

工字型截面弯曲切应力分布辨析¹⁾

李敏* 李芷菡[†] 陈伟民^{**、2)}

* (北京航空航天大学航空科学与工程学院, 北京 100191)

[†] (中国农业大学食品科学与营养工程学院, 北京 100193)

^{**} (中国科学院力学研究所, 北京 100190)

摘要 工字型截面是材料力学薄壁结构的典型代表, 部分教材与教学 PPT 素材在弯曲切应力分布部分存在问题与争议, 本文利用简化模型与力平衡条件给出理论分析结果, 同时给出了有限元分析结果作为研讨性教学素材。

关键词 工字型截面, 弯曲切应力, 强度校核

中图分类号: O341 文献标识码: A doi: 10.6052/1000-0879-20-374

THE DISTRIBUTION OF BENDING SHEAR STRESS IN I-SHAPED SECTION¹⁾

LI Min* LI Zhihan[†] CHEN Weimin^{**、2)}

*(School of Aeronautic Science and Engineering, Beihang University, Beijing 100191, China)

[†] (College of Food Science & Nutritional Engineering, China Agricultural University, Beijing 100193, China)

^{**} (Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

Abstract The I-shaped section is a typical representative of the thin-walled structure. The distribution of the bending shear stress sees some difference in some textbooks and teaching PPTs. In this paper, a simplified model and the force balance conditions are used to obtain the theoretical analysis results, compared with the finite element analysis results.

Key words I-shaped section, bending shear stress, strength check

材料力学以杆件为主要研究对象, 在课程基本理论讲解中最常见的杆件截面是矩形与圆形, 而工字型截面的出现源于弯曲梁合理强度与刚度设计中把材料置于高应力区 (或者在相同截面积条件下提高截面抗弯截面系数与惯性矩), 加之基于此原因的工程型材广泛应用, 所以工字截面的弯曲问题分析成为材料力学教学内容的重要部分, 包括弯曲正应力、弯曲切应力、应力应变状态、强度理论与组合变形分析均有涉及, 同时作为薄壁截面的典型代表反

复出现。

对于工字型截面切应力分析的教学, 从理论上应该没有歧义: 相比矩形截面, 基于薄壁结构的特征, 工字型截面弯曲切应力方向假设与大小分布假设与真实情况符合程度更高; 分析方法与矩形截面一致——基于相邻截面弯曲正应力组成合力差的平衡条件。在课程教学与习题讨论中容易引发争议的部分在于腹板与翼缘交界区域的应力分布: 由于存在应力集中现象, 在弯曲切应力部分的教学过程

2020-09-02 收到第 1 稿, 2020-10-05 收到修改稿。

1) 中科院先导项目资助 (XDA22000000)。

2) E-mail: wmchen@imech.ac.cn

引用格式: 李敏, 李芷菡, 陈伟民. 工字型截面弯曲切应力分布辨析. 力学与实践, 2021, 43(5): 748-752

Li Min, Li Zhihan, Chen Weimin. The distribution of bending shear stress in I-shaped section. *Mechanics in Engineering*, 2021, 43(5): 748-752

中该区域的应力分布一般不作教学要求，仅仅给出大致分布图形即可；但是后续的应力应变状态分析与组合变形强度条件中，工字型截面梁（或 T 型截面梁）在强度分析中往往作为最为常见的截面形式出现，而且还涉及危险点的选取与强度理论的选择，所以在细节讨论时又不可避免涉及应力分布细节。

事实上，相对于常见的矩形或圆形截面，按照材料力学简化假设分析方法，工字型截面的面内应力分布规律可以由静力平衡完全确定，并不需要更多的变形协调论证。加之利用不同分离体模型进行平衡分析在材料力学学习题中多有出现，例如扭转圆轴与弯曲梁的半模或四分之一模型分析^[1-3]，所以本文给出相关疑点与讨论，可以作为研讨性课程的提升内容。

