

高超声速 MHD 球头激波脱体距离理论求解¹⁾李逸翔^{*,†} 汪 球^{*,2)} 罗 凯^{*,†} 李进平^{*} 赵 伟^{*,†}^{*}(中国科学院力学研究所高温气体动力学国家重点实验室, 北京 100190)[†](中国科学院大学工程科学学院, 北京 100049)

摘要 高超声速飞行器强激波后高温气体形成具有导电性的等离子体流场, 电离气体为磁场应用提供了直接工作环境, 磁流体流动控制技术利用外加磁场影响激波后的离子或电子运动规律, 这可以有效改善高超声速飞行器气动特性. 激波脱体距离作为高超声速磁流体流动控制较为直观的气动现象, 受到研究者重点关注; 磁场添加后激波脱体距离发生变化, 其变化幅度直接反映磁控效果, 然而基于高超声速磁流体流动控制的相关理论模型较少, 需要进一步发展. 本文基于低磁雷诺数假设和偶极子磁场分布的条件, 通过对连续方程沿径向积分以及对动量方程采用分离变量的方法, 推导了高超声速磁流体流动控制下的球头激波脱体距离解析表达式. 理论分析结果表明, 激波脱体距离随着磁相互作用系数的增加而变大; 随着来流速度的增加, 磁相互作用系数变为影响激波脱体距离大小的主要因素. 本文理论模型可以达到快速评估磁控效果的目的, 对高超声速磁流体流动控制实验方案设计和结果分析具有一定的指导意义.

关键词 高超声速, 磁流体动力学, 激波脱体距离, 流动控制

中图分类号: O361.3 文献标识码: A doi: 10.6052/0459-1879-21-127

THEORETICAL ANALYSIS ON HYPERSONIC MHD SHOCK STAND-OFF DISTANCE OF BLUNT BODY¹⁾Li Yixiang^{*,†} Wang Qiu^{*,2)} Luo Kai^{*,†} Li Jinping^{*} Zhao Wei^{*,†}^{*}(State Key Laboratory of High Temperature Gas Dynamics, Institute of Mechanics, Chinese Academy Sciences, Beijing 100190, China)[†](School of Engineering Sciences, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

Abstract High speed and shock compression behind the bow shock of an aircraft head result in very high temperature, which would subsequently lead to a conductivity plasma flowfield around the vehicle. The plasma gas provides a direct working environment for the application of magnetic field. The magnetohydrodynamic (MHD) flow control, which uses the magnetic field to alter the trajectory of ions or electrons, can improve the aerodynamic characteristics of hypersonic vehicles effectively. As an intuitive aerodynamic phenomenon in the field of hypersonic MHD flow control, shock stand-off distance has attracted close attention from researchers. Under the influence of the applied magnetic field, the shock stand-off distance will change with it, of which the value can directly reflect the effect of the MHD flow control. However, the relevant theoretical models are still limited, and further development in this field is consequently needed. Focusing on dealing with this problem, MHD hypersonic shock stand-off distance of the spherical model is theoretically

2021-03-30 收稿, 2021-08-02 录用, 2021-08-04 网络版发表.

1) 国家自然科学基金 (12072352) 和中国科学院青年创新促进会 (2021020) 资助项目.

2) 汪球, 高级工程师, 主要研究方向: 高焓气动物理与应用. E-mail: wangqiu@imech.ac.cn

引用格式: 李逸翔, 汪球, 罗凯, 李进平, 赵伟. 高超声速 MHD 球头激波脱体距离理论求解. 力学学报, 2021, 53(9): 2493-2500

Li Yixiang, Wang Qiu, Luo Kai, Li Jinping, Zhao Wei. Theoretical analysis on hypersonic MHD shock stand-off distance of blunt body. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2021, 53(9): 2493-2500

studied in this paper. By means of radially integrating the continuity equation and applying mathematical method of variable separation to the momentum equation, the analytical expression of MHD shock stand-off distance is obtained. The theoretical analysis was performed under the assumption of low magnetic Reynolds number, and the common-used dipole distribution of magnetic field as applied. The results show that the MHD stand-off distance of shock increases with the increase of magnetic interaction parameter. Moreover, the regularity can be found that as the speed of inflow becomes higher, magnetic interaction parameter can be viewed as the primary impact factor of shock stand-off distance under hypersonic condition. The theoretical model in this work can rapidly evaluate the effect of MHD control, and it can provide theoretical guidance to the design of experiment scheme and the analysis of results.

Key words hypersonic, magnetohydrodynamic, shock stand-off distance, flow control

引言

新一轮的高超声速技术对飞行器在“极端”环境和“极端”动力条件下的飞行提出了新的挑战,它也面临降热、减阻、控制等一系列的难题.当飞行器以高超声速飞行时,头部弓形会由于激波压缩和黏性阻滞减速而产生高温,其温度高达几千度甚至上万度,高温下气体化学反应产生的离子和电子在飞行器周围形成一个等离子体鞘层.高超声速 MHD 流动控制是利用飞行器内部布置的磁场与电离气体的相互作用来达到流动控制的目的.它作为一种非接触的主动流动控制方法,在飞行器气动力操控、热环境管理、“电磁窗口”减弱“黑障”、“电磁舵面”飞行姿态控制、磁流体发电等领域均有广阔的应用前景,受到国内外的广泛关注^[1-3].

