

载流简支微梁在磁场中的磁弹性随机振动

王平^{1,2,3} 王东贤^{1,2} 姚杰^{1,2}

(1 燕山大学 建筑工程与力学学院 066004 秦皇岛; 2 燕山大学 河北省重型装备与大型结构力学可靠性重点实验室 066004 秦皇岛;
3 中国科学院力学研究所 非线性力学国家重点实验室(LNM) 100080 北京)

摘要: 研究了简支微梁在磁场中的随机振动。基于修正的偶应力理论及磁弹性理论建立了外加磁场情况下载流微梁的运动方程, 导出了微梁的磁弹性随机振动方程。利用模态分析法分别得到了外加磁场情况下通入平稳和非平稳随机电流时微梁的随机位移响应的均值、功率谱密度函数等数字特征。对通入平稳随机电流的简支微梁进行了算例分析, 并绘制了在不同随机电流、磁场强度和本征长度下的位移响应功率谱密度图。计算结果表明, 耦合项的存在使得振动响应能量发生了很大的变化, 对微梁的疲劳寿命也会产生显著的影响, 通过改变随机电流和磁场强度来改变振动能量的分布规律, 进而可以达到控制微梁随机振动的目的。

关键词: 随机振动; 简支微梁; 磁弹性理论; 功率谱密度函数

中图分类号: O324 **文献标识码:** A **DOI:** 10.11776/cjam.37.06.C072

1 引 言

现随着科学技术的发展, 人类开始从宏观世界的研究逐渐迈向微观领域的探索, 形成了基于微电子、微机械与材料科学的全新技术领域^[1]。国内外学者对微梁的振动特性和力学性能进行了一系列研究。文献[2-3]应用偶应力理论研究了不同边界微梁的尺寸效应和力学性能。文献[4]基于修正偶应力理论及微极弹性理论建立了微梁尺度效应模型并且分析了不同的力学行为中微梁的尺度效应。文献[5]研究了尺度效应对微梁静态和动态特性的影响。文献[6]应用偶应力理论分析了 Bernoulli-Euler 梁固有频率的尺寸效应。文献[7]应用非局部 Bernoulli-Euler 梁模型, 采用微分变换法对高阶偏微分方程进行求解,

进而研究了单壁固支载流碳纳米管的振动与失稳问题。对于随机振动的研究, 文献[8]基于正交分解法针对单自由度和二自由度的剪切模型进行了非平稳随机响应分析, 高效地获得了随机振动响应的高精度结果; 文献[9]采用虚拟激励法构造虚拟的确定性荷载, 然后采用时程积分方法得到所需响应的时变功率谱密度函数。但综合上述研究还缺少将微梁的振动特性与随机振动理论相结合的相关研究。

本文对处于外加磁场中通有随机电流的简支微梁随机振动进行了研究。首先, 根据修正的偶应力理论和磁弹性理论建立微梁的控制方程, 并将给出的洛伦兹力耦合项中的一部分假设为随机分布载荷, 另一部分假设为微梁的一种阻尼; 研究在平稳和非平稳过程中微梁的随机振动, 并且对微梁的位移响应进行分析。然后, 在外加磁场中对微梁通入

基金项目: 河北自然科学基金(A2016203101); 河北省高等学校科学技术研究青年基金资助; 北京大学湍流与复杂系统国家重点实验室开放课题资助
收稿日期: 2019-08-29 修回日期: 2020-03-15

第一作者简介: 王平, 男, 1965 年出生, 博士, 燕山大学, 教授; 研究方向——磁弹性理论及其应用。

E-mail: wangpin0721@163.com

平稳和非平稳随机电流，并得到简支微梁的位移响应均值、自相关函数、功率谱密度函数等。最后针对简支微梁的算例，分析磁场条件、随机电流和本征长度对微梁的磁弹性随机振动的影响。

2 载流微梁的磁弹性振动方程

图 1 所示是一个处于磁场 $B(0, B_y, 0)$ 中长度为 L 的简支微梁，横截面为矩形(高为 h ，宽为 b)，通以电流密度矢量为 $J = [J_{cx}(t), 0, 0]$ 的随机电流。

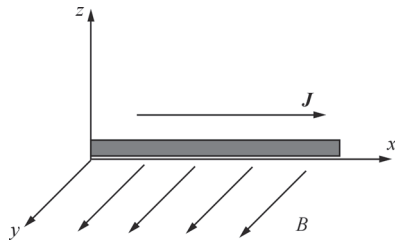


图 1 处于磁场中的载流微梁
Fig.1 Current-carrying micro beams in a magnetic field

修正的偶应力理论可表示载流微梁应变能为

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + m_{ij} \chi_{ij}) dV \quad (1)$$

式中： V 为微梁的变形能； σ_{ij} 为应力张量； ε_{ij} 为应变张量； m_{ij} 为偶应力张量的偏斜部分； χ_{ij} 为旋转梯度张量的对称部分，分别定义为

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2G \varepsilon_{ij}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}),$$

$$m_{ij} = 2l^2 G \chi_{ij}, \quad \chi_{ij} = \frac{1}{2}(w_{ij} + w_{j,i}) \quad (2)$$

式中： λ 为材料的拉梅常数，且 $\lambda = \frac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ ；

G 为剪切模量，且 $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ ； l 为材料的本征长度，在修正的偶应力理论中，本构方程只含有一个新的材料参数，即材料的本征长度，其只依赖于材料的内部微结构； δ_{ij} 为克罗内克符号； E 为材料的弹性模量； ν 为材料的泊松比； u_i 为位移矢量； w_i 为转动矢量。

