -\frac{1}{2}\alpha_1 \\ m_{12} &= -\frac{\alpha_2}{2\omega_1} \sin \gamma_0 \\ m_{13} &= -\frac{\alpha_2 a_{20}}{2\omega_1} \cos \gamma_0 \\ m_{21} &= -\frac{\alpha_4}{2\omega_2} \sin \gamma_0 \\ m_{22} &= -\frac{1}{2}\alpha_3 \\ m_{23} &= -\frac{\alpha_4 a_{10}}{2\omega_2} \cos \gamma_0 \\ m_{31} &= -\left[\frac{3}{4\omega_1}a_{10} - \frac{5}{4\omega_1}a_{10}^3 - \left(\frac{\alpha_2 a_{20}}{2\omega_1 a_{10}^2} - \frac{\alpha_4}{2\omega_2 a_{20}}\right)\cos \gamma_0\right] \\ m_{32} &= -\left(\frac{\alpha_2}{2\omega_1 a_{10}} - \frac{\alpha_4 a_{10}}{2\omega_2 a_{20}^2}\right)\cos \gamma_0 \\ m_{33} &= \left(\frac{\alpha_2 a_{20}}{2\omega_1 a_{10}} + \frac{\alpha_4 a_{10}}{2\omega_2 a_{20}}\right)\sin \gamma_0 \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

此时特征方程

$$\det(J - \lambda I) = 0 \quad (46)$$

对上式展开有

$$\lambda^3 + c_2 \lambda^2 + c_1 \lambda + c_0 = 0 \quad (47)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} c_2 &= -(m_{11} + m_{22} + m_{33}) \\ c_1 &= m_{11}m_{22} + m_{22}m_{33} + m_{11}m_{33} - \\ &\quad m_{12}m_{21} - m_{13}m_{31} - m_{23}m_{32} \\ c_0 &= -(m_{11}m_{22}m_{33} + m_{12}m_{23}m_{31} + m_{13}m_{21}m_{32} - \\ &\quad m_{11}m_{23}m_{32} - m_{13}m_{22}m_{31} - m_{12}m_{21}m_{33}) \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

对于方程 (47), 采用卡尔达诺 (Cardano) 公式求解如下

$$\lambda_1 = -\frac{c_2}{3} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \quad (49)$$

$$\lambda_2 = -\frac{c_2}{3} + \omega \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \omega^2 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \quad (50)$$

$$\lambda_3 = -\frac{c_2}{3} + \omega^2 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \omega \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \quad (51)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{3c_1 - c_2^2}{3}, q = \frac{27c_0 - 9c_2c_1 + 2c_2^3}{27} \\ \omega &= \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

当式 (49)~式 (51) 所对应所有特征值 $\lambda_i (i = 1, 2, 3)$ 的实部均为负数时, 对应的稳态运动是稳定的, 否则稳态运动不稳定.

将式 (14) 和式 (17) 代入式 (10), 结合式 (23), 可以得到稳态解的一次近似为

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= a_1 \cos(\omega_1 \tau + \theta_1) + O(\varepsilon) = \\ &\quad a_1 \cos(\omega_2 \tau - \sigma_1 T_1 + \theta_1) + O(\varepsilon) = \\ &\quad a_1 \cos(\omega_2 \tau + \theta_2 + \gamma) + O(\varepsilon) \\ x_2 &= a_2 \cos(\omega_2 \tau + \theta_2) + O(\varepsilon) \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

式中, a_1, a_2, γ 均是常数, 此时无量纲 x_1 和 x_2 以同一种频率振动, 当系统存在稳定的周期解时, 系统的蛇行运动频率 f_h

$$f_h = \frac{1}{2\pi} (\omega_2 + \dot{\theta}_2) = \frac{1}{2\pi} \left(\omega_2 + \varepsilon \frac{\alpha_4 a_1}{2\omega_2 a_2} \cos \gamma \right) \quad (54)$$

3 结果和讨论

3.1 验证

重新计算文献 [20] 给出的轮对横摆分岔图的算例, 并将本文结果与该文献的结果进行了对比, 如图 3 所示.

图 3 中红色三角符号代表文献 [20] 中轮对横摆幅值结果, 蓝色曲线是自编程序的计算结果, 二者吻合很好. 此外, 在之前的研究^[14-19]中, 将自编程序计算结果和与已有文献中的实验结果和数值结果也进行了许多对比验证.