实验研究、数值模拟和理论分析是研究科学问题的常用手段,三者相辅相成.高超声速 MHD 流动控制的研究对实验条件要求较高,需要高超声速设备能够模拟高速飞行状态下的来流以及产生高磁场强度的磁场发生装置;同时,电磁干扰以及脉冲设备较短的实验时间也会带来测量方面的困难^[4].由于当前实验可进行测量的物理量较为有限,所以研究主要是针对激波脱体距离^[5-8]、模型气动力(阻力/磁阻力等)^[8-12]以及模型表面热流^[13]等方向来开展,但总体来讲,随着高超声速地面设备模拟能力及电磁技术的发展,越来越多的学者考虑通过地面实验来研究磁场流动控制的效果及规律.

数值模拟相较于实验研究而言,所需要的研究成本大为降低,通过数值模拟可以得到全场信息,有助于直观地了解流场规律.经过近二三十年的发展,尤其是对计算格式的不断修正^[14-18],MHD 数值模拟发挥着越来越重要的作用.然而,MHD 涉及多

种复杂物理现象,包括产生和维持带电粒子的过程、带电粒子与磁场的作用、非平衡能量输运机理以及电磁场中的霍尔效应等,每一种效应都包含复杂的规律,即使是全 MHD 的数值模拟也是基于一些简化假设(如电磁介质各向同性、无磁极化、忽略粒子滑移等).因此,MHD 数值模拟也亟待可靠的 MHD 流动控制实验数据来对计算方法及结果进行校验.同时,在相同的计算条件下,它往往要比 CFD 模拟耗费更大的计算量;除了 CFD 模拟存在的问题外,MHD 模拟还存在一些如磁场散度、全 MHD 奇异性、导电壁面边界等特有的问题^[19].

基于高超声速 MHD 的理论研究虽然起步非常早,但相比于实验研究和数值模拟,其研究工作仍然非常有限,且成果主要集中于二十世纪五六十年代.较为经典的是 Bush^[20]的研究工作,他在激波层内常密度、常电导率、无黏、球形激波等假设下,采用分离变量的方法求解流动方程和电磁方程,将复杂的偏微分方程组化简为常微分方程组,以转化为一个初值问题进行离散求解. Smith 和 Wu^[21]、Porter 和 Cambel^[22]沿用 Bush 的方法,分别研究了黏性系数和 Hall 效应的影响.该领域其他方面的理论研究工作也在同时期展开, Ludford 和 Murray^[23]研究了不可压缩无黏导电流体流经磁化球的稳态流动问题. Meyer^[24]采用 Newton-Plus-Centrifugal 近似方法,发展了 MHD 回转体稳态流动理论. Lykoudis^[25]引入 Newton-Busemann 压力定律,通过对无黏动量方程进行积分得到激波脱体距离的表达式. Erison 和 Maciulaitis^[26]研究了高度-速度图上的电离流与磁场相互作用的分布范围,并进一步评估了较强相互作用流态下的磁流体控制作用力. Hooks 和 Lewis^[27]基于激波坐标系和物体坐标系之间的关系,得到了驻点处的无黏速度梯度、物体周围的静压分布和边

界层外沿的速度分布等. 激波脱体距离作为高超声速飞行器飞行问题中的一个重要参数, 是气动领域研究的关注重点之一. 然而, 上述理论工作对于磁场影响下激波脱体距离的研究相对较少, 相关结果也较为有限. 有学者采用的方法虽然可以得到驻点线附近的流场信息, 但其求解过程和结果不能直观快速的反映磁控效果, 有一定局限性^[20-22]; 另一方面, Lykoudis^[25]、Hooks 和 Lewis^[27] 对激波脱体距离解析形式的理论推导是基于激波层内磁场方向处处垂直于流速方向的条件下进行的, 该类型磁场可与电离流充分作用, 然而其分布形式较为理想, 且积分形式的激波脱体距离表达式需要进一步数值求解. 因此, 高超声速 MHD 激波脱体距离的快速求解方法仍有待进一步发展和完善, 以达到从理论上快速评估磁控效果以及能够反映 MHD 流动控制本质的目标.

本文通过理论分析的方法得到高超声速 MHD 无量纲激波脱体距离的解析表达式. 求解过程主要分为两部分, 首先对连续方程进行积分, 将无量纲激波脱体距离作为待求量包含在内; 进一步, 引入切向速度切向偏导数沿驻点线上的线性近似分布, 利用径向动量方程建立磁场与激波脱体距离的联系, 寻找球头驻点处切向速度沿切向的偏导数值. 最后, 通过求解关于激波脱体距离的一元二次方程, 获得包含磁场影响的解析表达式.

1 无量纲激波脱体距离理论求解

磁场添加后对流动影响最直观的体现是脱体激波距离或激波结构的变化, 学者在多种设备中均通过光学方法观测到了磁场对脱体激波距离的影响, 一般而言, 磁场越强, 脱体激波距离越大.

