

基于正交试验方法的大型有面外支撑杆 X 撑结构的屈曲分析和优化设计

张伟为^{1,2}, 康元顺^{1,2}, 崔哲华^{1,2}, 曾晓辉^{1,2}

(1. 中国科学院力学研究所, 北京 100190; 2. 中国科学院大学, 北京 100049)

摘要: 本文从数理统计和有限元模拟的角度研究了有面外支撑杆 X 撑结构的稳定性问题并提出了基于优化设计的临界载荷经验公式, 为高度非线性问题提供了一种新型解决思路。具体而言, 充分考虑了面内支撑和面外支撑几何设计参数和边界条件, 以正交设计为指导思想, 进行了非对称结构的弹性屈曲现象的数值模拟和显著性试验, 并借助多因素方差分析筛选出了各种受力环境下的显著影响因素。最后, 在上述基础上提出了优化设计解决方案, 以临界屈曲载荷为目标函数, 显著性因子为设计变量, 利用非线性曲面回归得到了显著影响因素和临界屈曲载荷的经验公式, 即优化设计数学模型。研究发现, 无论系统处于何种受力条件, 面内支撑几何设计参数对结构稳定性的影响远高于面外支撑几何设计参数, 其中 X 撑外径的作用作为显著。但系统双杆受力时, 面外支撑位置, 即面内支撑结点位置会显著影响结构的稳定性。此外, X 撑两杆所受载荷的比率会显著影响系统的承载性能, 具体表现为非屈曲杆受拉力时, 结构稳定性会有所改善, 且比率为 4.85 倍时, 本系统的稳定性最好。本文为基于正交试验的优化设计方法于实际工程中的应用提供了案例参考, 针对新型复杂结构设计和初期优化设计提供了一种高效的解决方案。

关键词: 有面外支撑杆 X 撑结构; 屈曲分析; 正交设计; 优化设计; 有限元分析; 方差分析

BUCKLING ANALYSIS AND OPTIMAL DESIGN OF LARGE-SCALE X-BRACE STRUCTURE WITH OUT-OF-PLANE SUPPORT BARS BASED ON ORTHOGONAL TEST METHOD

ZHANG Wei-wei^{1,2}, KANG Yuan-shun^{1,2}, CUI Zhe-hua^{1,2}, ZENG Xiao-hui^{1,2}

(1. Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190; 2. University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049)

Abstract: This paper studied the stability of X-supported structures with out-of-plane braces from the perspectives of mathematical statistics and finite element simulation, and proposed an empirical formula for critical load based on optimal design, which provided a new solution to nonlinear problems. Specifically, the geometric design parameters and boundary conditions of the structure were fully considered, and the orthogonal design was taken as the guiding ideology. Numerical simulations and significant tests of the elastic buckling phenomenon of asymmetric structures were carried out with the help of multiple factors. The analysis of variance screened out the significant influencing factors under various stress environments. Finally, an optimal design solution which considered the effects of significant factors on stability was proposed by nonlinear curved surface

基金项目: 国家自然科学基金(11672306)

通讯作者: 曾晓辉(1972—), 男, 湖南人, 研究员, 博导, 主要从事结构动力响应、稳定性和流固耦合领域(E-mail: zzh@imech.ac.cn).

作者简介: 张伟为(1996—), 男, 江苏人, 博士生, 主要从事工程力学研究;

康元顺(1997—), 男, 贵州人, 硕士生, 主要从事工程力学研究;

崔哲华(1998—), 男, 山西人, 硕士生, 主要从事工程力学研究.

regression. This study found that the influences of in-plane support geometric design parameters on structural stability were rather higher than that of out-of-plane support geometric design parameters. In addition, the effect of outer diameter led the trend of buckling load. However, when both of the in-plane braces were under load, the position of the out-of-plane support affected the stability of the structure heavily. Complementary, the ratio of the two X braces' load affected the load-bearing performance of the system. Tensile stress improved the stability of X braces. In this article, the perfect ratio, which was between tensile stress and compressive stress, was 4.85. This article provided a case reference for the application of the optimization design method based on orthogonal experiment in actual engineering, and provided an efficient solution for the new complex structure design and the initial optimization design.

Key words: X-support structure with out-of-plane support rods; buckling analysis; orthogonal design; optimal design; finite element analysis; variance analysis

现代建筑结构中,有面外支撑杆的 X 撑结构有良好的抗侧性能、造价低廉且易于安装,在许多方面得到了广泛应用。

在海洋工程中,结构常以非对称的形式出现在导管架平台上。受海浪、横风以及塔架自重作用下,面内两根交叉细长杆的受力形式分为两种:一杆受压,另一杆受拉或两杆同时受压,因而其失效形式为受压杆支撑屈曲、截面塑化和撑管对弦管的冲剪失效^[1]。在杆系交汇处常采用焊接进行连接,而且为了保证弦管在管节点处不被冲剪破坏,需要在弦管上设计一个加厚段^[2]。此外,通常需要在 X 撑平面外设有面外支撑,以防止面外失稳。



(a) 三腿柱导管架



(b) 八腿柱导管架

图 1

桥梁工程中,此结构主要用于钢桥的设计。钢桥根据其承重结构的受力和传力方式,可分为梁式钢桥和拱式钢桥两类。梁式钢桥可以分为钢板梁桥和钢桁架梁桥,根据桥面位置有可以分为上承式钢桥和下承式钢桥。上承式钢桥支撑体系主要是由 X 交叉形支撑杆件组成的纵横联结系组成,其作用一方面为避免主梁在水平面内受弯,另一方面可以传递桥跨结构的横向荷载,形成一个稳定的空间结构;对于下承式钢桥,因列车穿过两片主梁,无法设置上平纵联,只在下翼缘设下平纵联,主要支撑形式仍为 X 形支撑,钢桁架桥中除了纵横联结系外,其腹杆根据需要可设置为 X 形交叉支撑^[3,4]。当桥梁跨度较大时,杆件平面外刚度较大,需要在面外设置支撑。各个平纵联节点处采用焊接形式进行连接。对于上承式和中承式梁式拱桥,可以在拱肋和桥面梁之间设置 X 形交叉吊杆,从而拱肋与梁之间就起到了横隔膜作用,显著减少可变荷载作用下的拱肋弯矩,仅考虑其轴力即可^[5],增强桥梁结构的整体刚度。此外,两侧拱肋之间也需要设置横向 X 形支撑,来抵抗横向荷载,保持结构稳定性。对于拱形钢桥结构的设计,不仅要满足平面内稳定承载力的要求,也应考虑面外支撑的设置^[4]。



(a) 武汉长江大桥

(b) 莫农加希拉河公路桥

图 2

建筑工程中,对于工业建筑,X支撑可作为单层或多层厂房屋盖支撑和柱间支撑体系^[6]。厂房建设中,跨度较小时,不考虑平面外屈曲的影响,屋面部分将桁架结构的外形设计成与弯矩图相似的形状,从而使桁架的弦管受力均匀^[7]。当跨度大时,屋盖常采用空间钢桁架结构中的连续钢桁架或拱式钢桁架,利用桁架式拉杆拱来承担风荷载对弦管产生的较大弯矩。在大跨度厂房建筑中,X形撑杆在其平面内的强度和刚度比其在平面外的强度和刚度大得多,因此应该设置侧向支撑以防止侧向变形和扭转,支撑和交叉点用焊接的方式固定。对于民用建筑,大多以多层和高层结构房屋为主,结构类型主要采用框架—支撑体系^[8],由框架梁、柱和支撑斜杆共同构成、在水平力的作用下,支撑杆件只承受拉压轴向力,并通过楼板的变形协调与刚接框架共同工作,形成双重抗侧力结构体系。框架—支撑体系支撑形式以X交叉支撑为主,可以有效地抵抗横向力,是多层钢结构建筑中常用的抗风抗震结构形式^[9]。X形支撑的截面形状多为矩形或圆形,两个撑杆的角度通常不超过45度^[10],因其杆件的不对称性,计算不仅要考虑支撑平面内的屈曲,还要考虑其平面外屈曲的模式,因此节点周围有斜腹杆提供平面外支撑,且撑杆连接处以及面外支撑连接处多为焊接。输电塔设计中,X形交叉支撑主要应用于输电塔的交叉斜材的设计,交叉斜材对主材起一定的支撑作用,同时也减小了内力计算时主材的计算长度。对于高度较大的塔架,在主、斜杆之间设置辅助杆,以减小斜材杆件的自由长度,同时可以提高结构的整体刚度。交叉斜材的受力情况可以是二者同时受压,也可以是一拉一压。这是由铁塔所受外界横风以及塔身自重决定的^[11]。X形交叉斜材可采用单根钢管、等边角钢。当采用等边角钢时,各杆件之间采用螺栓铰接。当采用钢管时,交叉斜材的连接方式主要以单插板或形插板连接^[12]。

