

四边简支载流纳米板的磁弹性稳定问题分析

王平^{1,2,3} 姚杰^{1,2} 王东贤^{1,2}

(1 燕山大学 建筑工程与力学学院 066004 秦皇岛; 2 燕山大学 河北省重型装备与大型结构力学可靠性重点实验室 066004 秦皇岛;
3 中国科学院力学研究所 非线性力学国家重点实验室(LNM) 100080 北京)

摘要: 研究四边简支载流纳米板在电磁场及机械载荷作用下的磁弹性稳定问题。结合非局部理论与板壳磁弹性理论, 导出考虑尺度效应的纳米板的磁弹性动力学方程, 得出载流纳米板在磁场及机械载荷作用下的磁弹性动力稳定方程; 利用伽辽金原理将稳定性方程整理为特殊函数马丢方程的标准形式, 根据其系数的本征值关系, 判别磁弹性稳定问题的最低失稳临界状态; 通过数值模拟得到纳米板失稳临界电流密度与相关参数之间的关系图及变化规律。结果表明: 磁感应强度、板长与板厚、外加机械载荷及小尺度参数均会影响纳米板的稳定性; 当小尺度参数取 1nm 时, 板长在 200nm~450nm、板厚在 1nm~10nm 的区间内, 纳米板的稳定性随着磁感应强度、板长及板厚的变化而急剧变化。在这个灵敏区间内改变磁感应强度、板长及板厚的大小, 可以有效地提高纳米板的稳定性。

关键词: 纳米板; 尺度效应; 磁弹性; 稳定性; 马丢方程

中图分类号: O441.4; O324 **文献标识码:** A **DOI:** 10.11776/cjam.37.05.D058

1 引言

现如今各种高新技术装置普遍利用铁磁、压电、导体等材料制成, 关于结构的磁弹性稳定问题日益突显。各种机械装置、集成电路越来越趋于微型化, 如微泵、微马达、微纳米传感器、微纳米芯片等。当系统的特征尺寸达到微纳米级别时, 实验已经证明微结构中的许多物理现象与宏观世界有明显差别, 这就是微结构所呈现出的尺寸效应^[1]。目前微纳米结构尺寸效应的研究已十分广泛, 文献[2]在偶应力理论的基础上, 研究微梁振动特性的尺度效应, 分析了微梁固有频率对微尺度的依赖性。文

献[3]应用应变梯度弹性理论, 建立微板尺寸效应模型, 研究了微板的静态变形和固有频率的尺寸效应。文献[4]提出了一种非局部弹性动力学模型, 研究了欧拉-伯努利微纳米尺度梁的振动特性。文献[5]采用非局部弹性理论研究了单壁固支载流碳纳米管在小尺度效应下的振动、失稳问题。文献[6]基于非局部 Mindlin 板理论给出了矩形纳米板屈曲分析的解析解。文献[7]应用非局部理论建立非局部压电纳米板模型, 研究了纳米板的振动与稳定性问题。

磁弹性稳定问题也受到了国内外许多学者的关注。文献[8]研究了处于平行均匀磁场中的直导线在通入电流时的线性磁弹性稳定问题。文献[9]研究了载流结构、铁磁结构的磁弹性稳定问题, 给出了

基金项目: 河北省自然科学基金(A2016203101); 河北省高等学校科学技术研究青年基金; 北京大学湍流与复杂系统国家重点实验室开放课题
收稿日期: 2019-05-07 修回日期: 2019-12-12
第一作者简介: 王平, 男, 1965 年生, 博士, 燕山大学建筑工程与力学学院, 教授; 研究方向——磁弹性理论及其应用。
E-mail: wangpin0721@163.com

变分原理及临界值的显式表达式。文献[10]对简支铁磁矩形板在外加磁场作用下的磁弹塑性稳定性进行了分析。文献[11]基于 Eringen 的非局部弹性理论, 研究了载流纳米线在纵向磁场中的三维屈曲行为。文献[12]讨论了在均匀横向磁场中薄而软的铁磁弹性板的稳定性问题。文献[13]提出了一种能量理论, 研究了铁磁薄板在横向静磁场中的稳定性问题, 用变分法求出了板的临界场的解析解。文献[14]系统地研究了各种边界条件下板的磁弹性稳定问题。

就目前的研究成果来看, 对于磁弹性稳定问题的研究主要集中在宏观的圆环、直杆、薄板等方面, 尚未见到关于微板的磁弹性稳定性的分析和研究。本文针对考虑尺寸效应的载流纳米板, 研究四边简支载流纳米板在磁场及机械载荷作用下的磁弹性稳定问题, 探讨磁感应强度、板长与板厚及机械载荷的大小与纳米板稳定性的关系。

2 基本方程

非局部弹性问题的基本方程为^[15]

$$\begin{cases} \sigma'_{ij,j} = 0 \\ \sigma'_{ij,j}(x) = \int \chi(|x-x'|, \alpha) C_{ijkl} \varepsilon_{kl}(x') d\Omega(x'), \forall x \in \Omega \\ \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \end{cases} \quad (1)$$