本文的理论研究是基于以下条件:

(1) 低磁雷诺数假设, 对于高超声速飞行条件, 激波层内气体电离度一般较低, 磁雷诺数远小于 1, 此时诱导磁场对于外加磁场的影响可以忽略不记^[1, 28-29]. Porter 和 Cambel^[29] 详细研究了不同磁雷诺数条件下的磁场分布, 其结果也表明在低磁雷诺数条件下, 电流导致的诱导磁场对外加磁场的影响很小, 在激波层内只考虑外加磁场即可;

(2) 激波层内流体不可压缩, 尽管自由来流速度是高超声速, 但强激波后激波层内驻点线附近马赫数较小, 该区域内的流体可当不可压缩流体近似处理, Bush^[20]、Smith 和 Wu^[21] 在求解高超声速 MHD

问题时也采用了该假设;

(3) 忽略黏性影响, 高超声速来流条件下, 流体雷诺数较大, 在关注脱体激波距离问题时可以忽略黏性项, 将问题简化为无黏流动问题^[20, 25];

(4) 激波层内电导率为常值, 电导率一般与温度相关, 在无黏假设条件下, 激波层内不考虑边界层, 沿驻点线温度变化较小, 可将其以常值近似处理^[17, 20, 25].

1.1 对连续方程的处理

对连续方程的处理借鉴了 Olivier^[30] 的方法, 他通过对连续方程积分的方式获得了包含激波脱体距离的方程, 本文在其基础上进一步考虑添加磁场对脱体激波距离的影响, 对该方法的具体应用过程如下. 球坐标系下的连续方程为

$$\frac{\partial}{\partial r}(\rho u r^2 \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v r \sin \theta) = 0 \quad (1)$$

对连续方程中的变量进行无量纲化处理

$$\bar{r} = \frac{r}{r_b}, \quad \bar{u} = \frac{u}{u_\infty}, \quad \bar{v} = \frac{v}{u_\infty}$$

$$\bar{\Delta} = \frac{r_s - r_b}{r_b} = \frac{\Delta}{r_b}, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_s}$$

于是式 (1) 化为

$$\frac{\partial}{\partial \bar{r}}(\bar{\rho} \bar{u} \bar{r}^2 \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial \theta}(\bar{\rho} \bar{v} \bar{r} \sin \theta) = 0 \quad (2)$$

其中 ρ_∞ 和 u_∞ 为来流密度和速度, ρ_s 为激波层内密度, r_s 和 r_b 分别为球头半径和激波半径, Δ 为激波脱体距离, 各变量示意图如图 1 所示.

将式 (2) 沿着驻点线由驻点向激波处进行积分, 积分的目的是将无量纲激波脱体距离加入到方程中, 将其作为待求量来进一步求解, 积分过程具体如下

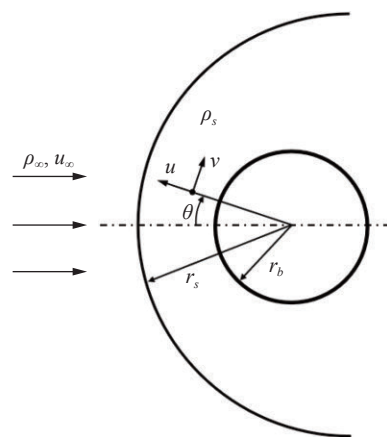


图 1 钝头体和激波结构示意图

Fig. 1 Schematic of the blunt body and the shock

$$\int_1^{1+\bar{\Delta}} \left[\frac{\partial}{\partial \bar{r}} (\bar{\rho} \bar{u} \bar{r}^2 \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\bar{\rho} \bar{v} \bar{r} \sin \theta) \right] d\bar{r} = 0$$

$$\Rightarrow \bar{\rho}_s \bar{u}_s (1 + \bar{\Delta})^2 \sin \theta + \int_1^{1+\bar{\Delta}} \bar{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\bar{\rho} \bar{v} \sin \theta) d\bar{r} = 0 \quad (3)$$

其中 $\bar{r} = 1$ 为驻点处, $\bar{r} = 1 + \bar{\Delta}$ 为驻点线上激波所在位置.

由于求解过程在驻点线附近, 此时可以通过引入驻点线假设简化问题的求解过程, 此过程实质上去除方程中的高阶小量, 同时保留低阶小量, 从而保证了低阶量的可求解性. 根据驻点线假设, 引入如下近似条件^[30]

$$\sin \theta = \theta, \quad \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \theta} = 0, \quad \bar{v} = \theta \frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta}$$

于是式 (3) 化为

$$\bar{\rho}_s \bar{u}_s (1 + \bar{\Delta})^2 + \int_1^{1+\bar{\Delta}} \bar{r} \bar{\rho} \left(2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta} + \theta \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \theta^2} \right) d\bar{r} = 0 \quad (4)$$

忽略式 (4) 中含有小量 θ 的高阶项

$$\bar{\rho}_s \bar{u}_s (1 + \bar{\Delta})^2 + 2\bar{\Delta} \int_0^1 \bar{\rho} (1 + \bar{\Delta} r^*) \frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta} dr^* = 0 \quad (5)$$

其中 $r^* = (\bar{r} - 1) / \bar{\Delta}$ (驻点处为 $r^* = 0$, 激波处为 $r^* = 1$). 到此为止, 对连续方程的各种处理并不影响其广泛的适用性.