假设微梁的位移场表示为

$$u_x = -z \frac{\partial w(x,t)}{\partial x}, \quad u_y = 0, \quad u_z = w(x,t) \quad (3)$$

将式(2)、式(3)代入式(1)可得微梁的变形能为

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L (EI + GA l^2) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (4)$$

式中 A 为微梁的截面积。

外力所做的功为

$$W = \int_0^L q(x,t) w(x,t) dx \quad (5)$$

系统的动能为

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \left[\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \right]^2 dx \quad (6)$$

由哈密顿原理有

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta V + \delta W) dt = 0 \quad (7)$$

将式(4)~式(6)代入式(1)可得微梁的横向弯曲振动方程，用横向位移形式 $X(x,t)$ 可表示为

$$\rho A \frac{\partial^2 X(x,t)}{\partial t^2} + (EI + GA l^2) \frac{\partial^4 X(x,t)}{\partial x^4} = q \quad (8)$$

由式(8)及电磁弹性基本理论^[10-11]得到磁场中的微梁的磁弹性振动方程为

$$(GA l^2 + EI) \frac{\partial^4 X(x,t)}{\partial x^4} + c_1 (GA l^2 + EI) \times$$

$$\frac{\partial^5 X(x,t)}{\partial t \partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 X(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial m_x}{\partial x} + f_z + q(x,t) \quad (9)$$

式中： I 为截面的惯性矩； ρ 为微梁的密度； m_x 为电磁力矩； f_z 为电磁力； c_1 为简约内阻尼系数； $q(x,t)$ 为随机载荷。

3 洛伦兹力及力矩计算

利用磁弹性线性化假设，不考虑简支微梁的极化、磁化及位移电流的影响，洛伦兹力可以表示为^[9]

$$f_p = J \times B \quad (10)$$

则有

$$f_p = J_{cx} \times B + J \times B = \begin{bmatrix} iL & j & k \\ J_{cx} & 0 & 0 \\ 0 & B_y & 0 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} i & j & k \\ J_{cx} & 0 & 0 \\ 0 & B_y & 0 \end{bmatrix} = (J_{cx} B_y - J_x B_y) k \quad (11)$$

$$J_x = \sigma_0 \left[e_x + \frac{\partial w}{\partial t} B_y \right] \quad (12)$$

式中： J_x 为载流微梁内感应电流强度沿 x 轴方向的分量； e_x 为感应电场在 x 方向上的分量； σ_0 为电导率； L 为梁的长度。

将式(12)展开，在振动方程的两边对 z 积分就可得到沿坐标轴的洛伦兹力分量 f_x 、 f_y 、 f_z 为

$$f_x = 0, \quad f_y = 0, \quad f_z = \int_{-h/2}^{h/2} (J_{cx} B_y - J_x B_y) dz \quad (13)$$

洛伦兹力的力矩为

$$m_x = \int_{-h/2}^{h/2} f_x z \, dy = 0 \quad (14)$$

将式(12)~式(14)代入式(9), 不考虑外部介质的黏性阻尼和感应电场强度的影响, 则微梁的磁弹性随机振动方程可以重新表示为

$$(GAI^2 + EI) \frac{\partial^4 X(x,t)}{\partial x^4} + c_1(EI + GAI^2) \frac{\partial^5 X(x,t)}{\partial t \partial x^4} = hB_y J_{clx}(t) - \rho A \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial t^2} - \sigma B_y^2 h \frac{\partial W(x,t)}{\partial t} \quad (15)$$

4 载流简支微梁的位移随机响应

4.1 通入平稳随机电流时简支微梁的位移响应

一般随机干扰 $P(x,t)$ 的随机性与时间有关, 而与空间位置无关, 则 $P(x,t)$ 可以表示为^[12]

$$P(x,t) = Q(x)f(t) \quad (16)$$

式中: $Q(x)$ 为位置坐标 x 的确定性函数; $f(t)$ 为时间 t 的平稳或非平稳随机过程。干扰 $P(x,t)$ 的均值和自相关函数分别表示为

$$m_p(x,t) = Q(x)m_f(t) \quad (17)$$

$$R_p(x_1, x_2; t_1, t_2) = E[P(x_1, t_1)P(x_2, t_2)] = Q(x_1)Q(x_2)R_f(t_1, t_2) \quad (18)$$

式中: $m_f(t)$ 为随机过程 $f(t)$ 的均值; $R_f(t_1, t_2)$ 为过程 $f(t)$ 的自相关函数。

将式(15)中的 $\sigma h B_y^2 \frac{\partial X}{\partial t}$ 假设为一种微梁的阻尼, $h B_y J_{clx}(t)$ 假设为一种随机分布载荷 $P(x,t)$; 由式(18)可以得到通入平稳随机电流时分布载荷 $P(x,t)$ 的均值和自相关函数为^[13]

$$Q(x) = h B_y \quad (19)$$

$$m_p(x,t) = h B_y m_{J_{clx}}(t) \quad (20)$$

$$R_p(x_1, x_2; t_1, t_2) = h^2 B_y^2 R_{J_{clx}}(t_1, t_2) \quad (21)$$

式中: $R_{J_{clx}}(t_1, t_2)$ 为外加电流密度分量 J_{clx} 的自相关函数, 是随机电流在两个不同时刻上相关性的度量; $m_{J_{clx}}(t)$ 为 J_{clx} 的均值, 是随机电流的一阶统计性质。此时的随机分布力在时间分布上为非平稳的情形, 而在空间分布上不相关。