目前对于X撑的研究大多侧重于考察不同工程结构中X撑结构稳定性和极限承载力分析,研究手段以理论分析、数值仿真或实验研究来进行。理论方面,国外学者Knapp和Dixon导出了海上平台中非对称连接系统的简支端和固定端条件的封闭解。通过不同的拉压比的设计曲线发现,当横撑主要抗风浪力时,受拉构件和受压构件的轴向力大小基本相等。简支端条件下有效长度因子大于固定端条件。在固定端条件下更容易发生屈曲失稳,这表明增加平面外支撑并不提高X型撑杆的稳定性^[13]。Stoman基于能量法,制定并验证了X支撑体系的稳定性准则,并基于里兹法直接得到了任意拉压比值下系统临界载荷的简单封闭关系以及有效长度因子变化曲线。研究了拉压支撑杆在截面性能和长度上不同的情况。得到有效长度因子的解析表达式,易于设计应用^[14]。Shadnam推导了具有不同端部连接的预扭曲交叉支撑在任意拉压荷载比下的临界载荷的封闭关系。推导出了具有不同截面特性、长度和轴向载荷的临界载荷方程。结果发现,扭曲支撑的临界载荷高于非扭曲支撑的临界载荷^[15]。

由于实际结构中,影响X撑结构稳定性与承载力不确定因素较多,且由于实验条件的限值,使得理论分析和实验研究较少。随着计算技术的发展,仿真模拟具有可重复性,而且具有较高可信度。多数学者对于X撑仿真研究主要通过线性或非线性特征值屈曲分析来进行。国内学者张一舟等基于ANSYS对某大型电厂300MW机组除尘器本体及钢结构支架进行了静力、特征值屈曲和非线性屈曲分析。计算了在设计荷载作用下结构的变形、内力和截面应力以及结构的前四阶屈曲模态及相应的特征值屈曲荷载,给出了完善结构和有缺陷结构的荷载位移曲线及极限承载力,计算结果具有较高的精度^[16]。董一萌采用有限元手段对立体桁架结构进行线性特征值屈曲分析和非线性屈曲分析,求得各阶屈曲模态和临界屈曲荷载,并利用弧

长法跟踪结构的后屈曲行为,然后研究了桁架中几何参数对平面外稳定的影响,得出一些对于管桁架侧向稳定研究有参考价值的结论^[17]。李雪等以湖南地区挂靖线 220kV 输电线路覆冰倒塔为例,建立了精细化输电塔体系有限元模型。对覆冰和风荷载作用下输电塔体系进行非线性屈曲分析,计算出覆冰荷载以及风荷载下输电塔结构的极限承载能力^[18]。闫龙海推导了结构稳定分析的线性和非线性有限元方程和求解方法。利用有限元分析软件 ANSYS 建立工字形薄壁压杆模型,进行特征值屈曲和非线性屈曲分析,计算特征值屈曲载荷和非线性稳定分析的极限载荷。利用正交试验进行了直观和方差分析。最后基于多元线性回归原理对薄壁压杆截面进行了优化设计^[19]。柳胜等利用两端铰支压杆的欧拉公式对丝杠的临界压力进行了计算,并结合 ANSYS 对其结构进行了线性和非线性屈曲分析,计算结果对比得到,欧拉公式和线性计算的结果相差很小。在非线性屈曲分析中得到的临界载荷相对保守,应用该值设计的滚珠丝杠副偏于安全^[20]。刘文涛等学者采用 ANSYS 软件中的特征值法,分别模拟两组弹性圆筒在承受均匀外压时的临界失稳压力,并与经典的理论公式和设计标准方法进行比较,以进一步讨论 ANSYS 软件特征值法在弹性失稳计算中的应用^[21]。李鸿维应用 ABAQUS 软件对交叉支撑有效长度系数进行模拟研究,建立了交叉支撑-框架模型,进行特征值屈曲分析,得到支撑面内和面外失稳的弹性解,利用欧拉公式反推其计算长度系数,综合分析支撑长细比、节点板厚度、节点板净距和支撑角度对其计算长度系数的影响,并给出支撑平面内或是平面外失稳时支撑的平面外和平面内的计算长度系数的合理匹配关系^[22]。刘卓学者认为交叉支撑的稳定承载力主要取决于其平面外的屈曲荷载,他建立了不同节点构造下交叉支撑面外失稳的计算模型推导了弹性支承杆的屈曲方程。并探究了支撑刚度与弹性支承杆稳定承载力的关系,进而绘制了不同支撑位置下计算长度系数随支撑刚度变化的诺模图。通过实例分析并结合 ANSYS 建立了相应的有限元模型并对其特征值屈曲分析,验证了推导过程的正确性^[23]。关建伟通过对输电塔两类常用不等边交叉斜材节间进行了稳定承载力试验研究,得到了在拉压比为 0.2 时交叉斜材的极限承载力、破坏形态以及交叉斜材内力情况。利用有限元分析软件 ABAQUS,进一步进行了各项参数对稳定承载力的影响。在此基础上,提出了适用于不等边角钢交叉斜材计算长度修正系数,与现有规范进行对比^[24]。

1 基本理论

细长压杆稳定性问题的本质是确定结构的临界载荷和屈曲模态。在有限元分析方法中,可以采用广义特征值线性屈曲分析法和非线性增量分析法求解。

1.1 广义特征值法^[25]

广义特征值法基于小位移、小应变的线弹性理论,即计算临界屈曲载荷的过程中忽略几何非线性以及变形对结构构型的影响,因此常用于线性屈曲分析。究其理论而言,首先根据最小势能原理,得到结构在轴力作用下的有限元平衡方程:

$$([K_E] + [K_G])\{U\} = \{P\} \quad (1)$$

式中 $[K_E]$ 为结构弹性刚度矩阵 $K_E = \int [B_0]^T [D] [B_0] dV$, $[K_G]$ 为结构几何刚度矩阵 $K_G = \int [C]^T [C] G dV$, $\{U\}$ 为单元节点位移向量, $\{P\}$ 为单元节点载荷向量。其中 $[K_E]$ 可以根据结构外形直接推导求出,而几何刚度矩阵 $[K_G]$ 和应力 $\{P\}$ 有关,因此假设单元几何刚度矩阵 $[K_G^0]$ 对应初始单元载荷 $[P^0]$,当结构线性屈曲时 $\{P\} = \lambda [P^0]$ 时,对应 $\lambda [K_G^0] = [K_G]$ 。