Olivier^[30] 近似地给出了 $\partial \bar{v} / \partial \theta$ 在驻点线上的线性分布表达式, 既可以使 $\partial \bar{v} / \partial \theta$ 满足激波处的边界条件, 同时提供了壁面处 $(\partial \bar{v} / \partial \theta)_b$ 的待求量, 通过 $(\partial \bar{v} / \partial \theta)_b$ 可以建立激波脱体距离与磁场和来流的联系. 以下给出 $\partial \bar{v} / \partial \theta$ 在驻点线附近的线性分布形式

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta} = \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta} \right)_b + \left[1 - \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta} \right)_b \right] r^* \quad (6)$$

式 (5) 进一步整理为

$$\bar{u}_s (1 + \bar{\Delta})^2 + 2\bar{\Delta} \int_0^1 (\bar{\Delta} r^* + 1) \cdot \left\{ \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta} \right)_b + \left[1 - \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta} \right)_b \right] r^* \right\} dr^* = 0 \quad (7)$$

1.2 对动量方程的处理

动量方程包含了待求问题的特征元素, 即电磁作用项, 同时需要通过对动量方程的处理, 寻找激波

脱体距离与磁场影响的联系, 因此这一部分较为关键. 通过处理径向动量方程, 得到驻点处 $\partial \bar{v} / \partial \theta$ 的具体数值, 即 $(\partial \bar{v} / \partial \theta)_b$. 此处选取径向动量方程求解, 这是考虑到压力项的量级在分析的过程中会被排除掉, 有助于求解的简化. 同时, 需要额外地说明一下, 对动量方程取旋度的方式是不可行的, 原因是分离变量后, 在驻点处方程两边恒为 0, 对于问题的求解无作用. 对径向的动量方程进行处理具体步骤如下. 包含电磁项的径向动量方程为

$$\rho_s u \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\rho_s v^2}{r} + \frac{\rho_s v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial p}{\partial r} = (j_\theta B_\phi - j_\phi B_\theta) \quad (8)$$

对于二维轴对称问题, 取 $B_\phi = 0$, 于是式 (8) 整理为

$$\rho_s u \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\rho_s v^2}{r} + \frac{\rho_s v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial p}{\partial r} = -j_\phi B_\theta \quad (9)$$

根据广义 Ohm 定律 (general Ohm's law)

$$\mathbf{J} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}) \quad (10)$$

其中 σ 为电导率. 根据电磁感应定律, 变化的磁场会导致感生电场, 但由于本文涉及的是稳态磁场, 所以电场需要满足 $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$, 对于二维轴对称问题, 在驻点线上满足 $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ ^[20], 于是式 (9) 可以进一步整理

$$u \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{v^2}{r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{\sigma}{\rho_s} [(u B_\theta - v B_r) B_\theta] \quad (11)$$

将磁感强度和压力无量纲化

$$\bar{B}_i = \frac{B_i}{B_0}, \quad \bar{p} = \frac{p - p_\infty}{\rho_\infty u_\infty^2}$$

式 (11) 整理得到

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} - \frac{\bar{v}^2}{\bar{r}} + \frac{\bar{v}}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \theta} + \varepsilon \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} = -Q \varepsilon [(\bar{u} \bar{B}_\theta - \bar{v} \bar{B}_r) \bar{B}_\theta] \quad (12)$$

其中 $Q = \sigma B_0^2 r_b / (\rho_\infty u_\infty)$, 为相互作用系数; $\varepsilon = \rho_\infty / \rho_s$, 为激波前后密度比. 在驻点线附近取如下分离变量形式

$$\bar{u} = \bar{u}(\bar{r}) \cos \theta, \quad \bar{v} = \bar{v}(\bar{r}) \sin \theta, \quad \bar{p} = \bar{p}(\bar{r}) \cos^2 \theta$$

其中 $\bar{v}(\bar{r}) = \partial \bar{v} / \partial \theta$. 将其代入式 (12), 整理得到

$$\bar{u}(\bar{r}) \bar{u}'(\bar{r}) \cos^2 \theta - \frac{1}{\bar{r}} \bar{v}(\bar{r}) \bar{v}'(\bar{r}) \sin^2 \theta + \frac{\bar{v}(\bar{r}) \sin \theta}{\bar{r}} [-\bar{u}(\bar{r}) \sin \theta] + \varepsilon \bar{p}'(\bar{r}) \cos^2 \theta = -Q \varepsilon \left\{ [\bar{u}(\bar{r}) \cos \theta \bar{B}_\theta - \bar{v}(\bar{r}) \sin \theta \bar{B}_r] \bar{B}_\theta \right\} \quad (13)$$

对于磁场分布, 选取较为常用的模型为均匀磁

化球形磁体的磁场分布, 该模型的磁场分布简单, 存在解析形式的表达, 便于实验和理论的研究^[12, 20, 22], 这种磁场的方向与激波层内电离流速度方向趋近于垂直, 可以较为充分地电离流发生相互作用, 其分布形式见图 2. 由式 (10) 知, 电流为环向, 垂直于磁场和速度矢量所在的面, 于是 MHD 动量方程中的电磁力项 $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ 会受到增益的影响. 这里参考 Porter 给出的偶极子磁场分布形式^[22]

$$\begin{cases} B_r = B_0 \left(\frac{R_b}{r}\right)^3 \cos \theta \\ B_\theta = \frac{B_0}{2} \left(\frac{R_b}{r}\right)^3 \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{B}_r = \left(\frac{1}{\bar{r}}\right)^3 \cos \theta \\ \bar{B}_\theta = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\bar{r}}\right)^3 \sin \theta \end{cases}$$