微梁的磁弹性随机振动方程式(15)的位移响应

可以表示为

$$X(x,t) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) Y_i(t) \quad (22)$$

式中: $Y_i(t)$ 为与第 i 阶主振型相对应的模态响应; $\phi_i(x)$ 为简支微梁的第 i 阶固有振型。

将位移响应函数式(22)代入到重新表示的微梁磁弹性随机振动方程式(15)中, 在方程的两端乘以 $\phi_i(x)$, 然后对 x 从 0 积分到 L , 可得模态响应 $Y_i(t)$ 的常微分方程^[14]为

$$\ddot{Y}_i(t) + 2\zeta_i \omega_i \dot{Y}_i(t) + \omega_i^2 Y_i(t) = G_i(t), \quad (i=1, 2, 3, \dots) \quad (23)$$

其中 ζ_i 为阻尼比。

$$(EI + GAI^2) \frac{d^4 \phi_i(x)}{dx^4} = \omega_i^2 \rho A \phi_i(x) \quad (24)$$

式中 $G_i(t)$ 可以表示为

$$G_i(t) = \frac{2B_y J_{clx}(t)}{\rho b L} \int_0^L \phi_i(t) \, dx \quad (25)$$

而模态阻尼为

$$2\omega_i \zeta_i = \frac{h B_y^2}{\rho b} + c_1 \omega_i^2 \quad (26)$$

此时 $\zeta_i < 1$ 即为亚系统, 对于大多数工程问题这是真实情况。

假设系统的初始条件为零, 则式(23)的解可以表示为

$$Y_i(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_i(t-\tau) h_i(\tau) \, d\tau \quad (27)$$

式中 $h_i(t)$ 可表示为

$$h_i(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H_i(\omega) e^{j\omega t} \, d\omega \quad (28)$$

频率响应函数 $H_i(\omega)$ 与脉冲响应函数 $h_i(t)$ 构成傅里叶变换对。模态频率响应函数为

$$H_i(\omega) = \frac{1}{\omega_i^2 - \omega^2 + 2j\zeta_i \omega_i \omega} \quad (29)$$

由式(22)的位移响应函数可以表示微梁截面随机位移响应为

$$X(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) \int_{-\infty}^{+\infty} G_i(t-\tau) h_i(\tau) \, d\tau \quad (30)$$

通入平稳随机过程的电流时, 可知此时的 $P(x,t)$ 是平稳的随机函数, 其相关函数只是位移和时间差 τ 的函数, 即 $R_p(x_1, x_2; t_1, t_2) = h^2 B_y^2 R_{J_{clx}}(t_1, t_2)$, 功率谱密度 $S_p(\omega, x_1, x_2) = h^2 B_y^2 S_{J_{clx}}(\omega)$ 。

平稳随机过程的位移响应均值只与时间 t 的一维概率分布有关, 表示为

$$m_{W(x,t)} = E[X(x,t)] = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) \times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^L \frac{2B_y}{\rho b L} \phi_i(v) m_{J_{dx}}(t) h_i(\tau) dv d\tau \quad (31)$$

平稳随机过程 $X(x,t)$ 的均方值 $E[X(x,t)^2]$ 由位移响应功率谱密度 $S_x(x,t)$ 对随机干扰频率的乘积来确定。由于均方值 $E[X(x,t)^2]$ 很小，故可忽略系统的非线性因素的影响。

平稳随机过程的自相关函数为

$$R_W(\tau, x) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \phi_i(x) \phi_j(x) E \left[\int_{-\infty}^{+\infty} G_i(t_1 - \tau_1) \times h_i(\tau_1) d\tau_1 \int_{-\infty}^{+\infty} G_j(t_2 - \tau_2) h_j(\tau_2) d\tau_2 \right] \\ = \frac{B_y^2}{\rho^2 b^2 L^2 \pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \phi_i(x) \phi_j(x) \times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^L \int_0^L [H_i(w)]^2 \phi_i(v_1) \phi_j(v_2) \times S_{J_{dx}}(w_1, w_2) e^{jw\tau} dv_1 dv_2 \quad (32)$$

式中 v 为 x 的移动值，且为 $v = x_2 - x_1$ 。较大的自相关函数值意味着该过程在两个不同时刻上关系更紧密。

将式(29)代入式(32)得位移响应的功率谱密度函数为

$$S_W(w, x) = \left(\frac{B_y^2}{\rho^2 b^2 L^2 \pi^2} \right) \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \phi_i(x) \phi_j(x) \times \int_0^L \int_0^L [H_i(w)]^2 \phi_i(v_1) \phi_j(v_2) S_{J_{dx}}(w) dv_1 dv_2 \\ = \frac{S_0 B_y^2}{\rho^2 L^2 b^2 \pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\phi_i^2(x) \left(\int_0^L \phi_i^2 dx \right)}{(w_i^2 - w^2)^2 + (2\zeta_i w_i w)^2} \quad (33)$$

4.2 通入非平稳随机电流时简支微梁的位移响应

非平稳随机过程位移响应的相关函数为

$$R_W(t_1, t_2, x) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \phi_i(x) \phi_j(x) E \left[\int_{-\infty}^{+\infty} G_i(t_1 - \tau_1) \times h_i(\tau_1) d\tau_1 \int_{-\infty}^{+\infty} G_j(t_2 - \tau_2) h_j(\tau_2) d\tau_2 \right] \\ = \frac{B_y^2}{\rho^2 L^2 b^2 \pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \phi_i(x) \phi_j(x) \times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^L \int_0^L H_i(w_1) H_j(-w_2) \phi_i(v_1) \times \phi_j(v_2) S_{J_{dx}}(w_1, w_2) e^{j(w_1 t_1 - w_2 t_2)} \times dv_1 dv_2 d\tau_1 d\tau_2 \quad (34)$$