接下来将数值计算结果和多尺度法的分析结果对比. 数值计算采用四阶变步长荣格-库塔 (Runge-Kutta, RK) 法直接对方程 (8) 进行数值积分, 略去瞬态部分得到 x_1 和 x_2 的时间历程曲线如图 4(a) 所示, 图 4(b) 是相轨迹在相平面上的投影.

由图 4 可知, 此时 x_1 和 x_2 作周期运动, 对其时间历程曲线进行快速傅里叶变换 (FFT) 得到 x_1 和 x_2 的频谱图, 如图 5 所示.

由频谱分析结合图 5 可知, 此时 x_1 和 x_2 的频率组成由基频 f_h 及 f_h 的奇数倍频组成. f_h 所对应的谐波分量幅值远大于其他谐波分量幅值. x_1 和 x_2 以相同的频率 f_h 作周期运动. 此时数值计算得到的系统

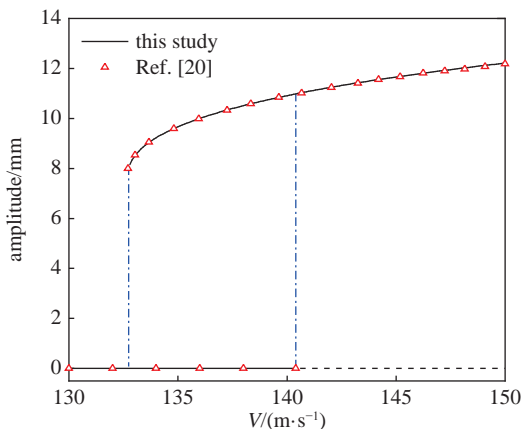
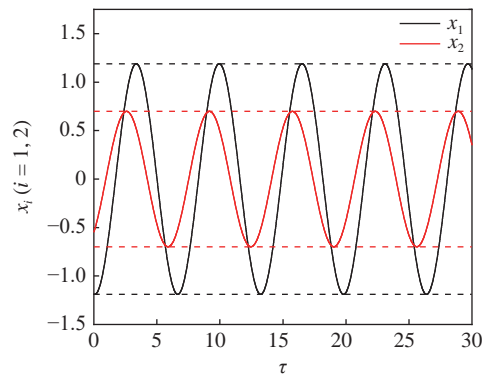
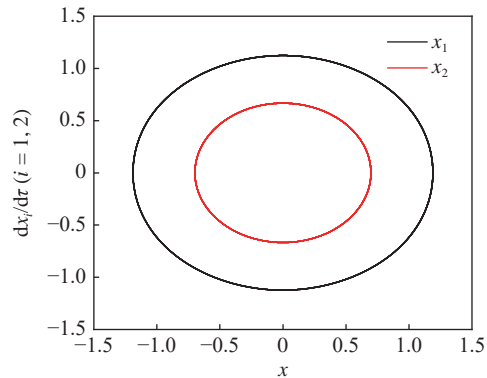


图 3 本研究结果与文献 [20] 结果对比

Fig. 3 Comparison of results between this paper and Ref. [20]



(a) 时间历程曲线
(a) Time-history curves



(b) 相平面内相轨迹
(b) Phase trajectories in the phase plane

图 4 时间历程曲线与相平面内相轨迹

Fig. 4 Time-history curves and phase trajectories in the phase plane

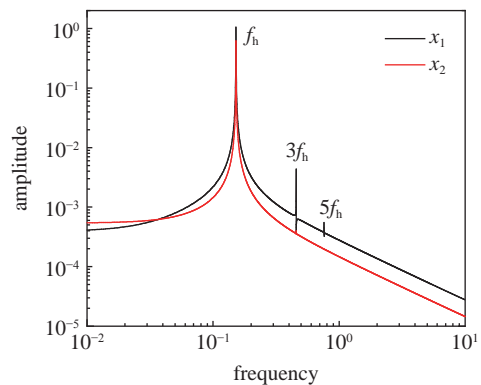


图 5 x_1 和 x_2 的频谱图

Fig. 5 Frequency spectra of x_1 and x_2

的蛇行运动频率 f_h 为 0.152 00, 而由本文解析公式 (式 (54)) 计算得到的 f_h 为 0.151 89, 相对误差仅 0.07%. 我们对 x_1 和 x_2 的时间历程曲线进行滤波处理, 得到相应的仅包含基频 f_h 的时间曲线 \bar{x}_1, \bar{x}_2 如图 6 所示.