由于系统随遇平衡,故:

$$([K_E] + [K_G])\{\delta U\} = 0 \quad (2)$$

$$([K_E] + [K_G]) = 0 \quad (3)$$

$$([K_E] + \lambda [K_G^0]) = 0 \quad (4)$$

$$([K_E] + \lambda_i [K_a])\{\phi_i\} = 0 \quad (5)$$

式(5)为随遇平衡方程的特征值形式, 求解 λ_i 和 $\{\phi_i\}$ 即可得到结构的第 i 阶临界屈曲载荷系数和失稳模态。对于线性情况, 临界屈曲载荷为 $\lambda_i [P^0]$, 此类失稳多属于分支点失稳。

1.2 增量法^[25]

由于结构大多存在初始缺陷, 忽略几何非线性会大大降低结果的可靠性, 而且现实工程中的失稳大多属于极值点失稳, 因此非线性稳定性分析也十分重要。其中, 增量法是主要的分析方法之一, 它是广义特征值法的延伸, 即将整个非线性加载过程分解为 i 级线性过程的叠加, 通过逐步加载来逼近挠度曲线, 凭借迭代的收敛性判断非线性临界屈曲载荷。由于每一子步的计算都会考虑上一级的应力应变结果, 因此在计算步长充分细密的前提下, 本方法可以很好地追踪非线性加载的全过程。换言之, 程序通过判断有限元刚度矩阵的奇异性来判断临界屈曲载荷。

$$P_{cr} = \sum \delta P_i \quad (6)$$

式中: P_{cr} 为临界屈曲载荷; δP_i 是第 i 级单元载荷。

2 数值模拟

本文使用有限元模拟软件 Workbench 实现了对整体结构的参数建模以及有限元分析。

2.1 有限元模型

离散化是结构有限元分析的第一步, 旨在将连续体分割为有限自由度的单元集合。其中, 单元又分为实体单元、板壳单元、梁单元和杆单元, 具体类型需要根据实际模型进行取舍。就本文而言, 采用梁单元 (BEAM188) 作为有面外支撑杆的 X 撑结构线性和非线性屈曲分析的基本离散单元。该单元属于一种二节点的三维线性有限应变铁摩辛柯梁单元, 其中每个节点拥有三个平动自由度和三个转动自由度, 适用于模拟线性、大变形非线性问题, 常用于模拟细长杆结构。

材料层面, 设整体结构均由 Q235 钢构成, $E = 200000 \text{ MPa}$ 。另外, 模拟时忽略初始几何缺陷和残余应力的影响, 且默认加载过程中截面保持不变。由于模拟时考虑非对称形式的 X 撑结构, 故未对有限元模型进行对称简化, 即将整体结构纳入有限元计算, 以考察整体结构的临界屈曲情况。就边界条件设置而言, 面外支撑相当于弹性支架, 主要作支撑作用, 不考虑释放轴向自由度受拉力情况, 故面外支撑端和非加载端一样, 始终焊接在地面上, 于模拟中也就是相应端点和地面呈固定关系。加载端释放轴向位移, 并施加 1MPa 的单元载荷。最后回到 Workbench 中, 应该创建相互关联的静力学模块和特征值屈曲模块, 在静力学模块中定义位移边界和线性力边界, 在特征值模块中定义非线性力边界部分。

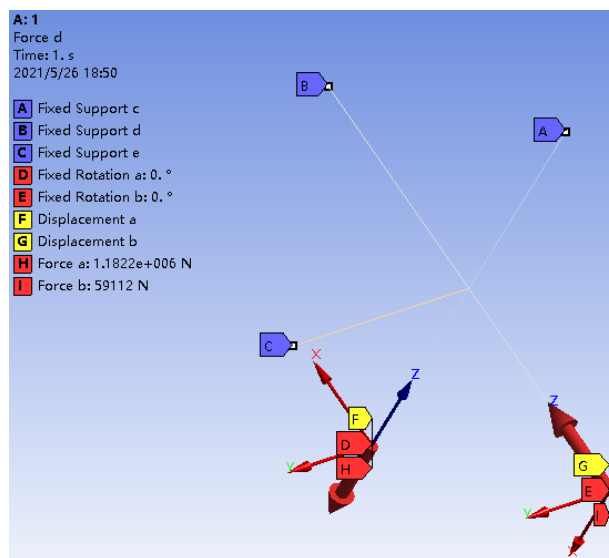


图3 有限元模型边界条件设置

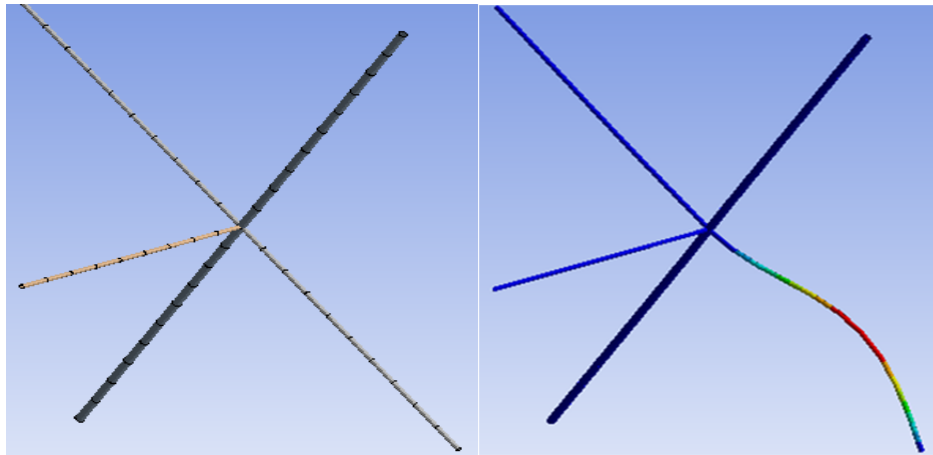


图4 离散化情况和临界屈曲构型

2.2 特征值屈曲模块

线性特征值屈曲模块基于广义特征值法,就本文而言,本模块主要用于模拟单杆受力和双杆受力(作用在两杆的力未知,但是已知两载荷的系数关系这两种情况。

值得注意的是,线性屈曲分析只需在静力学模块定义位移边界和力边界即可。最后计算出的屈曲载荷因子是应用静力学模块中所有线性单元载荷的结果,即所有载荷的缩放因子。简而言之,本文施加的是单位载荷,故屈曲载荷因子即实际临界屈曲载荷(MPa)。

$$F_{\text{线性屈曲}} = \lambda \times F_{\text{静力模块}} \quad (7)$$

非线性特征值分析主要用于非线性加载情况,在本文中,分析两杆受力时,已知一杆受到的恒定载荷,求另一杆临界屈曲载荷的情况需要使用。

不同于线性屈曲模块的分析,非线性屈曲分析的负载乘数仅对屈曲分析中的负载进行了缩放。对于非线性特征值屈曲分析模块,用于计算其极限屈曲载荷的方程是:

$$F_{\text{非线性屈曲}} = \lambda \times F_{\text{非线性模块}} + F_{\text{静力模块}} \quad (8)$$

3 正交试验设计和分析

简单结构的优化设计可以通过理论方法求解目标函数极值的方式实现,而对于复杂构型,由于参量增多,难以短时间内通过数学建模的方式求解到最优的结构设计方式。例如涉及文中影响有面外支撑杆的X撑结构稳定性的变量就有15个,传统的优化设计方式难以建立优化数学模型。面对这种情况,在优化设计早期可以采用数理统计配合有限元的新型设计方法,在统计学指导下科学地设计试验,模拟后根据数据尽快获得最优方案并尽量回归出近似的优化数学模型。

本文全面考察了各几何设计参数对有面外支撑杆的X撑结构稳定性的影响,结合正交试验方法和方差分析判断了各因素的显著性,并获得了一定范围内结构的最优设计方案。在所有几何设计参数显著性试验的基础上,本文筛选出了核心影响因素,再次采用正交试验方法进行模拟测试,最后通过非线性曲面回归建立了近似优化数学模型,从而达成有面外支撑杆的X撑结构稳定性的优化设计。