非平稳随机过程的位移响应功率谱密度函数为

$$S_W(w_1, w_2, x) = \left(\frac{B_y^2}{\rho^2 b^2 L^2 \pi^2} \right) \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \phi_i(x) \phi_j(x) \times \int_0^L \int_0^L H_i(w_1) H_j(-w_2) \phi_i(v_1) \phi_j(v_2) \times S_{J_{dx}}(w_1, w_2) dv_1 dv_2 \quad (35)$$

将模态响应函数式(29)代入式(35)中得

$$S_W(w_1, w_2, x) = S_{J_{dx}}(J_1, J_2) \frac{B_y^2}{\rho^2 b^2 L^2 \pi^2} \times \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\phi_i^2(x) \left(\int_0^L \phi_i^2 dx \right)}{(w_i^2 - w_1^2 + 2\zeta_i w_i w_1 j) - (w_i^2 - w_2^2 - 2\zeta_i w_i w_2 j)} \quad (36)$$

4.3 简支微梁的固有频率和固有振型

由式(33)和式(36)可看出位移功率谱函数受简支微梁的固有频率和固有振型的影响，由于 $X(x,t)$ 是坐标 x 和时间 t 的函数，采用分离变量法来求解方程^[15]。假设有

$$X(x,t) = W(x)T(t) \quad (37)$$

采用分离变量法将式(37)代入到不受外力的微梁的控制方程中得到

$$-\frac{EI + GAL^2}{\rho A} \frac{d^4 X(x)}{dx^4} = \frac{dT^2(t)}{dt^2} T(t) \quad (38)$$

将式(38)等号左右两端同时乘以 $-p^2$ 。于是，便得到了两个分别关于 $W(x)$ 和 $T(t)$ 的常微分方程，其中关于 $W(t)$ 的方程为

$$(EI + GAL^2) \frac{d^4 X(x)}{dx^4} - \rho A p^2 X(x) = 0 \quad (39)$$

在微梁为等截面直梁的情况下，其解的形式为

$$W(x) = C_1 \sin(kx) + C_2 \cos(kx) + C_3 \sinh(kx) + C_4 \cosh(kx) \quad (40)$$

其中

$$k = \left(\frac{\rho A p^2}{EI + GAL^2} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (41)$$

而 $C_i (i=1,2,3,4,\dots)$ 均为待定常数，需要结合具体的边界条件来确定。

以长度为 L 的简支梁为例，其边界条件可表示为

$$X(0) = 0, \quad \frac{\partial X^2(0)}{\partial x^2} = 0, \\ X(L) = 0, \quad \frac{\partial X^2(L)}{\partial x^2} = 0 \quad (42)$$

可得

$$\sin(kL) = 0 \quad (43)$$

这就是简支微梁的频率方程。

求解得

$$k = \frac{i\pi}{L}, \quad (i = 1, 2, 3, \dots) \quad (44)$$

则可得

$$w_i = \sqrt{\frac{EI + GAl^2}{\rho AL^4}} (i\pi)^2 \quad (45)$$

简支微梁对应的振型函数为

$$\phi_i(x) = \sin \frac{i\pi}{L} x, \quad i = (1, 2, 3, \dots) \quad (46)$$

5 算例分析

作为算例, 取一简支微梁, 微梁的本征长度 $l = 2 \times 10^{-6} \text{ m}$, 梁长 $L = 8 \times 10^{-3} \text{ m}$, 横截面高度 $h = 1 \times 10^{-5} \text{ m}$, 宽度 $b = 2 \times 10^{-5} \text{ m}$, 材料的密度 $\rho = 2.70 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, 弹性模量 $E = 70.06 \text{ GPa}$, 剪切模量 $G = 0.425E$, 简约内阻尼系数 $c_1 = 0.04$, 电磁场的特征参数 $B_y = 4 \text{ T}$, 电导率 $\sigma = 6 \times 10^7 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ 。若考虑外加电流密度分量 $J_{cx}(t)$ 的功率谱密度为一个常数, 即 $S_{J_{cx}}(\omega) = 2 \times 10^6 (\text{A/m}^2)^2 \text{ Hz}$, 此时的激励为平稳随机激励, 且为理想的白噪声。只考虑简支微梁的前一阶的固有频率和固有振型, 即

$$\sum_{i=1}^n \phi_i(x) = \sin \frac{\pi}{L} x \quad (47)$$

$$w_1 = \sqrt{\frac{EI + GAl^2}{\rho AL^4}} \pi^2 = 784 \text{ rad/s} \quad (48)$$

5.1 耦合项对微梁各点的位移功率谱密度的影响

将式(47)、式(48)、式(26)和 $x = L/2$ 、 $x = L/4$ 、 $x = L/6$ 分别代入式(33)即可计算出梁上 3 点的功率谱密度函数并绘制出图 2。