滤波后时间历程曲线 \bar{x}_1, \bar{x}_2 的幅值分别为 $A_1 = 1.185 05$ 和 $A_2 = 0.698 32$, 二者之间的相位差

$\varphi = 2\pi f_s \Delta\tau = 0.764\ 20$, 而用本文解析式 (27)~式 (29)、式 (33) 和式 (34) 给出的一次近似解幅值 $a_1 = 1.208\ 37$ 和 $a_2 = 0.756\ 99$, 相位差 $-\gamma = 0.724\ 02$, 相对误差分别为 1.97%, 8.40% 和 5.26%。图 7 给出了由多尺度法一阶近似 (式 (53)) 计算的时间历程曲线和相平面内相轨迹与 x_1 滤波后的结果对比, 二者基本吻合。

图 8 给出了由本文解析式 (27)、式 (33) 和式 (34) 计算的轮对横摆和摇头角分岔图和数值结果的对

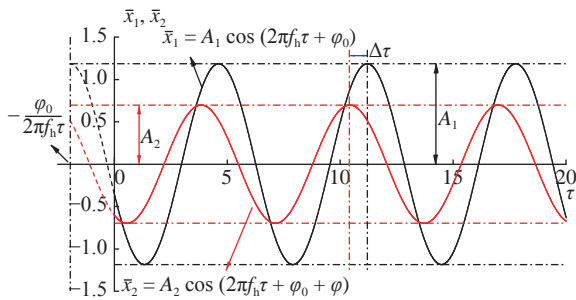
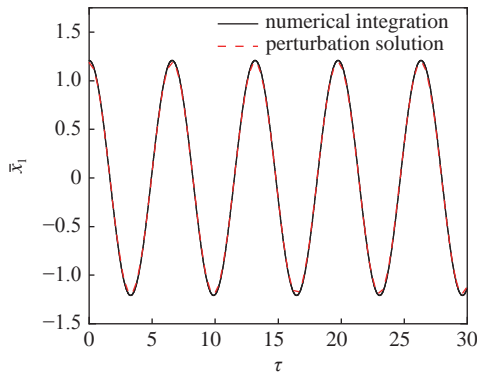
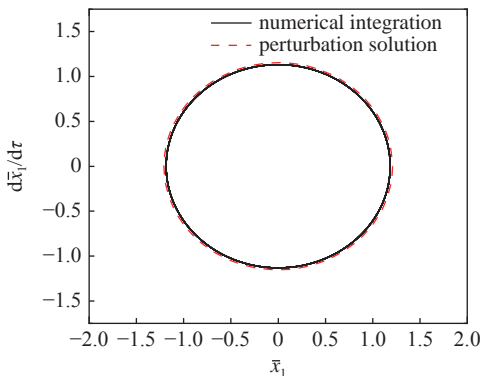


图 6 f_h 对应的时间历程曲线

Fig. 6 Time-history curves corresponding to f_h



(a) 时间历程曲线
(a) Time-history curves



(b) 相平面内相轨迹
(b) Phase trajectories in the phase plane

图 7 摄动解与数值积分结果对比

Fig. 7 Comparison between perturbation solution and numerical integration

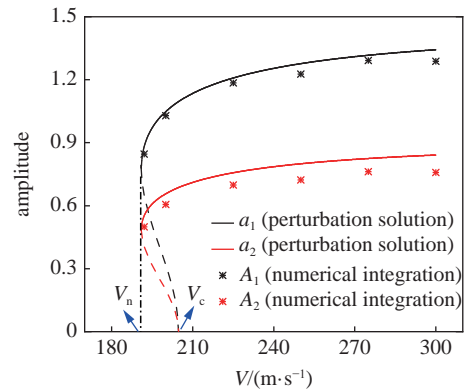


图 8 摄动解计算分岔图和数值积分结果对比

Fig. 8 Comparison of bifurcation diagrams calculated by perturbation solution and numerical integration