该磁场分布满足散度和旋度为 0 的条件

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$$

其中旋度为 0 意味着低磁雷诺数, 即忽略电流对磁场产生的影响. 将上述磁场分布代入式 (13)

$$\begin{aligned} & \bar{u}(\bar{r})\bar{u}'(\bar{r})\cos^2\theta - \frac{1}{\bar{r}}\bar{v}(\bar{r})\bar{v}'(\bar{r})\sin^2\theta + \\ & \frac{\bar{v}(\bar{r})\sin\theta}{\bar{r}}[-\bar{u}(\bar{r})\sin\theta] + \varepsilon \frac{\partial \bar{p}(\bar{r})}{\partial \bar{r}}\cos^2\theta = \\ & -Q\varepsilon \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\bar{r}}\right)^3 \sin\theta \cdot \left[\bar{u}(\bar{r})\cos\theta \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\bar{r}}\right)^3 \sin\theta - \right. \\ & \left. \bar{v}(\bar{r})\sin\theta \left(\frac{1}{\bar{r}}\right)^3 \cos\theta \right] \end{aligned} \quad (14)$$

驻点线附近取 $\sin\theta = \theta, \cos\theta = 1$, 整理得

$$\begin{aligned} & \bar{u}(\bar{r})\bar{u}'(\bar{r}) - \frac{1}{\bar{r}}\bar{v}(\bar{r})\bar{v}'(\bar{r})\theta^2 + \frac{\bar{v}(\bar{r})}{\bar{r}}[-\bar{u}(\bar{r})]\theta^2 + \varepsilon \frac{\partial \bar{p}(\bar{r})}{\partial \bar{r}} = \\ & -\frac{Q\varepsilon}{2} \left\{ \left[\bar{u}(\bar{r}) \frac{1}{2} - \bar{v}(\bar{r}) \right] \left(\frac{1}{\bar{r}}\right)^6 \right\} \theta^2 \end{aligned} \quad (15)$$

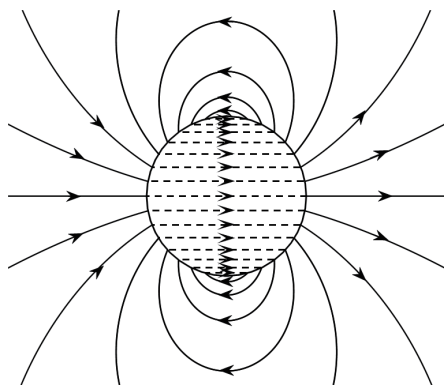


图 2 均匀磁化球体磁感线分布示意图

Fig. 2 Distribution of magnetic induction lines of uniformly magnetized sphere

对于壁面处 $\bar{r} = 1$, 有 $\bar{u}(1) = 0$, 于是式 (15) 化简为

$$-\bar{v}(1)\bar{v}'(1)\theta^2 + \varepsilon \left[\frac{\partial \bar{p}(\bar{r})}{\partial \bar{r}} \right]_{\bar{r}=1} = \frac{1}{2} Q\varepsilon \bar{v}(1)\theta^2 \quad (16)$$

根据量级分析, 式 (16) 的压力项不包含小量 $O(\theta^2)$, 所以当 $\theta \rightarrow 0$ 时, 等式两端包含 $O(\theta^2)$ 的项都趋近 0, 而此时压力项为 0, 将该结果代入式 (16), 可以得到

$$-\bar{v}(1)\bar{v}'(1)\theta^2 = \frac{1}{2} Q\varepsilon \bar{v}(1)\theta^2 \quad (17)$$

由式 (17) 的二次方程可以解得

$$\bar{v}(1) = 0 \text{ 或 } \bar{v}(1) = -\frac{Q\varepsilon}{2} \quad (18)$$

由于磁场会明显影响流场, 切向速度需要包含磁场以及来流所带来的影响, 所以这里选取第二个解. 额外地, 由式 (16) 还会得到 $[\partial \bar{p}(\bar{r})/\partial \bar{r}]_{\bar{r}=1} = 0$. 于是可以发现, 当出现磁场时, 驻点附近地切向速度有向驻点方向流动的趋势, 而该处的径向速度可由微分形式的连续方程得到

$$\bar{v}(\bar{r}) = -\bar{u}(\bar{r}) - \frac{\bar{r}}{2} \bar{u}'(\bar{r}) \quad (19)$$

同样取 $\bar{r} = 1$, 有

$$\bar{u}'(1) = Q\varepsilon \quad (20)$$

此结果说明, 驻点附近径向速度方向有与来流相反的趋势.