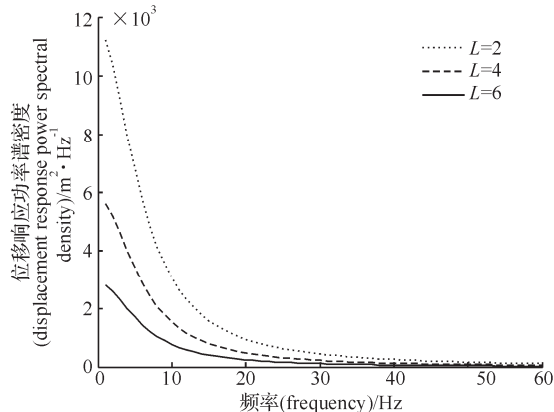


图 2 简支微梁各点位移响应功率谱密度图
Fig.2 Displacement response power spectral density map of simply supported micro-beam

将式(26)的耦合项 $\left(\frac{\sigma B_x^2}{\rho}\right)$ 去掉, 代入相同的参

数, 可以得到不考虑耦合项时微梁各点的位移功率谱密度如图 3 所示。

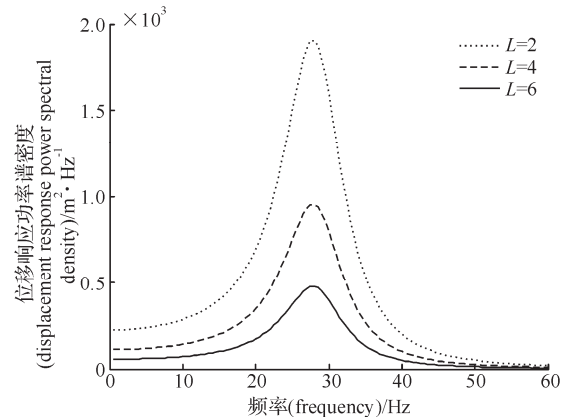


图 3 不考虑耦合项时简支微梁各点的位移响应功率谱密度图
Fig.3 Displacement response power spectral density map of simply supported micro-beam ignoring coupled parts

功率谱密度反映随机过程在频率域内各频率点上关于幅值的统计信息, 也可以反映随机过程振动能量在频率域上的分布, 并且在频率域内的变化都是连续的, 对于平稳随机过程其功率谱是确定的。由图 2 可知, 振动能量主要分布在 0Hz~20Hz 带宽范围内, 随着频率的增加, 振动能量近似呈反比例函数减少, 形成单边带随机过程。

比较图 2 和图 3, 当不考虑式(26)的耦合项时, 位移响应功率谱密度发生了很大的变化, 耦合项对于微梁的振动响应能量影响很大, 振动能量响应近似呈正态分布, 振动能量响应带宽主要分布在 0Hz~45Hz 之间, 并且频率在 28Hz 邻域时达到峰值且衰减得最快; 当不考虑耦合项时, 越接近微梁中间位置, 平稳随机过程的振动能量集中在狭小的尖峰上, 形成窄带随机过程, 随机性逐渐减弱。

5.2 随机电流对微梁位移功率谱密度的影响

考虑外加电流为平稳随机电流, 分别取电流密度分量 $J_{cx}(t)$ 的功率谱密度为 $S_1 = 2 \times 10^6 (\text{A/m}^2)^2 \text{ Hz}$ 、 $S_2 = 4 \times 10^6 (\text{A/m}^2)^2 \text{ Hz}$ 、 $S_3 = 8 \times 10^6 (\text{A/m}^2)^2 \text{ Hz}$ 。将式(47)、式(48)及 $x = L/2$ 和各参数代入式(33)即可计算出简支微梁各电流密度分量下的位移功率谱密度并得到图 4。

图 4 反映出不同的随机电流情况下, 位移功率谱密度函数呈现相同的变化趋势; 在振动能量带宽范围内, 随着频率的增加, 振动能量也随之降低; 振动能量响应主要分布在 0Hz~40Hz 带宽范围内; 在相同的频率下, 随机电流越大, 则振动能量的响应值越大;

随着随机电流的增大, 振动能量曲线衰减增快, 此时平稳随机过程所包含的频率会更加丰富。

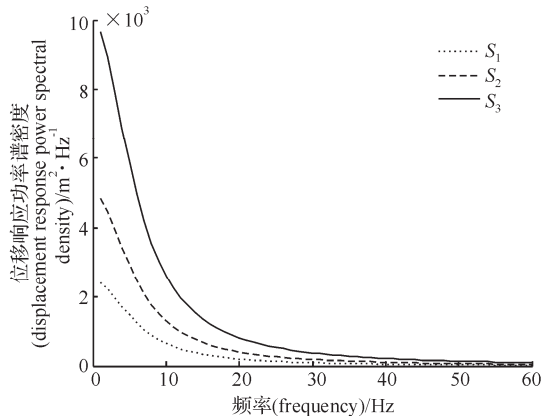


图4 不同随机电流下简支微梁的位移响应功率谱密度图
Fig.4 Displacement corresponding power spectral density map of simply supported micro-beams under different stochastic currents

5.3 磁场强度对微梁位移功率谱密度的影响

将式(26)和式(47)以及 $S_{J_{ctx}}(w) = 2 \times 10^6 (A/m^2)^2 Hz$ 、 $x = L/2$ 还有以上各参数代入式(33), 分别取磁场条件 $B_1 = 3T$ 、 $B_2 = 4T$ 、 $B_3 = 5T$ 即可计算出不同磁场条件下简支微梁的功率谱密度函数并得到图 5。