比。图 8 中, 实线代表稳定的稳态运动的幅值, 虚线代表不稳定的稳态运动的幅值, 数值积分不能求解出不稳定的稳态周期幅值。结合图 8 可以看出, 由本文解析解 (式 (35)~式 (38)) 计算的分岔速度中的线性临界速度 V_c 约为 204.7 m/s, 由线性化系统系数矩阵特征值计算的 V_c 为 207.1 m/s, 相对误差 1.16%。因此, 本文推导的解析解也能给出关于线性临界速度的一个很好的近似。由本文解析式 (35)~式 (41) 计算的 nonlinear 临界速度 V_n 约为 191.0 m/s, 由降速法计算的 V_n 约为 191.2 m/s, 相对误差约 0.1%。系统的稳定的稳态周期幅值相对误差不超过 10%。

通过以上解析公式的计算结果与数值结果的详细对比, 我们验证了第 2 章中基于多尺度法给出的一阶解析解的正确性。

采用数值法计算轮对系统的非线性临界速度通常需要大量的计算, 例如, 当采用降速法时: 基于路径跟踪策略, 首先通过增加运行速度使系统经过扰动后处于稳定的周期运动的状态, 即系统有稳定的极限环幅值, 随后逐步降低运行速度, 在每一步中, 当前速度下系统的最终稳态解对应的运动状态作为后续下一个运行速度的初始值从而继续计算, 当初值问题的暂态解最终趋于平凡解时, 计算结束。此时对应系统的一个分岔速度, 通常为 nonlinear 临界速度。计算的 nonlinear 临界速度的精度取决于速度离散化的步长, 要获得更加准确的临界速度值, 需要细化离散化的步长, 导致时间成本增加。而通过 nonlinear 临界速度的解析表达式, 我们可以直接求解系统的 nonlinear 临界速度, 更重要的是, 我们可以更加方便直接的进行参数对于系统 nonlinear 临界速度的影响规律研究。

3.2 参数影响规律

根据非线性临界速度的解析表达式 (35)~式 (41), 很明显, 系统的 V_1, V_2, V_3 与等效锥度 λ 的平方根成反比, 从而系统的非线性临界速度 V_n 与 λ 的平方根成反比. 图 9 给出了由式 (35)~式 (41) 确定的 V_n 随 λ 的变化曲线. 随着 λ 的增加, V_n 的减小速率逐渐减小. 文献 [34] 中给出, 系统的线性临界速度 V_c 与 λ 的平方根近似成反比, 这说明 λ 对于 V_c 和 V_n 具有相同的影响规律. 工程应用中, 为提高车辆的运动稳定性, 我们应该尽可能提高系统的 V_c 和 V_n . 于是在满足其他设计要求的情况下, 我们应该尽可能减小车轮踏面的等效锥度.

接下来我们研究 V_n 随一系纵向刚度 K_x 这一单一因素的变化规律, 其他参数保持不变, 如图 10 所示.

当 $\sigma_1 + \frac{9}{80} = 0$ 时, 对应有

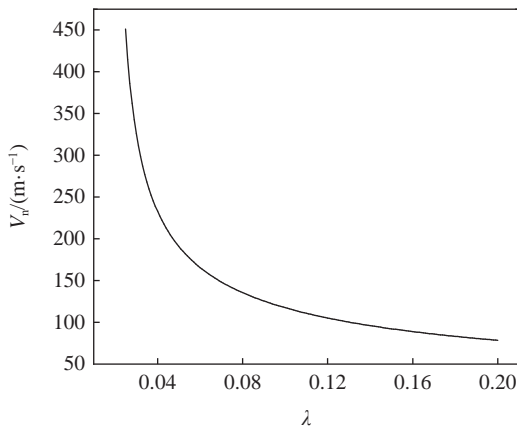


图 9 V_n 与 λ 的关系曲线

Fig. 9 Relationship between the V_n with λ

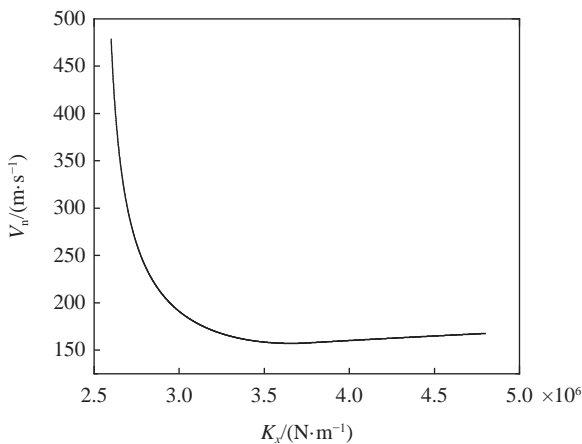


图 10 V_n 与 K_x 的关系曲线

Fig. 10 Relationship between the V_n with K_x

$$K_x^{(1)} = \frac{J(K_y + \delta_0)}{ml^2} \left[1 - \frac{9\delta_1^2}{80(K_y + \delta_0)\delta_2} \right]^2 \quad (55)$$