根据激波前后质量守恒关系, 激波处驻点线上的速度有^[19]

$$\bar{u}_s = -\varepsilon u_\infty \quad (21)$$

将式 (21) 及式 (18) 代入式 (7), 整理如下

$$a\bar{z}^2 + b\bar{z} - \varepsilon = 0 \quad (22)$$

其中

$$a = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta} \right)_b - \varepsilon$$

$$b = 1 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta} \right)_b - 2\varepsilon$$

可以看到, 这是一个关于 \bar{z} 的二次方程, 待求形式非常简洁, 可以根据求根公式容易地得到两个解, 但由于激波脱体距离应为正值, 所以无量纲激波脱体距离表达式为

$$\bar{\Delta} = \frac{1}{2a} \left(-b + \sqrt{b^2 + 4a\varepsilon} \right) \quad (23)$$

2 结果与分析

根据图 3, 对于相同的相互作用系数 Q , 随着 ε 的增加 (来流速度降低) 无量纲激波脱体距离变大. 对于相同的 ε , 随着 Q 增加激波无量纲脱体距离增加. 从图 3 中也可以观察到随着 ε 的减小, 无量纲激波脱体距离关于 ε 的灵敏度降低, 在高超声速 MHD 实验或数值模拟开始之前, 可以通过合理估计的 ε 值以及由初始条件构成的 Q 来预测结果, 这有助于快速评估磁控效果.

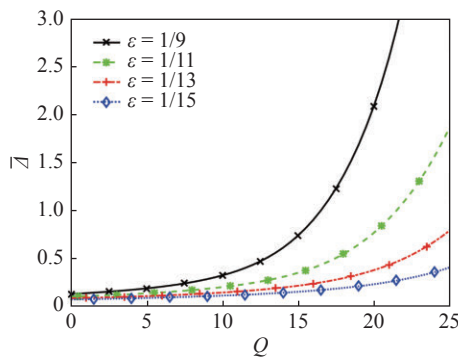


图 3 无量纲激波脱体距离 $\bar{\Delta}$ 与磁相互作用系数 Q 的关系曲线
Fig. 3 The curve of dimensionless shock stand-off distance $\bar{\Delta}$ vs. MHD interaction parameter Q

图 4 对比了本文结果与 Lefevre 等^[31] 在膨胀管中的实验结果. C2 ~ C6 代表 Lefevre 选取的不同实验条件, 每一个实验条件对应着不同的相互作用系数 Q 以及激波前后气流密度比 ε , 但由于实验时间很短, 不足以形成稳定流场, 文章以 $20 \mu\text{s}$ 为间隔进行数据取点, Lefevre 同时对比了 MHD 的 CFD 模拟

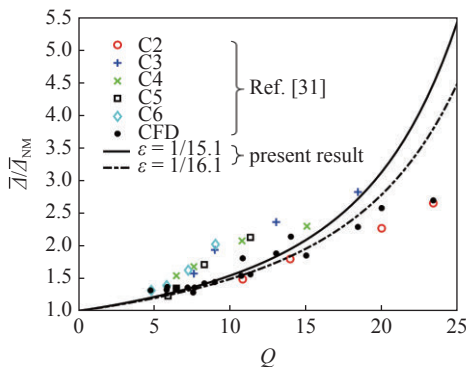


图 4 无量纲激波脱体距离比 $\bar{\Delta}/\bar{\Delta}_{NM}$ 与磁相互作用系数 Q 的关系曲线
Fig. 4 The curve of ratio of shock stand-off distance $\bar{\Delta}/\bar{\Delta}_{NM}$ vs. MHD interaction parameter Q

结果. 从图 4 中可以看到, 理论结果、实验和数值结果符合得较好.

Lykoudis^[25] 同样在低磁雷诺数以及激波层内常值密度、常值电导率、无黏的假设条件下推导了球头激波脱体距离表达式, 他采用了较为理想的磁场分布模型: $\mathbf{J} = \sigma v \mathbf{B} \boldsymbol{\varphi}$, 即磁场处垂直于流线, 这样的磁场分布有助于问题简化. 在对动量方程的处理过程中, 他认为压力分布随外加磁场的变化很小, 于是通过引入 Newton-Busemann 压力分布近似公式进一步补充了流场信息, 结合流管上下游的质量守恒关系, 最终推导得到了激波脱体距离积分形式的解析表达式, 分析结果反映了磁场对气流流动的影响效果.

图 5 给出了本文与 Lykoudis 理论结果的对比, 两者结果趋势一致, 都体现了磁场与导电液体相互作用产生的阻滞效应, 但两者也存在一定偏差, 主要原因如下: Lykoudis 采用的磁场分布模型与本文存在一定的差别, 他的推导是基于激波层内磁场处处垂直于流速的条件, 相较于偶极子磁场而言, Lykoudis 使用的磁场可与流场进行更加充分的相互作用, 这也会产生更强的阻滞作用, 使激波层厚度增益效果更加明显, 从而导致其结果在一定 Q 值范围内高于本文所得的结果. 当然, 由于 Lykoudis 采用的磁场过于理想, 在现实中难以用磁场装置产生该类磁场, 在实验研究中难以采用. 另外, 需要注意的是, 包括 Lykoudis 文章在内的一些文献中的相互作用系数表达式为 $Q_s = \sigma B^2 r_s / (\rho_\infty u_\infty)$, 与本文使用的特征长度不一致, 需要进行转换.