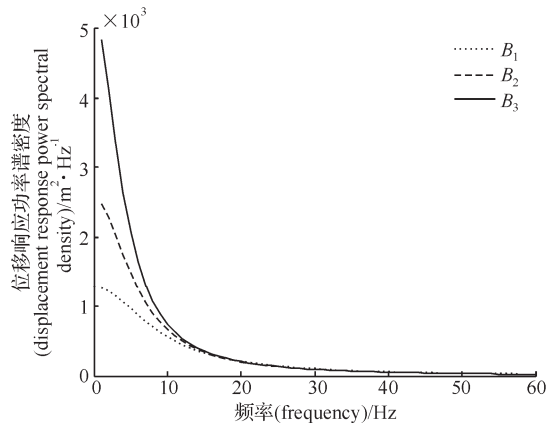


图5 不同磁场条件下简支微梁的位移响应功率谱密度图
Fig.5 Displacement corresponding power spectral density map of simply supported micro-beams under different magnetic field conditions

图 5 中振动能量主要分布在 0Hz~20Hz 范围内, 磁场强度越大, 振动能量随之增大; 当频率在大于 15Hz 的带宽范围内, 振动能量不再受磁场强度的影响。因此, 为了实现结构减震, 可以选择合适的磁场强度。图 4 中的位移功率谱密度函数数值在 $0m^2/Hz \sim 9.6m^2/Hz$ 之间, 而图 5 功率谱密度函数数值在 $0m^2/Hz \sim 4.6m^2/Hz$ 。表明随机电流对振动响应能量的影响较大, 使得平稳随机过程所包含的频率变得更加丰富。

5.4 本征长度变化对微梁位移功率谱密度的影响

将式(36)、式(47)以及 $S_{J_{ctx}}(w) = 2 \times 10^6 (A/m^2)^2 Hz$ 、

$x = L/2$ 还有以上各参数代入式(33), 分别取本征长度 l 为 $0\mu m$ 、 $1\mu m$ 、 $2\mu m$ 即可计算出不同本征长度下简支微梁的功率谱密度函数并得到图 6。

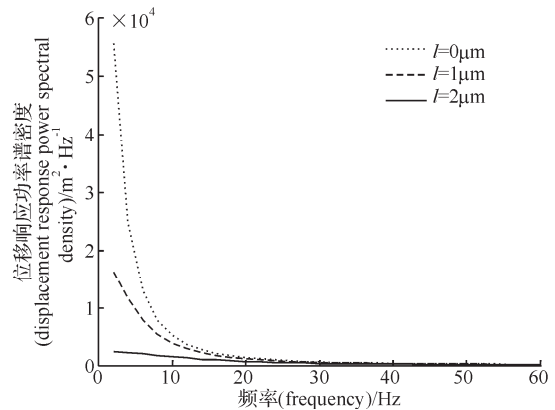


图6 不同本征长度下简支微梁的位移响应功率谱密度图
Fig.6 Displacement response power spectral density map of simply supported microbeams with different eigen lengths

图 6 中 $l = 0\mu m$ 对应的曲线为经典弹性理论下的功率谱密度函数图形, 该图形与经典理论下导电梁在磁场中的磁弹性随机振动^[16]图形的趋势一致。对比图 6 中 3 条本征长度所模拟出的曲线, 存在非常大的差异; 振动能量主要分布在 0Hz~20Hz 范围内, 本征长度越大振动能量随之减小; 随着本征长度值的增大, 所对应的曲线变化逐渐趋于平缓, 这是由于本征长度的增加直接引起简支微梁固有频率的增加, 进而影响位移功率谱密度函数的趋势。因此, 选择不同本征长度的微梁可以改变其稳定性。

6 结论

本文对处于横向磁场中通入平稳和非平稳随机电流的简支微梁随机振动问题进行了研究, 得到的主要结论如下。

- 1) 根据磁弹性理论和修正的偶应力理论, 推导出了载流简支微梁在外加磁场中的随机振动方程。利用以随机干扰的相关函数为基础的模态分析法, 得到了简支微梁的位移功率谱密度函数。
- 2) 针对具体算例, 对磁场中通入平稳随机电流的简支微梁进行了随机响应分析, 讨论了耦合项、随机电流、磁场强度和本征长度对位移功率谱密度的影响。数值模拟表明: 简支微梁的振动能量随着随机电流、磁感应强度的增加而增大, 但随着本征长度的增加而降低; 当不考虑耦合项时, 越接近微梁中心的位置, 宽带随机过程逐渐演变成窄带随机过程, 随机性变弱; 另外耦合项的存在使得振动响应能量发生了很大的变化, 对微梁的疲劳寿命会产生

显著的影响。此体系中的简支微梁固有频率没有位于干扰谱密度具有较大值的频率范围内, 所以此结构不会产生严重的振动。这一结论为结构设计选择简支微梁固有频率所处的范围提供了依据。

3) 在频率域内, 通过改变随机电流和磁场强度来改变振动能量的分布规律, 进而可以达到控制微梁随机振动的目的, 可以在微机械系统结构检测和故障诊断等问题中起到积极作用。

参 考 文 献 (References)