代入附录表 A1 的数值, 对应 $K_x^{(1)}$ 为 3.8326 MN/m. 此时系统的非线性临界速度 V_n 可表示为关于 K_x 的单变量函数, 具体表达式如下

$$V_n(K_x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{c_1}{c_2 - (\sqrt{K_x} - c_3)^2}} \sqrt[4]{K_x}, & K_x \leq K_x^{(1)} \\ c_4 \sqrt[4]{K_x}, & K_x > K_x^{(1)} \end{cases} \quad (56)$$

式中 c_1, c_2, c_3, c_4 均是常数.

式 (56) 中, 当 $K_x > K_x^{(1)} = 3.8326 \text{ MN/m}$ 时, V_n 与 K_x 的四次方根成正比, 是随 K_x 增加而缓慢单调增的函数; 而当 $K_x < K_x^{(1)} = 3.8326 \text{ MN/m}$ 时, 从上面表达式可以看出, K_x 的四次方根之前的因子不再是常量, 而是 K_x 的非线性函数, 因而该式是一个具有极值的函数, 我们可以求出其极值. 在我们所关注的参数范围内, 求 V_n 解析表达式关于 K_x 的导数并令其等于零, 化简有

$$c_2 + 2K_x(\sqrt{K_x} - c_3) = 0 \quad (57)$$

求解式 (57) 可得到对应于极值点的 $K_x^{(2)}$ 为 3.6565 MN/m. 在 $K_x < K_x^{(2)} = 3.6565 \text{ MN/m}$ 的区域内, 上述关于 K_x 的导数小于零, 系统的非线性临界速度 V_n 随着 K_x 的增大而减小. 在 $K_x > K_x^{(2)} = 3.6565 \text{ MN/m}$ 的区域内, 上述关于 K_x 的导数大于零, 系统的 V_n 随着 K_x 的增大而增大. 当 $K_x = 3.6565 \text{ MN/m}$ 时, 系统的 V_n 取极小值, 表现在图 10 上, 在本文所研究的参数范围内, 在其他参数给定的条件下, 系统的非线性临界速度随着一系纵向刚度值 K_x 的增大先减小而后又缓慢增加.

图 11 和 12 给出由本文解析式 (27)、式 (33) 和式 (34) 计算的无量纲横摆和摇头角分岔图.

图 11 中, 分别计算了一系纵向刚度 K_x 取 2.9 MN/m, 3.0 MN/m 和 3.1 MN/m 时系统无量纲横摆和摇头角幅值随速度 V 的变化曲线. 结果表明, 同一 K_x 值对应系统稳定的极限环幅值随着 V 的增加而逐渐增大, 当 V 越大, 极限环幅值的增大速率越慢. 同一 V 值, 系统稳定的极限环幅值随着 K_x 的增大而

增大。

图 12 中, 分别计算了车轮踏面等效锥度 λ 取 0.04, 0.05 和 0.06 时系统无量纲横摆和摇头角幅值随速度 V 的变化曲线。结果表明, 同一 λ 值对应系统稳定的极限环幅值随着 V 的增加而逐渐增大, 当 V 越大, 极限环幅值的增大速率越慢。同一 V 值, 系统稳定的极限环幅值随着 λ 的增大而增大。

一般情况下, 根据 V_n 的表达式 (35)~式 (41), 系统的许多其他参数均会对 V_n 有所影响, 因此在设计转向架参数时, 应该对各种不同的参数组合方案进行比较, 以期获得最佳的参数匹配范围。本文推导的解析表达式可以对系统参数的初期设计提供一定参考。在进行参数优化设计时, 不需要采用数值方法对每一个参数组合进行大量微分方程组的积分计算, 采用本文给出的解析表达式 (35)~式 (41) 可以很快计算出每个参数组合对应的动力学性能指标, 从而快速获得最优参数组合。