通常情况下, 理论分析引入的假设条件会导致模型存在一定的局限性. 根据线性近似分布假设, $\partial v / \partial \theta$ 是仅关于 r^* 的函数, 当来流速度越高时, 对于

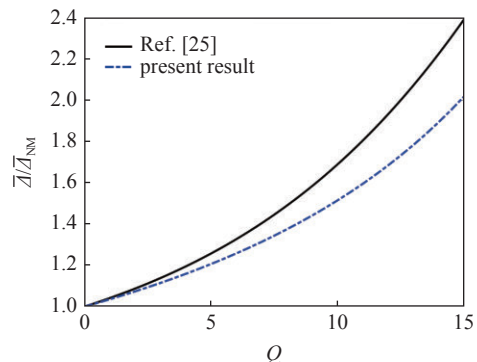


图 5 本文结果与 Lykoudis 结果对比图^[25]
Fig. 5 Comparison between results of this paper and the Lykoudis's

相同磁相互作用系数 Q 条件下, 惯性力的影响越强, $\partial\bar{v}/\partial\theta$ 在驻点线上的分布越符合线性近似假设, 然而随着激波脱体距离的增加, 该假设会出现一定程度的失效, 即 $\partial\bar{v}/\partial\theta$ 将与 r^* 和 \bar{J} 两个量相关, $\partial\bar{v}/\partial\theta$ 的分布与激波层厚度有关联, 于是式 (5) 的积分结果将会受到影响, 导致无法将其化为关于激波脱体距离的一元二次方程形式. 总之, 在 Q 较大时, $\partial\bar{v}/\partial\theta$ 分布偏离线性假设是限制本文模型应用的关键点. 然而, 在 $Q > 1$ 时就会出现明显的 MHD 流动控制效果, 且当前实验条件还难以达到较大的 Q 值, 因此本文的模型仍然有较强的指导意义. 当然, 后续会通过更多的理论和实验来对该模型在 Q 较大时, $\partial\bar{v}/\partial\theta$ 分布偏离线性假设是限制本文模型应用值下进行改进优化.

本文的结果中有一个值得关注的地方, 当磁场存在时, 驻点附近的切向速度有指向驻点的趋势, 通过连续方程得到与来流相反的径向速度, 如图 6. 这里认为该结果是低磁条件假设造成的, 原因是磁场的旋度方程中, 如果考虑电流对磁场的影响, 该影响将会是一个小量, 这个小量会影响径向动量方程的量级分析过程, 从而改变求解结果. 然而这种流动趋势是实际存在的, 由于电离流与磁场相互作用的影响, 流体会受到与流动相反方向的洛伦兹力, 从而使激波层内的流速降低, 从而导致了激波脱体距离的增加.

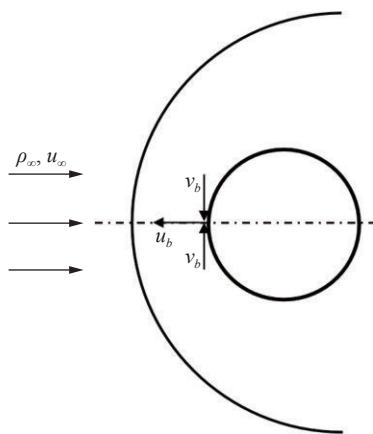


图 6 驻点处流动示意图

Fig. 6 Schematic of flow near stagnation point

3 结论

本文利用连续方程建立了关于激波脱体距离的待求方程, 通过径向动量方程寻找 $(\partial v/\partial\theta)_b$ 的具体数值, 从而使磁场影响与待求方程得以关联, 将问题化

为求解一个关于激波脱体距离的一元二次方程, 得到了较为直观简洁的解析表达式. 本文主要结论如下:

(1) 理论分析结果表明, 当磁相互作用系数增加时, 激波脱体距离增加, 即磁控效果增强. 将本文结果与 Lefevre 的实验数据、Lykoudis 的结果进行了对比, 三者吻合较好. 本文理论模型对高超声速 MHD 实验设计和结果分析具有较好的指导意义;

(2) 本文模型的建立是基于特定的假设条件, 存在一定的适用范围, 在 Q 较大时, $\partial\bar{v}/\partial\theta$ 分布偏离线性假设会限制本文模型的应用. 通常情况下, 当 $Q > 1$ 时即会出现明显的 MHD 流动控制效果, 本文结果的适用性可以达到并远大于该范围.