- [1] 谢新吉. 微梁动力学特性的尺寸效应研究[D]. 重庆: 重庆大学, 2017. (XIE Xinji. Study on scale effect of the dynamic characteristic of micro-beam[D]. Chongqing: Chongqing University, 2017(in Chinese)).
- [2] 孔胜利. 微梁力学性能尺寸效应的研究[D]. 山东: 山东大学, 2009. (KONG Shengli. Size effect on mechanical properties of micro-beams[D]. Shandong: Shandong University, 2009(in Chinese)).
- [3] 孔胜利, 周慎杰, 聂志峰, 等. 基于偶应力理论的压杆屈曲载荷的尺寸效应[J]. 机械强度, 2009, 31(1): 136-139. (KONG Shengli, ZHOU Shenjie, NIE Zhifeng, et al. Size effect on the buckling loads of slender columns based on a modified couple stress theory[J]. Journal of mechanical strength, 2009, 31(1): 136-139(in Chinese)).
- [4] 丁楠. 微型机械构件的若干非线性力学问题研究[D]. 吉林: 吉林大学, 2017. (DING Nan. Studies on the nonlinear mechanical problems of the micromechanical components[D]. Jilin: Jilin University, 2017(in Chinese)).
- [5] ASGHARI M, AHMADIAN M T, KAHROBAIYAN M H, et al. On the size-dependent behavior of functionally graded micro-beams[J]. Materials & design, 2010, 31(5): 2324-2329.
- [6] KONG Shengli, ZHOU Shenjie, NIE Zhifeng, et al. The size-dependent natural frequency of Bernoulli-Euler micro-beams[J]. International journal of engineering science, 2008, 46(5): 427-437.
- [7] 李明, 周攀峰, 郑慧明. 磁敏固支载流单壁碳纳米管在轴向磁场中的振动特性[J]. 应用力学学报, 2017, 34(4): 634-640. (LI Ming, ZHOU Panfeng, ZHENG Huiming. Vibration characteristics of magnetically sensitive clamped-clamped carbon nanotubes conveying fluid subjected to a longitudinal magnetic field[J]. Chinese journal of applied mechanics, 2017, 34(4): 634-640(in Chinese)).
- [8] 廖俊, 孔宪仁, 徐大富, 等. 基于正交分解法的非平稳随机振动响应计算[J]. 宇航学报, 2010, 31(12): 2651-2656. (LIAO Jun, KONG Xianren, XU Dafu, et al. Orthogonal decomposition method-based non-stationary random vibration response[J]. Journal of astronautics, 2010, 31(12): 2651-2656(in Chinese)).
- [9] 徐瑞, 苏成. 结构非平稳随机响应的快速虚拟激励法[J]. 计算力学学报, 2012, 27(5): 822-827. (XU Rui, SU Cheng. Fast pseudo-excitation method in structural non-stationary stochastic response analysis[J]. Chinese journal of computational mechanics, 2012, 27(5): 822-827(in Chinese)).
- [10] 白象忠, 田振国. 板壳磁弹性力学基础[M]. 北京: 科学出版社, 2006: 176-178. (BAI Xiangzhong, TIAN Zhengguo. Fundamental magneto-elastic theory of plates and shells[M]. Beijing: Sciences Press, 2006: 176-178(in Chinese)).
- [11] 胡宇达, 白象忠. 磁场环境对导电薄板磁弹性振动的影响[J]. 非线性动力学学报, 1999, 6(2): 134-138. (HU Yuda, BAI Xiangzhong. The effects of magnetic field upon the magneto-elastic vibration of thin conductive plate[J]. Journal of nonlinear dynamics, 1999, 6(2): 134-138(in Chinese)).
- [12] 胡津亚, 曾三元. 现代随机振动[M]. 北京: 中国铁道出版社, 1989: 82-85. (HU Jinya, ZENG Sanyuan. Modern random vibration[M]. Beijing: China Railway Publishing House, 1989: 82-85(in Chinese)).
- [13] 朱位秋, 蔡国强. 随机动力学引论[M]. 北京: 科学出版社, 2017: 115-118. (ZHU Weiqiu, CAI Guoqiang. Introduction to stochastic dynamics[M]. Beijing: Sciences Press, 2017: 115-118(in Chinese)).
- [14] 康新, 席占稳. 基于 Cosserat 理论的微梁振动特性的尺度效应[J]. 机械强度, 2007, 29(1): 1-4. (KANG Xin, XI Zhanwen. Size effect on the dynamic characteristic of a micro beam based on Cosserat theory[J]. Journal of mechanical strength, 2007, 29(1): 1-4(in Chinese)).
- [15] 欧进萍, 王光远. 结构随机振动[M]. 北京: 高等教育出版社, 1998: 167-168. (OU Jinping, WANG Guangyuan. Random vibration of structures[M]. Beijing: Higher Education Press, 1998: 167-168(in Chinese)).
- [16] 王平, 李晓靓, 白象忠, 等. 导电梁在磁场中的磁弹性随机振动[J]. 振动与冲击, 2007, 26(3): 75-78, 95. (WANG Ping, LI Xiaoliang, BAI Xiangzhong, et al. Magneto-elastic random vibration of an electro-conductive beam in magnetic field[J]. Journal of vibration and shock, 2007, 26(3): 75-78, 95(in Chinese)).

trapezoidal acceleration and braking. At the same time, the dynamic characteristics driven by frequency conversion motor of the system are studied. Results show that the dynamic lifting coefficient increases linearly with the initial speed of the lifting mass from the ground, which has the greatest impact. There is coupling consistency in the hoisting system, its vibration responses change abruptly when the acceleration changes, the maximum amplitude occurs in the hoisting acceleration stage, and the residual vibration exists when the lifting load speed drops to zero. The frequency of hoisting system increases with the decrease of the rope length. Compared with the lifting of the load with the step speed regulation, the stepless speed regulation lifting of the variable frequency motor is more stable. The rated lifting acceleration time has an exponential relationship with the dynamic lifting coefficient, which should be set after the first inflection point. The rated lifting speed has a linear proportional relationship with the dynamic lifting coefficient, and its influence is less. And its parameter should be set in compromise to ensure the lifting efficiency and stability.