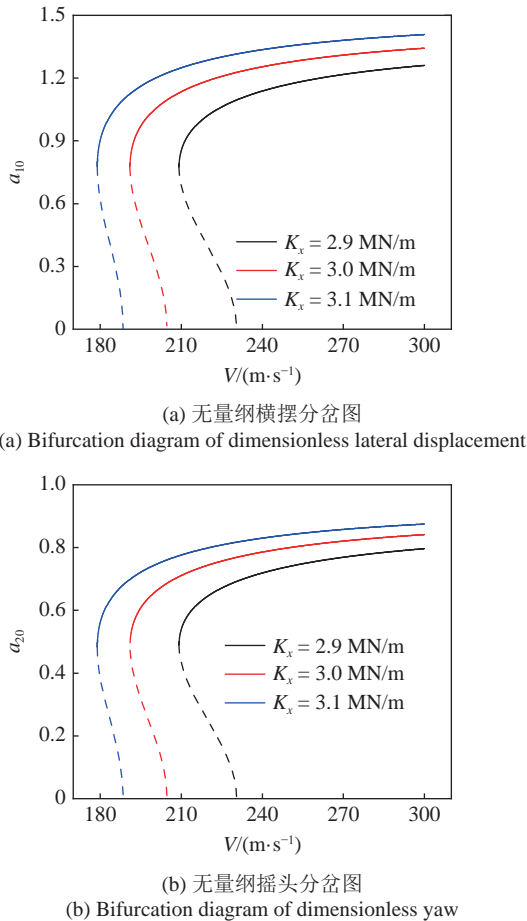
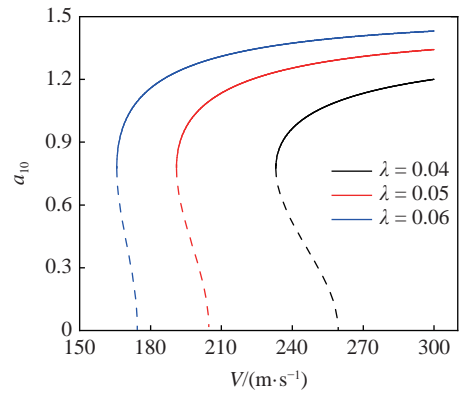


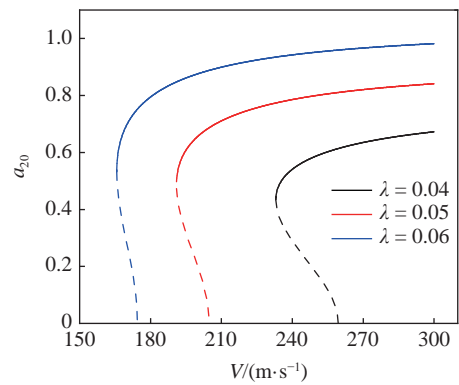
图 11 不同 K_x 值对应系统的分岔图

Fig. 11 Bifurcation diagram of the system with different K_x



(a) 无量纲横摆分岔图

(a) Bifurcation diagram of dimensionless lateral displacement



(b) 无量纲摇头分岔图

(b) Bifurcation diagram of dimensionless yaw

图 12 不同 λ 值对应系统的分岔图

Fig. 12 Bifurcation diagram of the system with different λ

4 结论

本文采用多尺度方法对车辆轮对系统动力学特性进行了解析求解。主要工作和结论如下。

(1) 给出了系统的极限环幅值和非线性临界速度的解析表达式。相比于数值解法, 通过解析公式, 我们可以直接给出系统的非线性临界速度, 更加方便地研究系统参数对于非线性临界速度的影响规律。给出了一系纵向悬挂刚度和车轮踏面等效锥度对于系统分岔图和非线性临界速度的影响规律。

(2) 在满足其他设计要求的情况下, 一系悬挂刚度对临界速度影响较为复杂。在我们所研究的参数范围内, 系统非线性临界速度随一系纵向刚度的变化存在一个极小值。在刚度较低 (极小值左侧) 时, 临界速度随刚度减小而有较明显增加, 而当刚度较高 (极小值右侧) 时, 临界速度会随刚度增加缓慢增加。适当减小车轮踏面等效锥度有助于提升车辆系统的线性和非线性临界速度, 从而提升车辆运动稳定性。