3.1 显著性试验

3.1.1 正交设计

正交试验直观、高效,通过少量代表性试验便可获得整体的发展趋势,是研究和处理多因素、长周期问题的有效手段。本方法的核心思想是:利用正交性从全体试验中挑选出有代表性的点进行测试,使这些代表点“均匀分散,齐整可比”,即满足均衡性和正交性要求。具体而言,均衡性指的是所有水平试验时出现的概率相同,正交性指的是任意两个因素的水平组合在整体试验中出现的概率相同。^[26]正确使用正交试验有利于保证质量的前提下尽量缩减试验的规模,结合方差分析还可以高效地从众多影响因素中筛选出主要矛盾。就本文而言,正交试验有利于探究各几何设计参数对临界屈曲载荷的影响程度,从而成为结构稳

定性优化设计的基石。而且分析结构外形可知,涉及的影响因素高达 15 个,只有通过正交试验才能高效、正确地 完成显著性试验。

显著性试验的主要目的是研究各设计参数对 X 撑细长压杆结构稳定性的影响程度,为下一阶段的优化设计提供参考。根据试验目的,本文选取结构的第一阶临界屈曲载荷作为结构稳定性评价指标,且此特征值越高代表结构约稳定。

设计之初,根据结构面内支撑杆的位移、力边界条件,将结构分为单杆受力和双杆受力两种情况,即分为两张正交表进行试验设计。此外,本试验着重于研究主效应对稳定性的影响,因此设计时不考虑各因素的交互影响。结构稳定性评价指标变化的原因称为影响因素,对于单杆受力情况,在几何设计参数层面考虑了各撑杆长度、外径、壁厚、面内支撑杆长度比例和各撑杆之间的角度关系对临界屈曲载荷的影响,力边界条件层面考虑了受压位置对临界屈曲载荷的影响,因此一共有 14 个因素。因素的各个状态称为水平,对于线性效应,每个效应只需 2 个水平便可反映变化趋势,而对于非线性效应,则应该结合工程应用背景取多个水平。结合正规正交表,本文选择了 4 水平和 8 水平搭配的表头设计方式,意图最大程度还原整体的变化趋势的同时保证模拟的效率,具体因素和选取的水平如表 1 所示。而对于双杆受力情况,除了考虑以上几大因素外,还考虑了面内支撑杆中不同加载模式对结构稳定性的影响:非屈曲杆受恒定载荷、比例载荷和拉压载荷,具体因素和所对应的水平见表 2。

表 1 和表 2 中,面外支撑长度为 L_3 ,面内支撑杆 AC、DB 长度对应 L_1 和 L_2 , D_{out-L} 、 T_L 为空心圆管的外部直径和壁厚,端点 A 至中心结点 O 与面内支撑杆 1 长度比例 $L_{11}=L_{A0}/L_1$,端点 D 至中心结点 O 与面内支撑杆 2 长度比例 $L_{22}=L_{D0}/L_2$,面内支撑夹角为 θ_x ,面外支撑夹角为 θ_{out} 。

表 1 有面外支撑杆的 X 撑结构单杆受力情况下正交设计因素水平表(显著性试验) $L_{64}(4^{10}8^4)$

序号	$\theta_x(^{\circ})$	θ_{out}	$L_3(mm)$	$T_{L_1}(mm)$	T_{L_2}	$D_{out-L_3}(mm)$	T_{L_3}	L_{11}	L_{22}					
1	120	120	60000	60	60	1000	60	0.7	0.7					
2	90	90	50000	45	45	760	45	0.6	0.6					
3	60	60	43600	28	28	600	28	0.5	0.5					
4	30	30	40000	15	15	400	15	0.4	0.4					
序号	D_{out-L_1}	D_{out-L_2}	L_1	L_2	位移约束									
1	1000	1000	130000	130000	端点 A 作为受载端,其余固定									
2	900	900	120000	120000										
3	800	800	110000	110000										
4	685	685	100000	100000						端点 B 作为受载端,其余固定				
5	600	600	90000	90000										
6	500	500	80000	80000										
7	400	400	70000	70000						端点 C 作为受载端,其余固定				
8	300	300	60000	60000										

表2 有面外支撑杆的X撑结构双杆受力情况下正交设计因素水平表(显著性试验) $L_{64}(4^{14}16^1)$

序号	$\theta_x(^{\circ})$	θ_{out}	$L_3(mm)$	$T_{L_1}(mm)$	T_{L_2}	$D_{out-L_3}(mm)$	T_{L_3}	L_{11}	L_{22}
1	120	120	60000	60	60	500	60	0.7	0.7
2	90	90	50000	45	45	380	45	0.6	0.6
3	60	60	43600	28	28	300	28	0.5	0.5
4	30	30	40000	15	15	200	15	0.4	0.4
序号	D_{out-L_1}	D_{out-L_2}	L_1	L_2	位移约束				
1	800	800	120000	120000	端点 AB 作为受载端, 其余固定				
2	685	685	100000	100000	端点 AD 作为受载端, 其余固定				
3	600	600	90000	90000	端点 BC 作为受载端, 其余固定				
4	500	500	80000	80000	端点 CD 作为受载端, 其余固定				
序号	力边界情况			序号	力边界情况				
1	L_1 作为屈曲杆, L_2 受 50MPa 压力			9	L_1 受 1MPa 拉力, 视 L_2 屈曲杆				
2	L_1 作为屈曲杆, L_2 受 10MPa 压力			10	L_1 受 10MPa 拉力, 视 L_2 屈曲杆				
3	L_1 作为屈曲杆, L_2 受 1MPa 压力			11	$\frac{P_1}{P_2} = -10, P_2 = 1MPa$				
4	L_1 作为屈曲杆, L_2 受 1MPa 拉力			12	$\frac{P_1}{P_2} = 0.1, P_2 = 1MPa$				
5	L_1 作为屈曲杆, L_2 受 10MPa 拉力			13	$\frac{P_1}{P_2} = 1, P_2 = 1MPa$				
6	L_1 受 50MPa 压力, 视 L_2 屈曲杆			14	$\frac{P_1}{P_2} = -1, P_2 = 1MPa$				
7	L_1 受 10MPa 压力, 视 L_2 屈曲杆			15	$\frac{P_1}{P_2} = -0.1, P_2 = 1MPa$				
8	L_1 受 1MPa 压力, 视 L_2 屈曲杆			16	$\frac{P_1}{P_2} = -10, P_2 = 1MPa$				

3.1.2 方差分析

方差分析(analysis of variances)是正交试验后处理的主要数理统计方法之一, 通过比较各列水平下系统的临界载荷来评估各影响因素的显著性水平, 即研究各因素和水平对结构稳定性的影响程度。

在多因素方差分析中, 评价指标受因素独立作用、水平间交互作用和随机误差影响。其中因素独立作用和水平间相互作用的总效应称为正交试验的主效应(main effect), 随机误差称为余差(residual effect)^{[26][27]}。具体而言, 假如正交试验被设计为 $L_n(m^i)$, 即试验涉及 m 个因素, 每个因素代号为 F_m , 且每个因素包括 i 个水平, 试验一共进行了 n 次, 试验代号为 x_n 。

$$SST = \sum_{i=1}^m SSF_i + \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m SSF_i F_j}{2} + SSE \quad (9)$$

$$SST = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n \left(x_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 = \sum x_i^2 + \frac{(\sum x_i)^2}{n} \quad (10)$$

式中, SST 是试验总变差, 反映了数据集中各组结果的差异性; SSF_m 是各因素独立作用造成的变差, 体现了 F_m 水平变化对结构稳定性的影响; $SSF_i F_j$ 是因素交互作用带来的变差; SSE 是随机误差。