1 问题的提出

图 1 是材料力学教材中工字型截面梁横力弯曲典型图样，图中剪力沿 y 轴向下， z 轴为工字型截面的中性轴，二者均为截面对称轴。图中标出了当剪力 F_S 沿 y 轴正向时弯曲切应力的方向，当翼缘厚度 δ_f 与腹板厚度 δ_w 远小于中心线高度 h_0 与截面宽度 b 时，教材或网上常见 PPT 课件给出截面弯曲切应力的分布模式如图 2 所示^[4-5]：翼缘弯曲切应力 τ_{zx} 沿厚度均匀分布，在 z 方向线性分布；腹板弯曲切应力 τ_{yx} 沿厚度均匀分布，在 y 方向呈抛物线分布，中性轴处达到最大值。各处的弯曲切应力计算公式均为

$$\tau = \frac{F_S S_z(\omega)}{I_z \delta} \quad (1)$$

式中 $S_z(\omega)$ 与 δ 分别为对应位置的静矩与厚度， I_z 为轴惯性矩。

在教学过程中可能出现的问题包括：

(1) 截面几何与载荷均对于 y 轴对称，理论上对称轴处垂直于对称轴的位移 (z 向位移) 为零，所以 y 轴各点 $\gamma_{zx} = 0$ ，即在 $z = 0$ 的位置 $\tau_{zx} = 0$ ，这与图 2 中翼缘 τ_{zx} 分布特性不符；

(2) 在强度校核的危险点选取中，图 1 中 A 点与 O 点无异议，为什么选取 C 点而不是 B 点？尽管 B 点的切应力小于 C 点，但 B 点正应力大于 C 点，且一般情况下弯曲正应力远大于弯曲切应力，所以需要明确选择 C 点的理由。

这类问题不仅仅关联工字型截面，还广泛存在于工程各种型材构件，无论作为教学讲解还是后续

应用，既然类似的问题不可避免，不如利用材料力学简化模型加以说明，避免学生心中对该类问题形成“灰色地带”。

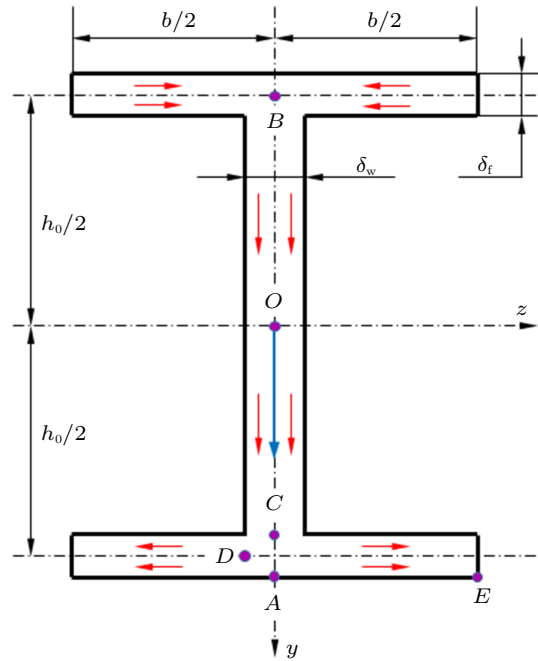


图 1 典型工字型梁横截面示意图

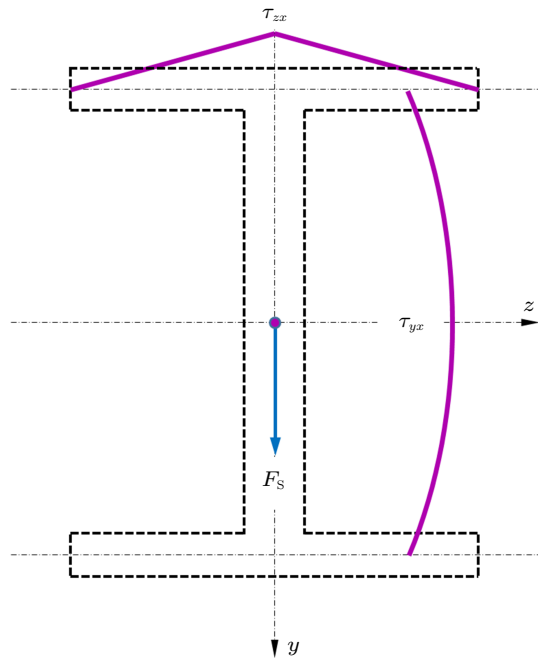


图 2 工字型梁中心线简图中切应力分布

2 翼缘部分切应力的分布

2.1 翼缘 Z 向切应力的分布

梁弯曲切应力求解均基于相邻截面弯曲正应力组成合力差的平衡条件，对于翼缘部分取分离体（取

左段为代表) 进行力平衡分析 (见图 3)。

(1) 当 $z_1 \leq (b - \delta_w)/2$ 时, 基于 τ_{zx} 在 $K - K'$ 截面上均布 (图 3(a))

$$\tau_{zx} = \frac{F_S \delta_f z_1}{I_z \delta_f} \frac{h_0}{2} = \frac{F_S h_0}{I_z} \frac{z_1}{2} \quad (2)$$