车辆系统发生蛇行失稳时的极限环幅值随着一系纵向悬挂刚度和车轮踏面等效锥度的增加而有所增加。

(3) 在转向架结构设计与参数优化过程中, 通过本文给出的解析表达式, 可以很方便地计算出系统不同参数组合下的极限环幅值和非线性临界速度, 便于快速比较不同参数组合下的多种方案, 从而筛选出最佳的参数匹配关系, 为转向架结构设计与参数优化提供参考。

参 考 文 献

- Schupp G. Bifurcation analysis of railway vehicles. *Multibody System Dynamics*, 2006, 15(1): 25-50
- Cheng YC, Lee SY, Chen HH. Modeling and nonlinear hunting stability analysis of high-speed railway vehicle moving on curved tracks. *Journal of Sound and Vibration*, 2009, 324(1): 139-160
- Cheng YC, Lee CK. Integration of uniform design and quantum-behaved particle swarm optimization to the robust design for a railway vehicle suspension system under different wheel conicities and wheel rolling radii. *Acta Mechanica Sinica*, 2017, 33(5): 963-980
- Zboinski K, Dusza M. Self-exciting vibrations and Hopf's bifurcation in non-linear stability analysis of rail vehicles in a curved track. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 2010, 29(2): 190-203
- Zboinski K, Dusza M. Bifurcation analysis of 4-axle rail vehicle models in a curved track. *Nonlinear Dynamics*, 2017, 89(2): 863-885
- Polach O, Kaiser I. Comparison of methods analyzing bifurcation and hunting of complex rail vehicle models. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2012, 7(4): 614-620
- True H. Multiple attractors and critical parameters and how to find them numerically: the right, the wrong and the gambling way. *Vehicle System Dynamics*, 2013, 51(3): 443-459
- Iwnicki SD, Stichel S, Orlova A, et al. Dynamics of railway freight vehicles. *Vehicle System Dynamics*, 2015, 53: 995-1033
- 翟婉明. 车辆-轨道耦合动力学. 第4版. 北京: 科学出版社, 2015 (Zhai Wanming. *Vehicle-Track Coupled Dynamics*, 4th edn. Beijing: Science Press, 2015 (in Chinese))
- 曾京. 车辆系统的蛇行运动分岔及极限环的数值计算. 铁道学报, 1996, 18(3): 13-19 (Zeng Jing. Numerical calculation of bifurcation and limit cycles for hunting motion of vehicle systems. *Journal of The China Railway Society*, 1996, 18(3): 13-19 (in Chinese))
- 罗仁, 曾京. 列车系统蛇行运动稳定性分析及其与单车模型的比较. 机械工程学报, 2008, 44(4): 184-188 (Luo Ren, Zeng Jing. Hunting stability analysis of train system and comparison with single vehicle model. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2008, 44(4): 184-188 (in Chinese))
- 高学军, 李映辉, 乐源. 延续算法在简单轨道客车系统分岔中的应用. 振动与冲击, 2012, 31(20): 177-182 (Gao Xuejun, Li Yinghui, Yue Yuan. Continuation method and its application in bifurcation of a railway passenger car system car system with simple rails. *Journal of Vibration and Shock*, 2012, 31(20): 177-182 (in Chinese))
- Gao XJ, Li YH, Yue Y, et al. Symmetric/asymmetric bifurcation behaviours of a bogie system. *Journal of Sound and Vibration*, 2013, 332(4): 936-951
- Zeng XH, Wu H, Lai J, et al. Influences of aerodynamic loads on hunting stability of high-speed railway vehicles and parameter studies. *Acta Mechanica Sinica*, 2014, 30(6): 889-900
- Zeng XH, Wu H, Lai J, et al. Hunting stability of high-speed railway vehicles on a curved track considering the effects of steady aerodynamic loads. *Journal of Vibration and Control*, 2016, 22: 4159-4175
- Zeng XH, Wu H, Lai J, et al. The effect of wheel set gyroscopic action on the hunting stability of high-speed trains. *Vehicle System Dynamics*, 2017, 55: 924-944
- Zeng XH, Lai J, Wu H. Hunting stability of high-speed railway vehicles under steady aerodynamic loads. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 2018, 18: 1850093
- Wu H, Zeng XH, Lai J, et al. Nonlinear hunting stability of high-speed railway vehicle on a curved track under steady aerodynamic load. *Vehicle System Dynamics*, 2020, 58: 175-197
- Zeng XH, Shi HM, Wu H. Nonlinear dynamic responses of high-speed railway vehicles under combined self-excitation and forced excitation considering the influence of unsteady aerodynamic loads. *Nonlinear Dynamics*, 2021, 105: 3025-3060
- Wagner UV. Nonlinear dynamic behaviour of a railway wheelset. *Vehicle System Dynamics*, 2009, 47(5): 627-640
- Casanueva C, Alonso A, Eziolaza, I, et al. Simple flexible wheelset model for low-frequency instability simulations. *Journal of Rail and Rapid Transit*, 2014, 228(2): 169-181
- Antali M, Stepan G, Hogan SJ. Kinematic oscillations of railway wheelsets. *Multibody System Dynamics*, 2015, 34(3): 259-274
- Antali M, Stepan G. On the nonlinear kinematic oscillations of railway wheelsets. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2016, 11(5): 051020
- Song KS, Baek SG, Choi YS, et al. Effect of conicity on lateral dynamic characteristics of railway vehicle through scaled wheelset model development. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 2018, 32(11): 5433-5441
- Pascal JP, Sany JR. Dynamics of an isolated railway wheelset with conformal wheel-rail interactions. *Vehicle System Dynamics*. 2019, 57(12): 1947-1969
- Wei WY, Yabuno H. Subcritical Hopf and saddle-node bifurcations in hunting motion caused by cubic and quintic nonlinearities: Experimental identification of nonlinearities in a roller rig. *Nonlinear Dynamics*, 2019, 98: 657-670