考察单因素独立作用效果时, 可等效为单因素试验进行处理。因此, 下面将以 F_m 因素为例进行展开分析。因素 F_m 共有 i 个水平, 涉及 n 次试验, x_{jk} 代表 j 水平的第 k 次试验。

由于正交表具有均衡性和正交性，因此每列水平出现的次数相同，假设在 F_m 列各水平均出现了 a 次，则得到总试验次数和水平数量间关系 $n = a \times i$ 。同时可以计算出单因素独立作用变差：

$$SSF_m = \frac{\sum_{j=1}^i \left(\sum_{k=1}^a x_{jk} \right)^2}{a} - \frac{\left(\sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^a x_{jk} \right)^2}{n} \quad (11)$$

$$SSE = SST - SS_{\text{主效应}} = SST - SS_{\text{独立效应}} - SS_{\text{交互效应}} \quad (12)$$

由公式(10)可知，若某因素独立作用变差 SSF_i 较大，则会主导总变差 SST 的变化趋势。为量化各因素的影响程度，需要引入平均变差平方和 MS 和显著性差异水平 F 因子：

$$MSF_m = \frac{SSF_m}{i_m - 1} = \frac{SSF_m}{f_m} \quad (13)$$

$$MSE = \frac{SSE}{f_t - f_{\text{主效应}}} = \frac{SSE}{(n-1) - \sum f_m} \quad (14)$$

$$F_m^0 = \frac{MSF_m}{MSE} \quad (15)$$

式中， MSF_m 代表 F_m 因素的平均变差平方和； f_m 代表 F_m 因素的自由度； MSE 代表随机误差的平均变差平方和； f_t 代表整个实验的自由度； F_m^0 代表 F_m 因素的显著性因子。由于本次试验不考虑交互项的影响，故 $f_{\text{主效应}} = f_{\text{交互项}} + f_{\text{独立}} = f_{\text{独立}}$ 。

最后应该根据因素和随机误差的自由度查 F 分布表^{[26][27]}，以获得对应观测值 $F_m(f_m, f_E)$ 和检验水平 P 。 $F_{\text{实际值}} \geq F_m(f_m, f_E)$ ，即 $p \leq 0.05$ ，代表 F_m 因素影响显著，而 $F_{\text{实际值}} < F_m(f_m, f_E)$ ，即 $p > 0.05$ ，代表 F_m 因素影响有限。

对于单杆受力情况，本文借助多因素方差分析，后处理了表 1 的正交试验结果，计算了各因素的变差平方和、自由度和显著性 F 因子，得到了主体间效应检验表 3。

表 3 单杆受力主体间效应检查表

因素	3 类平方和	自由度	均方	F	P
模型	14108453.695a	59	239126.334	9.406	0.010
位移约束	85856.108	3	28618.703	1.126	0.422
θ_x	305812.973	3	101937.658	4.010	0.085
θ_{out}	18176.109	3	6058.703	0.238	0.866
L_3	538807.391	3	179602.464	7.065	0.030
$D_{\text{out-L}_1}$	959304.097	7	137043.442	5.391	0.041
T_{L_1}	47521.955	3	15840.652	0.623	0.630
$D_{\text{out-L}_2}$	1424227.437	7	203461.062	8.003	0.018
T_{L_2}	57036.889	3	19012.296	0.748	0.568
$D_{\text{out-L}_3}$	47155.039	3	15718.346	0.618	0.633
T_{L_3}	373222.497	3	124407.499	4.894	0.060
L_{11}	294728.753	3	98242.918	3.865	0.090
L_1	851003.747	7	121571.964	4.782	0.052
L_{22}	337035.378	3	112345.126	4.419	0.072
L_2	663229.821	7	94747.117	3.727	0.083
误差	127108.397	5	25421.679		
总计	14235562.092	64			

注：R 方=0.991

根据上表可知, 影响因子 R 方(99.1%)大于 85.0%, 证明了本次正交试验囊括了影响有面外支撑杆 X 撑结构稳定性的绝大多数因素。进一步分析检验水平可知: 面外支撑杆长度、杆 1 外径、杆 2 外径组间差异明显($P_{L_3} < 0.05$, $P_{D_1} < 0.05$, $P_{D_2} < 0.05$), 换言之这三个因素主导了有面外支撑杆 X 撑结构临界屈曲的变化趋势。其余因素的检验水平 $P \geq 0.05$, 具有方差齐性即不存在显著性差异, 也就是说它们对本模型临界屈曲载荷的影响较小。

接下来通过 F 检验确认了以上三因素对系统影响程度的差异性。查表 3 知面外支撑长度的 $F_{L_3} = 7.065$, 杆 1 外径的 $F_{R_1} = 5.391$, 杆 2 外径的 $F_{R_2} = 8.003$, 对比分析可知, $F_{R_2} > F_{L_3} > F_{R_1}$, 也就是杆 2 外径对此模型临界屈曲载荷的影响最大, 面外支撑长度和杆 1 外径的影响次之。简而言之, 对于单杆受力情况, 面内支撑圆管外径和面外支撑长度对系统临界屈曲载荷的影响程度高。

双杆受力正交试验的后处理方式和单杆受力情况类似, 使用多因素极差分析的方式检验了边界条件、所有几何设计参数对有面外支撑杆 X 撑结构稳定性的影响程度, 计算了各因素的变差平方和、自由度和显著性 F 因子, 得到了主体间效应检验表 4。

表 4 双杆受力主体间效应检查表

因素	3 类平方和	自由度	均方	F	P
模型	5686545.741a	58	98043.892	25.055	0.000
位移边界	13876.926	3	4625.642	1.182	0.392
力边界	475980.219	15	31732.015	8.109	0.008
θ_x	73142.515	3	24380.838	6.230	0.028
θ_{out}	6083.018	3	2027.673	0.518	0.685
L_3	48141.452	3	16047.151	4.101	0.067
D_{out-L_1}	37608.429	3	12536.143	3.204	0.105
T_{L_1}	75170.932	3	25056.977	6.403	0.027
D_{out-L_2}	238940.241	3	79646.747	20.354	0.002
T_{L_2}	16427.076	3	5475.692	1.399	0.331
D_{out-L_3}	31915.674	3	10638.558	2.719	0.137
T_{L_3}	90705.240	3	30235.080	7.727	0.017
L_{11}	141599.832	3	47199.944	12.062	0.006
L_1	113394.121	3	37798.040	9.659	0.010
L_{22}	33796.245	3	11265.415	2.879	0.125
L_2	79174.031	3	26391.344	6.744	0.024
误差	23478.903	6	3913.150		
总计	5710024.644	64			

注: R 方=0.996

分析表 4 可知, 影响因子 R 方(99.6%)大于 85.0%, 证明本次正交试验具有统计学意义。根据检验水平可知, 杆 2 半径、杆 1 长度比例、力边界条件、杆 1 长度、面外支撑壁厚、杆 2 长度、杆 1 壁厚和 X 撑夹角对临界屈曲载荷影响显著, 其余因素具有方差齐性, 对结构稳定性的影响有限。

此外, 由于力边界条件包括比例加载和非屈曲杆受恒定载荷两种加载模式, 从图 3 可以看出, 比例加载模式下结构的临界屈曲载荷更低, 且不同水平对稳定性的影响更为剧烈。故优化设计围绕比例加载模式下结构的屈曲情况进行研究。