(2) 当 $(b - \delta_w)/2 \leq z_1 \leq b/2$ 时, 基于 τ_{zx} 在 $K - K'$ 截面上均布, τ_{yx} 在 $L - K'$ 截面上均布 (图 3(b))

$$\tau_{zx} = \frac{F_S h_0}{I_z} \frac{b - \delta_w}{2} \left(\frac{b}{2} - z_1 \right) \quad (3)$$

特殊点 1: $z_1 = b/2$ (图 1 中 B 点, 对称轴与翼缘中心线交点), $\tau_{zx} = 0$ 。

特殊点 2: $z_1 = (b - \delta_w)/2$ (图 1 中 D 点, 腹板边缘延长线与翼缘中心线交点), 该方向切应力为最大值

$$\tau_{zx} = \frac{F_S h_0}{I_z} \frac{b - \delta_w}{2}$$

综上所述, 翼缘中心线 τ_{zx} 的分布如图 3(c) 所示, 在对称轴 B 点为零, D 点为最大值, 两段均为线性分布, 以上的结论基于弯曲切应力沿厚度为均匀分布。

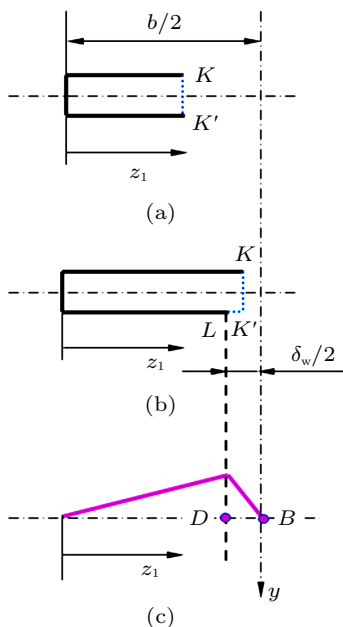


图 3 翼缘分离体与 τ_{zx} 分布示意图

2.2 翼缘 Y 向切应力的分布

根据切应力互等定理, 翼缘上下边缘处 y 向切应力 $\tau_{yx} = 0$, 加之翼缘厚度较小, 由此得出翼缘内

部 $\tau_{yx} = 0$ 的结论。事实上, 除上下边缘处外均存在 y 向切应力 τ_{yx} , 从平行于 z 轴纵切面的翼缘分离体平衡就可得到该结论。理论上, 翼缘任一纵截面上 τ_{yx} 的分布都是复杂的, 无法基于材料力学的均布假设模式给出理论表达式, 但为了后面与数值结果的比较与分析, 此处仍假设图 4 中 $K - K'$ 纵截面上 τ_{yx} 均布, 由此给出名义值

$$\tau_{yx} = \frac{F_S}{I_z} \left(\frac{h_0 + \delta_f}{2} - \frac{y_1}{2} \right) y_1 \quad (4)$$

当 $y_1 = \delta_f$, 即纵截面为 $L - L'$ 时, τ_{yx} 的均布模式相对准确

$$\tau_{yx}^{L-L'} = \frac{F_S h_0}{I_z} \frac{\delta_f}{2} \frac{b}{\delta_w} \quad (5)$$

由式 (4) 与式 (5) 可得 $\tau_{yx}^{L-L'}/\tau_{yx}(y_1 = \delta_f) = b/\delta_w$ 。该间断阶跃现象源于 $K - K'$ 纵截面上 τ_{yx} 均布的假设: 由于宽度尺寸突变, 实际的 τ_{yx} 在宽度 b 上不可能均匀分布, 这也是真实工字型截面在翼缘与腹板之间有圆弧过渡的原因——降低应力集中。

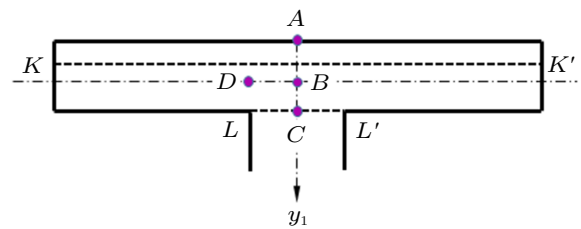


图 4 求解 τ_{yx} 的翼缘分离体示意图

2.3 不同位置的应力比较

在强度校核中涉及选取危险点的问题, 此处估算典型位置的应力大小。按照材料力学简化方法, 翼缘部分不考虑 y 向弯曲切应力 τ_{yx} , 腹板部分不考虑 z 向弯曲切应力 τ_{zx} 。