式中: $\sigma'_{ij,j}$ 、 ε_{ij} 、 C_{ijkl} 分别为非局部应力张量、经典应变张量和四阶弹性张量; $u_{i,j}$ 表示 i 方向位移张量对 j 求偏导; $u_{j,i}$ 表示 j 方向位移张量对 i 求偏导; Ω 为非局部体积积分域; 积分核 $\chi(|x-x'|, \alpha)$ 为非局部弹性模量, $|x-x'|$ 为欧式距离, $\alpha = e_0 \xi$, ξ 为材料内部特征尺度(如晶体点阵参数、微观粒子几何半径等), e_0 为非局部材料常数。非局部弹性模量表示了微结构内部各点之间长程作用效果。

对于上述方程, Eringen 给出了如下微分表达式^[16]。

$$[1 - (e_0 \xi)^2 \nabla^2] \sigma'_{ij,j} = \sigma_{ij} \quad (2)$$

式中: $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 为拉普拉斯算子; σ_{ij} 为经典应力。

将上式中的经典应力作为非局部应力的零阶近似, 做无穷次迭代并取极限可得非局部应力的级数表达式^[17], 即

$$\begin{aligned} \sigma'_{ij,j} &= \sigma_{ij} + (e_0 \xi)^2 \nabla^2 \sigma_{ij} + (e_0 \xi)^4 \nabla^4 \sigma_{ij} + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (e_0 \xi)^{2k} \nabla^{2k} \sigma_{ij} \end{aligned} \quad (3)$$

根据基尔霍夫板理论, 板内任意一点 (x, y, z) 沿 x 、 y 方向的位移分别为

$$\begin{cases} U(x, y, z, t) = u(x, y, t) - z \frac{\partial w}{\partial x} \\ V(x, y, z, t) = v(x, y, t) - z \frac{\partial w}{\partial y} \end{cases} \quad (4)$$

式中: u 、 v 、 w 分别表示板中面变形后在 x 、 y 、 z 方向的位移; U 、 V 为板内任意一点沿 x 、 y 方向变形后的位移。

应变分量可确定为

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{cases} \quad (5)$$

式中: ε_x 、 ε_y 分别为 x 、 y 方向的正应变; γ_{xy} 为切应变。

板的物理方程为

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y) \\ \sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_y + \mu \varepsilon_x) \\ \tau_{xy} = G \gamma_{xy} \end{cases} \quad (6)$$

式中: σ_x 、 σ_y 分别为 x 、 y 方向的正应力; τ_{xy} 为切应力; E 、 G 、 μ 分别为拉伸弹性模量、剪切弹性模量、泊松比, 且满足 $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$ 。

内力偶矩表达式为

$$\begin{cases} M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma_x dz \\ M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma_y dz \\ M_{xy} = M_{yx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \tau_{xy} dz \end{cases} \quad (7)$$

式中: M_x 、 M_y 分别为 x 、 y 方向的弯矩; M_{xy} 为扭矩; h 为板厚。

将式(3)~式(6)代入式(7)可得非局部内力偶矩, 即

$$\begin{cases} M_x = -D \sum_{k=0}^{\infty} (e_0 \xi)^{2k} \nabla^{2k} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ M_y = -D \sum_{k=0}^{\infty} (e_0 \xi)^{2k} \nabla^{2k} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ M_{xy} = -D(1-\mu) \sum_{k=0}^{\infty} (e_0 \xi)^{2k} \nabla^{2k} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{cases} \quad (8)$$

式中 D 为板的抗弯刚度，其表达式为

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$$

板的磁弹性运动方程为^[14]

$$\begin{cases} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} + P_x + \rho f_x = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + P_y + \rho f_y = \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \\ P_z + \rho f_z = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} - Q_x = \frac{\rho h}{12} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} \\ \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = \frac{\rho h}{12} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial t^2} \end{cases} \quad (9)$$

式中： N_{xy} 为平错力； N 、 Q (下标为 x 或 y) 分别为板中面上单位长度上的轴向力和剪力； P 、 n (下标为 x 、 y 、 z) 分别为 x 、 y 、 z 方向上的外加荷载、单位体积力； ρ 为材料的质量密度， ρf_x 、 ρf_y 、 ρf_z 分别为 x 、 y 、 z 方向的洛伦兹力。