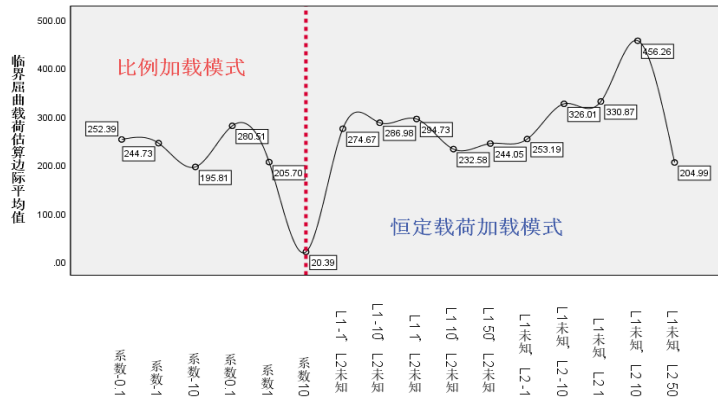


图5 加载模式临界屈曲载荷估算边际平均值

接下来通过 F 检验^[27]确认了以上因素对系统影响程度的差异性。查表 4 可知影响程度由大到小依次是杆 2 半径 $F=20.354$ 、杆 1 长度比例 $F=12.062$ 、力边界条件 $F=9.659$ 、杆 1 长度 $F=8.109$ 、面外支撑壁厚 $F=7.727$ 、杆 2 长度 $F=6.744$ 、杆 1 壁厚 $F=6.403$ 、X 撑夹角 $F=6.23$ 。总的来说，相较于单杆受力情况，双杆受力情况会复杂化有面外支撑杆 X 撑结构的力学环境，其非线性更加突出。就统计学结果而言，加载位置、面外支撑夹角、面外支撑外径对结构稳定性的影响有限，其余参数对临界屈曲载荷都有相当的影响，且面内支撑杆外径、长度比例和加载方式对临界屈曲的影响程度最高。

综上所述，研究单杆受力有面外支撑杆 X 撑结构稳定性优化模型时可以考虑面内支撑外径大小和面外支撑的长度的影响。对于双杆受力情况，可以考虑面内支撑杆外径、长度比例、长度、加载比例的作用。

3.2 优化设计

虽然显著性试验全面考虑了各种设计参数对结构稳定性的影响，但这也带来一个问题：研究重点不够突出，核心因素的水平数量有限，这就意味着难以根据现有数据挖掘出较为准确的临界屈曲载荷总体变化趋势。因此为优化设计提供更好的数据支持，本文在显著性试验的基础下进行了优化设计正交试验。

3.2.1 正交设计

对于结构单杆受力情况下的正交设计，在主体效应表 3 的指导下，选取了组间差异明显的面外支撑长度 L_3 、面内支撑杆外径 R_1 和 R_2 作为自变量，其余设计参数固定，并以一阶临界屈曲载荷作为稳定性的评价标准。通过查阅正规正交表，最终选择了 3 因素 9 水平的表头设计方式，具体因素和水平设计如表 5 所示。

表 5 单杆受力情况下优化设计因素水平表 $L_{81}(3^9)$

序号	$L_3(mm)$	$D_{out-L_1}(mm)$	$D_{out-L_2}(mm)$
1	56000	300	200
2	58000	400	260
3	60000	500	320
4	62000	600	380
5	64000	700	440
6	66000	800	500
7	68000	900	560
8	70000	1000	620
9	72000	1100	680

固定因子					
位移边界条件		L_{11}	L_1	L_{22}	L_2
允许 d 端点的轴向位移		0.5	100000	0.5	100000
θ_x	θ_{out}	T_{L_1}	T_{L_2}	D_{out-L_3}	T_{L_3}
90	90	28	28	762	28

虽然有面外支撑杆 X 撑结构在双杆受力时，其稳定性变化和所有设计参数都有一定程度的关联，但是各因素的显著性却有差异。因此优化设计时考虑组间差异最为明显的前 4 个设计参数作为非线性回归的自变量，分别是面内支撑杆外径 D_{out-L_2} 、杆长度比例 L_{11} 、长度 L_1 和载荷的比例。其余设计参数固定，并以一阶临界屈曲载荷作为评价指标。最后，选择了 4 因素 9 水平的正规正交表，具体因素和水平设计如表 6 所示。

表 6 双杆受力情况下优化设计因素水平表 $L_{81}(4^9)$

序号	$D_{out-L_2} (mm)$	L_{11}	$L_1 (mm)$	P_{L_1} / P_{L_2}	
1	200	0.68	110000	-10	
2	300	0.70	120000	-1	
3	400	0.72	125000	1	
4	500	0.74	130000	3	
5	600	0.76	135000	6	
6	700	0.78	140000	9	
7	800	0.80	145000	12	
8	900	0.82	150000	15	
9	1000	0.84	155000	18	
固定因子					
位移边界条件		L_3	D_{out-L_1}	L_{22}	L_2
允许 ab 端点的轴向位移		43586	1372	0.5	100000
θ_x	θ_{out}	T_{L_1}	T_{L_2}	D_{out-L_3}	T_{L_3}
90	90	28	28	762	28

3.2.2 优化设计数学模型

优化设计的核心是将工程问题数字化。首先，应该明确模型的自变量，即影响结构稳定性的显著影响因素。选取优化设计数学模型自变量的方法和显著性正交试验的后处理方式相同，可以使用多因素方差分析方法，筛选出显著影响因素以供后续方程回归使用。

具体而言，经数学处理后，单杆受力情况下正交试验的主体间效应如表 7 所示： R 方=99.6%>85.0%， $P_{D_1} < 0.05$ ， $P_{D_2} < 0.05$ ， $P_{L_3} > 0.05$ ，因此本优化设计正交试验具有统计学意义，在排除大量次要设计因素干扰的前提下，面内支撑杆外径对结构稳定性的影响显著，且影响程度远大于面外支撑长度对结构稳定性的影响，显著影响因素归一化系数对结构稳定性的影响见图 4。综上所述，面内支撑杆外径参与单杆受力情况下结构优化设计数学模型的建模。

表 7 单杆受力情况下优化设计的主体间效应检验表

因素	3 类平方和	自由度	均方	F	P
模型	135317.978	25	5412.719	557.400	0.000
L_3	11.081	8	1.385	0.143	0.997
D_1	679.587	8	84.948	8.748	0.000
D_2	35986.111	8	4498.264	463.230	0.000
误差	534.086	55	9.711		
总计	135852.064	80			

注：R 方=0.996

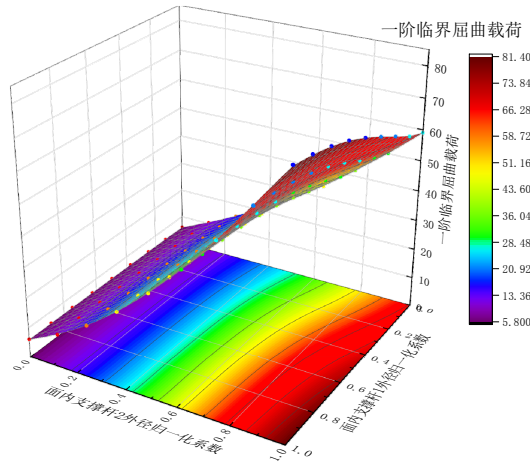


图6 单杆受力时显著因素的影响程度

而对于双杆受力情况，分析结果如表8所示， $R^2=86.2\% > 85.0\%$ ， $P_{D_2} < 0.05$ ， $P_{\text{系数}} < 0.05$ ， $P_{L_1 \text{长度比例}} < 0.05$ ，因此本优化设计正交试验具有统计学意义，且面内支撑杆杆2外径、比例载荷系数、面内支撑杆杆1长度比例，即面外支撑杆于面内位置对结构稳定性的影响显著。将自变量归一化后可得到有关双杆受力时结构稳定性的3D三元曲面图5，可见当三者归一化系数均等于0.5时，结构稳定性最好，即对应 $D_2 = 600\text{mm}$ ， $P_1/P_2 = 6$ ， $L_{11} = L_{A0}/L_1 = 0.76$ 。另外，长度比例失调、面内支撑杆半径过小会大大危险结构稳定性。由于采用非线性曲面回归方法分析影响因素对结构稳定性的影响，且 $F_{\text{比例载荷系数}} > F_{D_2} > F_{L_{11}}$ ，因此选择前二者为非线性回归自变量。