参 考 文 献

- 1 丁明松, 江涛, 刘庆宗等. 电导率模拟对高超声速 MHD 控制影响. 航空学报, 2019, 40(11): 123009 (Ding Mingsong, Jiang Tao, Liu Qingzong, et al. Influence of conductivity simulation on hypersonic MHD control. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2019, 40(11): 123009 (in Chinese))
- 2 李益文, 张百灵, 李应红等. 磁流体动力学在航空工程中的应用与展望. 力学进展, 2017, 47(1): 452-502 (Li Yiwen, Zhang Bailing, Li Yinghong, et al. Application and prospect of magnetohydrodynamics in aeronautical engineering. *Advances in Mechanics*, 2017, 47(1): 452-502 (in Chinese))
- 3 李开. 高温真实气体条件下的磁控热防护机理研究. [博士论文]. 长沙: 国防科学技术大学, 2017 (Li Kai. Mechanism analysis of magnetohydrodynamic heat shield system including high temperature real gas effect. [PhD Thesis]. Changsha: National University of Defense Technology, 2017 (in Chinese))
- 4 罗凯, 汪球, 李逸翔等. 基于高温气体效应的磁流体流动控制研究进展. 力学学报, 2021, 53(6): 1515-1531 (Luo Kai, Wang Qiu, Li Yixiang, et al. Research progress on magnetohydrodynamic flow control under test conditions with high temperature real gas effect. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2021, 53(6): 1515-1531 (in Chinese))
- 5 Ziemer RW. Experimental investigation in magneto-aerodynamics. *ARS Journal*, 1959, 29(9): 642-647
- 6 Schramm JM, Hannemann K. Study of MHD effects in the high-enthalpy shock tunnel Göttingen (HEG) using a 30T-pulsed magnet system//31st International Symposium on Shock Waves, Nagoya, Japan, 2017
- 7 Gildfind DE, Smith D, Lewis SW, et al. Expansion tube magneto-hydrodynamic experiments with argon test gas. AIAA Paper 2018-3754, 2018
- 8 Seemann GR, Cambel AB. Observations concerning magnetoaerodynamic drag and shock standoff distance. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 1966, 55(3): 457-465
- 9 Chang CF, Kranc SC, Nowak RJ, et al. Theoretical and experimental studies of magneto-aerodynamic drag and shock standoff distance. NASA-CR-70315, 1966
- 10 Kawamura M, Matsuda A, Katsurayama H, et al. Experiment on

- drag enhancement for a blunt body with electrodynamic heat shield. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 2009, 46(6): 1171-1177
- 11 Smith DR, Gildfind DE, James CM, et al. Magnetohydrodynamic drag force measurements in an expansion tube. *AIAA Paper* 2018-3755, 2018
- 12 Smith DR, Gildfind DE, Jacobs PA, et al. Magnetohydrodynamic drag measurements in an expansion tunnel with argon test gas. *AIAA Journal*, 2020, 58(10): 4495-4504
- 13 Gülhan A, Esser B, Koch U, et al. Experimental verification of heat-flux mitigation by electromagnetic fields in partially -ionized-argon flows. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 2009, 46(2): 274-283
- 14 Brio M, Wu CC. An upwind differencing scheme for the equations of ideal magnetohydrodynamics. *Journal of Computational Physics*, 1988, 75(2): 400-422
- 15 Augustinus J, Harada S, Agarwal RK, et al. Numerical solutions of the eight-wave structure ideal MHD equations by modified Runge-Kutta scheme with TVD. *AIAA Paper* 1997-2398, 1997
- 16 Harada S, Augustinus J, Hoffmann K, et al. Development of a modified Runge-Kutta scheme with TVD limiters for the ideal 1-D MHD equations. *AIAA Paper* 1997-2090, 1997
- 17 Damevin HM, Hoffmann K. Numerical magnetogasdynamics simulations of hypersonic, chemically reacting flows. *AIAA Paper* 2001-2746, 2001
- 18 Zha G, Shen Y, Wang B. An improved low diffusion E-CUSP upwind scheme. *Computers & Fluids*, 2011, 48(1): 214-220
- 19 田正雨. 高超声速流动的磁流体力学控制数值模拟研究. [博士论文]. 长沙: 国防科学技术大学, 2008 (Tian Zhengyu. Numerical investigation for hypersonic control by magnetohydrodynamics method. [PhD Thesis]. Changsha: National University of Defense Technology, 2008 (in Chinese))
- 20 Bush WB. Magnetohydrodynamic-hypersonic flow past a blunt body. *Journal of the Aerospace Sciences*, 1958, 25(11): 685-690
- 21 Smith MC, Wu CS. Magnetohydrodynamic hypersonic viscous flow past a blunt body. *AIAA Journal*, 1964, 2(5): 963-965
- 22 Porter RW, Cambel AB. Hall effect in flight magnetogasdynamics. *AIAA Journal*, 1967, 5(12): 2208-2213
- 23 Ludford GSS, Murray JD. On the flow of a conducting fluid past a magnetized sphere. *Journal of Fluid Mechanics*, 1960, 7(4): 516-528
- 24 Meyer RX. Magnetohydrodynamic-hypersonic flow in the quasi-Newtonian approximation. *Reviews of Modern Physics*, 1960, 32(4): 1004-1007
- 25 Lykoudis PS. The Newtonian approximation in magnetic hypersonic stagnation-point flow. *Journal of the Aerospace Sciences*, 1961, 28(7): 541-546
- 26 Ericson WB, Maciulaitis A. Investigation of magnetohydrodynamic flight control. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 1964, 1(3): 283-289
- 27 Hooks LE, Lewis RC. Simplified magnetoaerodynamic flow relations for axisymmetric blunt bodies. *AIAA Journal*, 1967, 5(4): 644-650
- 28 Kemp NH. On hypersonic stagnation-point flow with a magnetic field. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 1958, 25(6): 405-407
- 29 Porter RW, Cambel AB. Magnetic coupling in flight magneto-aerodynamics. *AIAA Journal*, 1967, 5(4): 803-805
- 30 Olivier H. A theoretical model for the shock stand-off distance in frozen and equilibrium flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 2000, 413: 345-353
- 31 Lefevre A, Gildfind DE, Gollan RJ, et al. Expansion tube experiments of magnetohydrodynamic aerobraking for superorbital earth reentry. *AIAA Journal*, 2021, in press.