由以上分析可知, D 点相对 B 点更危险, 所以比较 D 点与 C 点的等效应力, 为了方便计算, 采用第三强度理论 (采用第四强度理论的结论相同) 等效应力的平方差

$$\begin{aligned} (\sigma_{r3}^D)^2 - (\sigma_{r3}^C)^2 &= \left(\frac{M}{I_z} \right)^2 \frac{\delta_f}{2} \left(h_0 - \frac{\delta_f}{2} \right) + \\ &\left(\frac{F_S h_0}{2I_z} \right)^2 \left[(b - \delta_w)^2 - \left(2b \frac{\delta_f}{\delta_w} \right)^2 \right] \quad (6) \end{aligned}$$

取 $h_0 \approx 10\delta_f$, $b \approx 10\delta_w$, $\delta_f \approx \delta_w$, $M = F_S L$ 进行估算

$$(\sigma_{r3}^D)^2 - (\sigma_{r3}^C)^2 \approx \left(\frac{F_S}{I_z} \right)^2 \frac{h_0^2}{20} (L^2 - 15b^2) \quad (7)$$

对于一般工程长梁 $L > 10b$ ，所以 D 点应该比 C 点更危险，材料力学习题中要求计算 C 点应力主要出于计算简便的目的^[3]。

3 数值结果的展示与比较

为了对工字型截面翼缘以及翼缘与腹板交界区域的切应力分布有直观感受，此处利用有限元分析 (finite element analysis, FEA) 给出数值结果并与上述简化理论分析 (图中理论解是基于材料力学假设的结果) 进行了比较。图 5 中横轴为翼缘中心线正则化位置 (以翼缘中心线左边界为起始点)，纵轴为切应力与 D 点 z 向切应力 τ_{zx} 的比值。图中左边界有限元结果由于单元划分的原因不可能达到零值，除去 D 点附近区域， τ_{zx} 的分布与理论解吻合很好；翼缘中心线上 y 向切应力 τ_{yx} 在两侧 70% 左右的区域的确与 z 向 τ_{zx}^D 有量级差异，且基本均匀分布，但在翼缘与腹板交界区域快速增加至与 τ_{zx} 相当的量级，总体均值与理论分析结果相等。

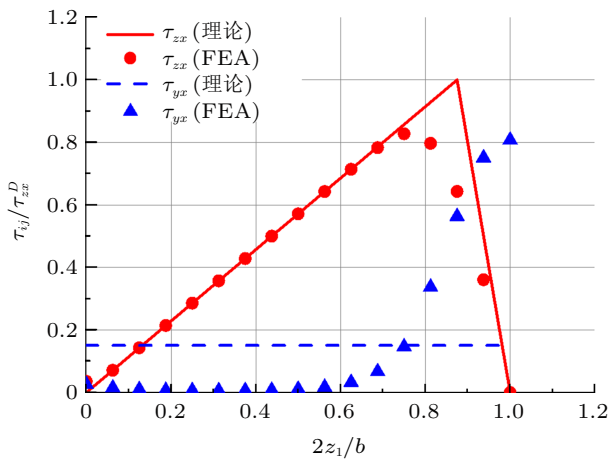


图 5 翼缘中心线位置 τ_{zx} 和 τ_{yx} 分布与比较

图 6 给出了腹板中心线上 y 向切应力 τ_{yx} 的分布，同样横轴为腹板中心线正则化位置 (以翼缘上边界为起始点)，纵轴为切应力与 O 点 (工字型截面形心) y 向切应力的比值。图中数据显示腹板 C 点 (腹板与翼缘交界中心) 以下部分的结果符合理论解，交界部分由于应力集中存在差异较大：有限元结果是连续分布，而简化理论解存在间断现象 (图中 C 点位置)。