Keywords: *quayside container crane, variable length wire rope, coupled vibration, lifting system, dynamic characteristics.*

Investigation and experimental verification of a soft rock creep model at the effect of temperature and confining pressure

Wang Yongyan Wang Hongwei Cui Lizhuang Qin Nan

(College of Electromechanical Engineering, Qingdao University of Science and Technology, 266100, Qingdao, China)

Abstract: The creep characteristic of soft rock is influenced by the occurrence environment. Both temperature and confining pressure have significant effect on creep strain and creep rate. Based on the Nishihara model, damage variable considering the influence of temperature and confining pressure is introduced to the new creep model to describe the influence of temperature and confining on soft rock's creep characteristics and the visco-plastic element in Nishihara model is replaced by nonlinear visco-plastic element, then the new creep model is obtained. The new creep model can reflect the primary creep phase, steady-state creep phase and the accelerated creep phase, also can reflect the influence of temperature and confining pressure properly. The creep experiments are carried out under different temperature and confining pressure and verification is done with the new creep model via triaxial creep tests under different temperatures and confining pressures. The results show that fitting degree between fitting curves and experimental data is appropriate and the new creep model can describe the creep characteristics properly at the influence of temperature and confining pressures.

Keywords: *temperature, confining pressure, creep model, nonlinear, Nishihara model.*

Magneto-elastic random vibration of a current carrying simply supported micro-beam in a magnetic field

Wang Ping^{1,2,3} Wang Dongxian^{1,2} Yao Jie^{1,2}

(1 College of Sciences, Yanshan University, 066004, Qinhuangdao, China; 2 Key Laboratory of Mechanical Reliability for Heavy Equipments and Large Structures of Hebei Province, 066004, Qinhuangdao, China; 3 The State Key Laboratory of Nonlinear Continuum Mechanics (LNM), 100080, Beijing, China)

Abstract: The random vibration of simply supported micro-beam in magnetic field is studied in this paper. Based on the modified couple stress theory and magneto-elastic theory, the motion equations of downloading micro-beam in the external magnetic field is established, and the magneto-elastic random vibration equations of micro-beam is derived. The mean value of the random displacement response and the power spectral density function of the beam

under the condition of external magnetic field are obtained by using the modal analysis method. An example of a simply supported micro-beam with steady random current is giving, and the power spectral density diagram of displacement response under different random current, magnetic field strength and intrinsic length are drawn. The results show that the random vibration of the micro-beam can be controlled by controlling the intensity of the random current and magnetic field.

Keywords: *random vibration, simply supported micro-beam, magneto-elastic theory, power spectral density function.*

Dynamic topological optimal design of aerospace structure with frequencies constraints

Wang Duanyi^{1,2} Xu Wentao³

(1 School of Intelligence Manufacturing, Jiangsu Vocational Institute of Architectural Technology, 221116, Xuzhou, China;

2 School of Mechanical Engineering, Beijing Institute of Technology, 100081, Beijing, China;

3 School of Mechanics and Safety Engineering, Zhengzhou University, 450001, Zhengzhou, China)

Abstract: In this paper, the Independent, Continuous and Mapping (ICM) Method and Pseudo Excitation Method (PEM) are used to solve the model of topology optimization for high-damping structures in aerospace engineering. The objective of the topology optimization is to minimize the weight subjected to frequency constraints. Exponential function is adopted as the filtering function of the element weight, mass matrix and stiffness matrix. The optimization model is transferred into a dual optimization model. In this method, Rayleigh quotient and Taylor expansion are used to explicitly deal with the frequency constraints, which is solved by the sequential quadratic programming (SQP). In numerical examples, the topology optimization of an engineering support structure is analyzed, the optimization results avoid the preset frequency constraints, and realize the weight loss of 36.17% under the deformation constraints, which completes the optimization task and verifies the effectiveness of the presented method.

Keywords: *pseudo excitation method, magnesium alloy material, frequency optimization, topology optimization.*

Mechanical analysis of microcapsules in self-healing asphalt pavement based on multi-scale model

Zhu Yuefeng^{1,2,3} Si Chundi^{1,2,3} Zhang Hongliang⁴ Qiao Yaning⁵ Li Yanwei^{6,7} Zhang Zengping⁴

(1 State Key Laboratory of Mechanical Behavior and System Safety of Traffic Engineering Structures, Shijiazhuang Tiedao University, 050043, Shijiazhuang,

China; 2 Key Laboratory of Traffic Safety and Control of Hebei Province, 050043, Shijiazhuang, China; 3 School of Traffic and Transportation, Shijiazhuang

Tiedao University, 050043, Shijiazhuang, China; 4 School of Highway, Chang'an University, 710064, Xi'an, China; 5 School of Mechanics and Civil

Engineering, China University of Mining and Technology, 221116, Xuzhou, China; 6 Hebei Provincial Communications Planning and Design Institute, 050043,

Shijiazhuang, China; 7 Research and Development Center of Transport Industry of Technologies, Materials and Equipments of Highway Construction and

Maintenance, 050043, Shijiazhuang, China)

Abstract: Microcapsules made of polymer composites were found to be an effective additives for self-healing of asphalt concrete pavements, however, the self-healing mechanism and multi-scale modeling of microcapsules in asphalt mixtures has not been completely understood. In this study, a multi-scale model for asphalt pavements with microcapsules is established, from macro to meso and then to micro-scale, using the discrete element method. The mechanical responses of microcapsules are analyzed under simulated heavy traffic load. Then, a mechanical model