表8 双杆受力情况下优化设计的主体间效应检验表

因素	3类平方和	自由度	均方	F	P
模型	179991.927	33	5454.301	9.072	0.000
D_2	23265.327	8	2908.166	4.837	0.000
L_1	1003.046	8	125.381	0.209	0.988
L_{11}	16069.058	8	2008.632	3.341	0.004
比例载荷系数	67783.308	8	8472.914	14.093	0.000
误差	28858.303	48	601.215		
总计	208850.230	81			

注：R方=0.862

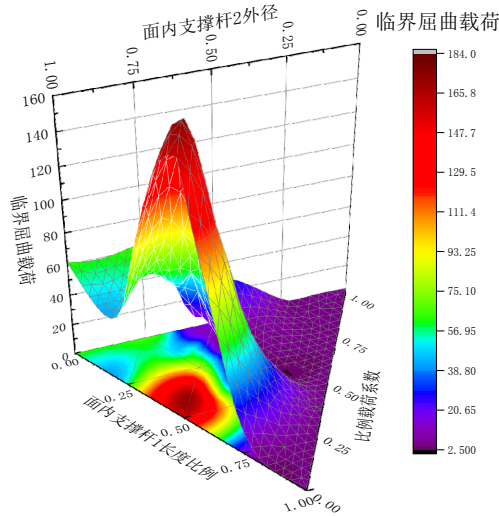


图7 双杆受力时显著因素的影响程度

3.2.3 非线性曲面回归

非线性曲面回归研究的是因变量 z 和确定变量 x 、 y 的相关关系，对于单杆受力情况采用 Gaussian2D 模型：

$$z = z_0 + A \cdot \exp \left(\begin{array}{l} -\frac{1}{2} \left(\frac{x \cdot \cos(\theta) + y \cdot \sin(\theta) - xc \cdot \cos(\theta) - yc \cdot \cos(\theta)}{w_1} \right)^2 \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{-x \cdot \sin(\theta) + y \cdot \cos(\theta) + xc \cdot \sin(\theta) - yc \cdot \cos(\theta)}{w_2} \right)^2 \end{array} \right) \quad (16)$$

式中 z_0 、 A 、 θ 、 xc 、 yc 、 w_1 、 w_2 是回归参数，根据样本数据，采用最小二乘法估计最优回归参数，使实测值 z_i 和回归值 \hat{z}_i 的离差平方和最小。

$$(S_i)_{\min} = \sum_{i=1}^n (z_i - \hat{z}_i)^2 \quad (17)$$

经 SPSS 回归计算后，各回归系数 z_0 、 A 、 θ 、 xc 、 yc 、 w_1 、 w_2 分别是 -10.88、252.77、0.18、1149.01、710.84、745.72 和 228.96，因此非线性回归方程为：

$$z = -10.88 + 252.77 \cdot \exp \left(\begin{array}{l} -\frac{1}{2} \left(\frac{x \cdot \cos(0.18) + y \cdot \sin(0.18) - 1149.01 \cdot \cos(0.18) - 710.84 \cdot \cos(0.18)}{745.72} \right)^2 \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{-x \cdot \sin(0.18) + y \cdot \cos(0.18) + 1149.01 \cdot \sin(0.18) - 710.84 \cdot \cos(0.18)}{228.96} \right)^2 \end{array} \right) \quad (18)$$

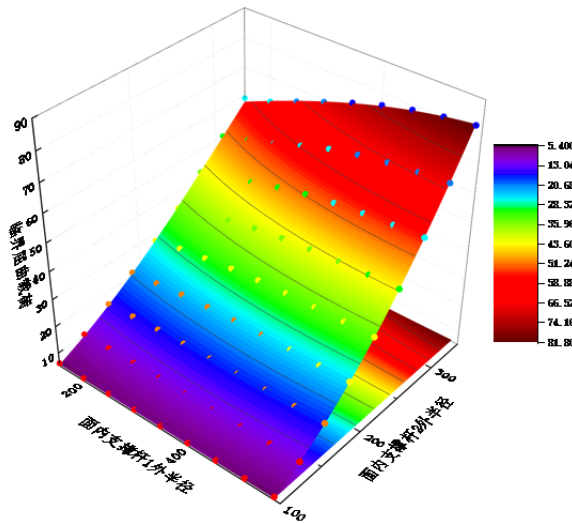


图8 单杆受力 Gaussian2D 回归效果

对于双杆受力情况，采用类似的非线性曲面回归方法：结合 Rational2D 模型和 Levenberg-Marquardt 优化算法进行拟合。

$$z = \frac{z_0 + A_{01}x + B_{01}y + B_{02}y^2 + B_{03}y^3}{1 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + B_1y + B_2y^2} \quad (19)$$

式中 z_0 、 A_{01} 、 B_{01} 、 B_{02} 、 B_{03} 、 A_1 、 A_2 、 A_3 、 B_1 、 B_2 是回归参数，经 SPSS 计算后可得对应系数为 -19.04、0.18、0.31、0、0、0.05、0.01、0、0、0。最终回归方程变为：

$$z = \frac{-19.04 + 0.18x + 0.31y}{1 + 0.05x + 0.01x^2} \quad (20)$$

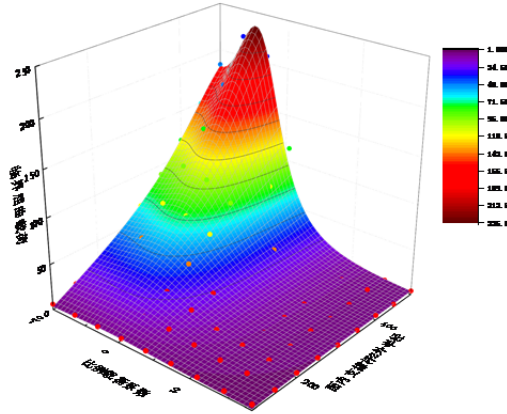


图9 双杆受力 Rational2D 回归效果

临界屈曲载荷是评价结构稳定性的核心指标，在有面外支撑 X 撑杆结构单杆受力时，面内支撑外径的影响显著：撑杆的外径和结构稳定性呈正相关。而对于双杆受力情况，首先在几何层面，面外支撑于面内结点位置、面内支撑外径都会显著影响结构稳定性，但后者的影响力更大，经回归分析后可知：面内支撑杆半径越大，结构抗屈曲能力也越强。对于力边界条件的影响而言，比例载荷、恒定载荷都会对结构稳定性造成相当的影响，但是前者的组件差异更为显著。此外，当面内支撑非屈曲杆受拉力时，结构稳定性会有所提升，且比例载荷系数是 4.85 倍时，结构的稳定性最佳。

4 结论

本文使用了数理统计加有限元模拟的新型优化设计方法研究了有面外支撑 X 撑杆结构在单杆受力和双杆受力时的结构稳定性，为实际工程应用和复杂非线性问题提供了一种高效的解决思路。具体而言，首先通过正交设计和有限元分析完成了结构的显著性试验，并借助多因素方差分析从全面设计参数中筛选出显著影响因素。然后，在上述结论的指导下，完成了更为细致的优化设计正交试验，并通过非线性曲面回归方法得到了显著因素和临界屈曲载荷的经验公式。