图 7~图 9 分别为 z 向切应力， y 向切应力，von Mises 应力的等高线图样，可以作为课程讲解时的展

示材料，更多与过渡圆弧的相关结果在弹性理论书籍中给出^[6]。

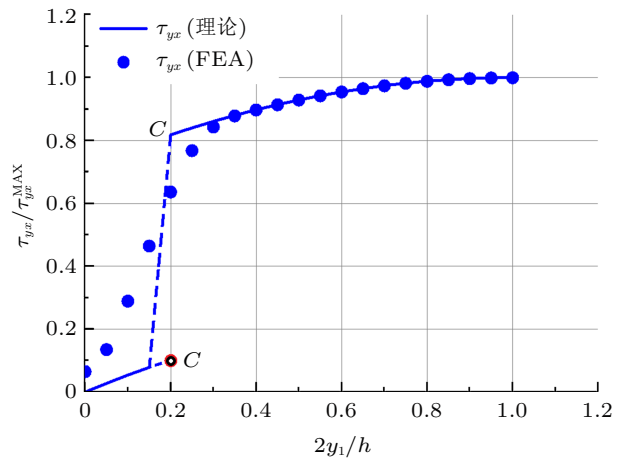


图 6 腹板中心线位置 τ_{yx} 分布与比较

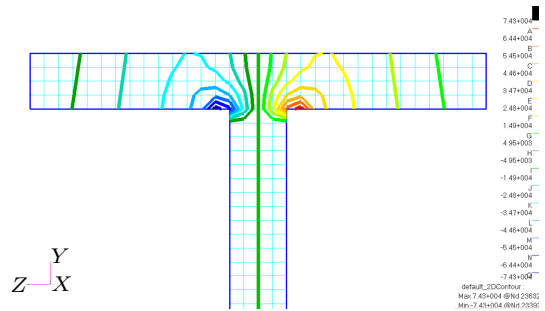


图 7 τ_{zx} 的有限元结果

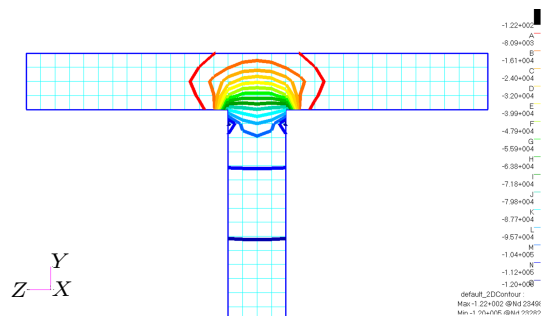


图 8 τ_{yx} 的有限元结果

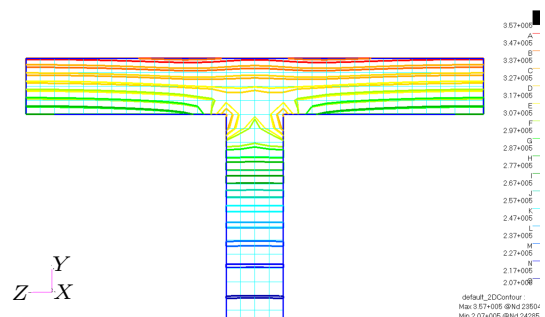


图 9 von Mises 应力的有限元结果

4 小结

本文选择工字型截面作为薄壁截面梁的代表,利用简化模型的力平衡条件分析了翼缘部分的切应力分布,结果显示:

(1) 沿翼缘中心线方向的弯曲切应力分布不是单调增加,对称轴点的 z 向切应力为零;

(2) 从强度分析的视角,一般情况下,翼缘中心线部分位置相比翼缘与腹板交界中点更危险,习题中要求校核后者主要出于计算简便性考虑。

参 考 文 献

- 1 单辉祖. 材料力学, 第3版. 北京: 高等教育出版社, 2010
- 2 刘鸿文. 材料力学, 第5版. 北京: 高等教育出版社, 2011
- 3 殷有泉, 励争, 邓成光. 材料力学, 修订版. 北京: 北京大学出版社, 2006
- 4 Gere JM. Mechanics of Materials, 3rd edn. Beijing: Higher Education Press, 2010 (in Chinese)
- 5 Liu Hongwen. Mechanics of Materials, 5th edn. Beijing: Higher Education Press, 2011 (in Chinese)
- 6 Timoshenko SP, Goodier JN. Theory of Elasticity, 3rd edn. New York: McGraw-Hill Education, 2013
- 7 Yin Youquan, Li Zheng, Deng Chengguang. Mechanics of Materials, revision. Beijing: Peking University Press, 2006 (in Chinese)
- 8 Gere JM. Mechanics of Materials, 5th edn. Beijing: Machinery Industry Press, 2003 (in Chinese)
- 9 Hibbeler RC. Mechanics of Materials, 10th edn. New York: Pearson Education, Inc., 2017

(责任编辑: 胡漫)