- 27 Zhang TT, Dai HY. Loss of stability of a railway wheel-set, subcritical or supercritical. *Vehicle System Dynamics*, 2017, 55(11): 1731-1747
- 28 Ge PH, Wei XK, Liu JZ, et al. Bifurcation of a modified railway wheelset model with nonlinear equivalent conicity and wheel-rail force. *Nonlinear Dynamics*, 2020, 102(1): 79-100
- 29 Guo JY, Shi HL, Luo R, et al. Bifurcation analysis of a railway wheelset with nonlinear wheel-rail contact. *Nonlinear Dynamics*, 2021, 104: 989-1005
- 30 武世江, 张继业, 隋皓等. 轮对系统的 Hopf 分岔研究. 力学学报, 2021, 53(9): 2569-2581 (Wu Shijiang, Zhang Jiye, Sui Hao, et al. Hopf bifurcation study of wheelset system. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2021, 53(9): 2569-2581 (in Chinese))
- 31 Nayfeh AH, Mook DT. *Nonlinear Oscillations*. New York: Wiley, 1995
- 32 孙建锋, 池茂儒, 吴兴文等. 基于能量法的轮对蛇行运动稳定性. 交通运输工程学报, 2018, 18(2): 82-89 (Sun Jianfeng, Chi Maoru, Wu Xingwen, et al. Hunting motion stability of wheelset based on energy method. *Journal of Traffic and Transportation Engineering*, 2018, 18(2): 82-89 (in Chinese))
- 33 Lee SY, Cheng YC. Hunting stability analysis of high-speed railway vehicle trucks on tangent tracks. *Journal of Sound and Vibration*, 2005, 282: 881-898
- 34 王福天. 车辆动力学. 北京: 中国铁道出版社, 1981 (Wang Futian. *Vehicle Dynamics*. Beijing: China Railway Publishing House, 1981 (in Chinese))

附录

附表 A1 轮对参数

Table A1 Wheelset parameters

Parameters	Value
m/kg	2000
$J/(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$	980
$K_x/(\text{MN}\cdot\text{m}^{-1})$	3.0
$K_y/(\text{MN}\cdot\text{m}^{-1})$	7.48
b/m	0.7465
l/m	1.0
r_0/m	0.43
f_{11}/MN	1.5232
f_{22}/MN	1.4019
$\delta_0/(\text{N}\cdot\text{m}^{-1})$	3.4158×10^5
$\delta_1/(\text{N}\cdot\text{m}^{-3})$	2.0053×10^{10}
$\delta_2/(\text{N}\cdot\text{m}^{-5})$	5.7054×10^{14}
λ	0.05
$g/(\text{m}\cdot\text{s}^{-2})$	9.80
V	-