研究发现，在几何设计参数层面，面内支撑设计参数对结构稳定性的影响远高于面外支撑设计参数，其中面内支撑外径的影响最为显著，且外径越大结构稳定性越好。但是面外支撑位置，即面内支撑结点位置会显著影响结构的稳定性。在边界条件层面，结构稳定性对于面内支撑双杆受力情况非常敏感，其中比例载荷的影响高于恒定载荷，且当非屈曲杆受拉力时，结构稳定性会有所改善。最后，临界屈曲载荷和面内支撑载荷比例之间存在非常强的非线性关系，就本次试验而言，当拉力是屈曲载荷的 4.85 倍时，结构的稳定性最好。

就未来而言，可以围绕面外支撑节点位置和面内支撑非屈曲杆所受载荷对有面外支撑 X 撑杆结构的稳定性影响展开理论、数值、实验分析。

参考文献：

- [1] 陆文发. 近海导管架平台[M]. 北京:海洋出版社, 1992.
Lu Wenfa. Offshore jacket platform[M]. Beijing:Ocean Publishing House, 1992.
- [2] 陈安龙. 新型抗震导管架力学特性研究[D]. 大连理工大学,2020.
Chen Anlong. Study on Mechanical Properties of New Anti-seismic Jacket[D]. Dalian University of Technology, 2020.
- [3] 强士中. 桥梁工程[M]. 北京:高等教育出版社, 2011.
Qiang Shizhong. Bridge engineering [M]. Beijing:Higher Education Press, 2011.
- [4] 李自林. 桥梁工程[M]. 武汉:华中科技大学出版社, 2007.
Li Zilin. Bridge engineering [M]. Wuhan:Huazhong University of Science and Technology Publishing House, 2007.
- [5] 杜柏松,罗碧荣. 十字交叉吊杆拱桥支座更换顶升方案研究[J].公路交通技术,2012(04):70-73.
Du Baisong, Luo Birong. Research on Jacking Plans for Replacement of Supports of Crossing Suspender Arch Bridge[J]. Highway Traffic Technology, 2012(04): 70-73.

- [6] GB 50906-2013 机械工业厂房结构设计规范[S]. 北京:中国建筑工业出版社, 2010.
GB 50906-2013 Code for design of machinery industry workshop structures[S]. Beijing:China Architecture Industry Press, 2010.
- [7] 郑天厚. 浅谈钢管桁架结构在油田地面建设中的应用[J]. 中国石油和化工标准与质量, 2012, 33(15): 176-177.
Zhen Tianhou. Application of steel tube truss structure in oil field surface construction[J]. Chinese Petroleum and Chemical Standards and Quality, 2012, 33(15): 176-177.
- [8] GB 50017-2017 钢结构设计规范[S]. 北京:中国建筑工业出版社, 2017.
GB 50017-2017 Steel Structure Design Code[S]. Beijing:China Architecture Industry Press, 2017
- [9] Jiho Moon, Ki-Yong Yoon, Tong-Seok Han, Hak-Eun Lee. Out-of-plane buckling and design of X-bracing systems with discontinuous diagonals[J]. Journal of Constructional Steel Research, 2007, 64(3)
- [10] JGJ99-2015 高层民用建筑钢结构技术规程[S]. 北京:中国建筑工业出版社, 2015.
JGJ99-2015 Technical specification for steel structure of tall building[S]. Beijing:China Architecture Industry Press, 2015
- [11] 陈绍蕃. 塔架交叉斜杆考虑屈曲相关性的稳定承载力[J]. 土木工程学报, 2011, 44(01): 19-28.
Chen Shaofan. Stability capacity of tower cross-bracings taking account of interaction in buckling[J]. Journal of Civil Engineering, 2011, 44(01): 19-28
- [12] DL/T 5154—2002 架空送电线路杆塔结构设计技术规定[S]. 北京:中国电力出版社, 2012.
DL/T 5154—2002 Technical code for the design of tower and pole structures of overhead transmission line[S]. Beijing:China Electric Power Press, 2012.
- [13] Knapp, A.E.. The Use of X-Bracing in Fixed Offshore Platforms[J]. Society of Petroleum Engineers Journal, 1973, 13(02).
- [14] Stoman S H. Stability Criteria for X-Bracing Systems[J]. Journal of Engineering Mechanics, 1988, 114(8): 1426-1434.
- [15] Shadnam M R, Abbasnia R. Stability of pretwisted beams in cross bracings[J]. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, 2002, 43(2): 328-335.
- [16] 张一舟, 王元清. 大型电除尘器钢结构支架承载性能的非线性有限元分析[J]. 煤矿机械, 2006(12): 58-60.
Zhang Yizhou, WANG Yuan qing. Nonlinear Finite Element Analysis on Bearing Capability of Steel Supporting Frame for Large-scale Electrostatic Precipitator[J]. Coal Mine Machinery, 2006(12): 58-60.
- [17] 董一萌. 管桁架的平面外稳定问题的研究[J]. 结构工程师, 2006(04): 18-23.
Dong Yimeng. Research on the Out-Plane Stability Problems of Tube-Truss Structures[J]. Structure Engineers, 2006(04): 18-23.
- [18] 李雪, 李宏男, 黄连壮. 高压输电线路覆冰倒塔非线性屈曲分析[J]. 振动与冲击, 2009, 28(05): 111-114.
Li Xue, Li Hongnan, Huang Lianzhuang. Nonlinear buckling analysis of ice-covered inverted tower of high voltage transmission line[J]. Journal of Vibration and Shock, 2009, 28(05): 111-114.
- [19] 闫龙海. 基于正交试验方法的薄壁压杆截面优化分析[D]. 哈尔滨工业大学, 2009.
Yan Longhai. Section optimum analysis of thin-walled compressive bar based on orthogonal experimental method[D]. Harbin Institute of Technology, 2009.
- [20] 柳胜, 彭文刚, 彭宝林. 基于ANSYS的滚珠丝杠副屈曲分析[J]. 四川兵工学报, 2010, 31(02): 139-141.
Liu Sheng, Peng Wengang, Peng Baolin. The buckling analysis of ball screw pair based on ANSYS[J]. Journal of Sichuan Ordnance Engineering, 2010, 31(02): 139-141.
- [21] 刘文涛, 陈冰冰, 高增梁. ANSYS特征值法在计算外压圆筒弹性失稳中的应用讨论[J]. 压力容器, 2012, 29(05): 20-25, 41.
Liu Wentao, Chen Bingbing, Gao Zengliang. Application of ANSYS LBA in Critical Buckling Pressure of Cylinder Subjected to External Pressure[J]. Pressure Vessel, 2012, 29(05): 20-25, 41.
- [22] 李鸿维. 板式连接的中心支撑的计算长度系数研究[D]. 哈尔滨工业大学, 2016.
Li Hongwei. Study on the effective length factor of concentrically braced member with gusset plate connections[D]. Harbin Institute of Technology, 2016.
- [23] 刘卓. 交叉支撑体系稳定性分析[D]. 昆明理工大学, 2017.
Liu Zhuo. Stability Analysis of Cross Brace Systems[D]. Kunming University of Science and Technology, 2017.
- [24] 关建伟. 输电塔不等边角钢交叉斜材稳定承载力研究[D]. 重庆大学, 2018.
Guan Jianwei. Study on Stable Bearing Capacity of X-Braced Truss Structure of Unequal-Angle Steel in Transmission Tower[D]. Chongqing University, 2018.
- [25] 杨炳成. 结构有限元分析[M]. 西安:西北工业大学出版社, 1996.
Yang Bingcheng. Structural finite element analysis [M]. Xi'an: Northwest University of Technology Press, 1996
- [26] 杜茂林, 王福彦. 医学统计学[M]. 北京:人民军医出版社, 2015.11.
Du Maolin, Wang Fuyan. Medical statistics [M]. Beijing: People's military medical press, November 2015
- [27] 朱明德. 方差分析与试验设计[M]. 武汉:湖北科学技术出版社, 1989.06.
Zhu Mingde. Analysis of variance and experimental design [M]. Wuhan: Hubei science and Technology Press, 1989.06