洛伦兹力表达式为^[14]

$$\begin{cases} \rho f_x = -\frac{\partial H_z}{\partial x} h B_z + (H_x^+ - H_x^-) B_z + J_y h B_z \\ \rho f_y = -\frac{\partial H_z}{\partial y} h B_z + (H_y^+ - H_y^-) B_z - J_x h B_z \\ \rho f_z = \frac{h(B_y^+ + B_y^-)}{2} \left[\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{(H_y^+ - H_y^-)}{h} + J_x \right] + \\ \frac{\psi h^2 (B_y^+ - B_y^-)}{12} \left[\frac{\partial \theta_y}{\partial t} B_z - \frac{\partial w}{\partial t} \frac{(B_y^+ - B_y^-)}{h} \right] - \\ \frac{h(B_x^+ + B_x^-)}{2} \left[-\frac{\partial H_z}{\partial x} + \frac{(H_x^+ - H_x^-)}{h} + J_y \right] + \\ \frac{\psi h^2 (B_x^+ - B_x^-)}{12} \left[\frac{\partial \theta_x}{\partial t} B_z - \frac{\partial w}{\partial t} \frac{(B_x^+ - B_x^-)}{h} \right] \end{cases} \quad (10)$$

式中： H_x^+ 、 H_x^- 、 H_y^+ 、 H_y^- 、 H_z 分别为板上下表面处沿 x 、 y 、 z 方向的磁场强度分量； B_x^+ 、 B_x^- 、 B_y^+ 、 B_y^- 、 B_z 分别为板上下表面处沿 x 、 y 、 z 方向的磁感应强度分量； J_x 、 J_y 分别为外加侧向电流强度沿坐标轴方向的分量； ψ 为电导率； θ_x 、 θ_y 分别为板在 x 、 y 方向的转角。

将式(9)中后两式代入第三式，合并整理并略去转动惯性项可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \\ N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + P_z + \rho f_z = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (11)$$

将式(8)代入式(11)整理可得

$$\begin{aligned} -D \sum_{k=0}^{\infty} (e_0 \xi)^{2k} \nabla^{2k} \nabla^4 w + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \\ N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + P_z + \rho f_z = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (12)$$

式(12)就是基于非局部弹性理论的纳米板的磁弹性动力稳定方程。

3 失稳临界状态的判别

如图1所示，四边简支矩形纳米板的长度为 a 、宽度为 b 、厚度为 h ，通侧向电流 $(0, J_y, 0)$ 处于外加横向磁场 $(0, 0, B_z)$ 中。

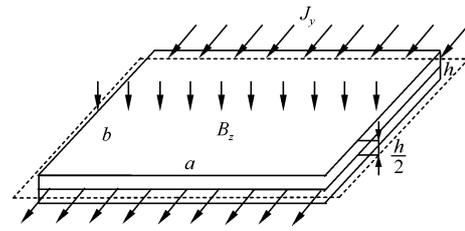


图1 简支矩形纳米板上电流磁场分布图
Fig.1 Distribution of current magnetic field on simply supported rectangular nano-plate

其边界条件为

$$\begin{cases} x=0, a: w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \\ y=0, b: w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \end{cases} \quad (13)$$

令磁弹性动力稳定方程屈曲挠度解为

$$w(x, y, t) = W(x, y) \Theta(t)$$

代入式(12)可得

$$-\frac{\sum_{k=0}^{\infty} (e_0 \xi)^{2k} \nabla^{2k} \nabla^4 W}{W} + \frac{1}{DW} \left[N_x \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{P_z + \rho f_z}{\Theta(t)} \right] = \frac{\rho h}{D\Theta(t)} \frac{\partial^2 \Theta(t)}{\partial t^2} \quad (14)$$

将电流条件 $(0, J_y, 0)$ 、磁场条件 $(0, 0, B_z)$ 代入式(10), 得

$$\begin{cases} \rho f_x = J_y h B_z \\ \rho f_y = 0 \\ \rho f_z = 0 \end{cases} \quad (15)$$

式中 ρf_x 可视为均布遵从力。设 P_x 、 P_y 、 P_{xy} 分别为矩形板承受的中间压力, 有

$$\begin{cases} N_x = \int_a^x \rho f_x dx + P_x = -\rho f_x (a-x) + P_x \\ N_y = P_y \\ N_{xy} = P_{xy} \end{cases} \quad (16)$$

将式(16)代入式(14), 因无外加横向载荷, 并不考虑体力等的影响, 整理可得

$$\rho h \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} W + \left\{ D \sum_{k=0}^{\infty} (e_0 \xi)^{2k} \nabla^{2k} \nabla^4 W + [\rho f_x (a-x) - P_x] \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - 2P_{xy} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} - P_y \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right\} \Theta(t) = 0 \quad (17)$$

由伽辽金原理, 有

$$\int_0^a \int_0^b \left\{ \rho h \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} W + \left[D \sum_{k=0}^{\infty} (e_0 \xi)^{2k} \nabla^{2k} \nabla^4 W + [\rho f_x (a-x) - P_x] \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - 2P_{xy} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} - P_y \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right] \times \Theta(t) \right\} \delta W dx dy = 0 \quad (18)$$

设屈曲挠度数为

$$W = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (19)$$

可知上式满足所有的边界条件, 式中 m 、 n 分别为 x 、 y 方向板屈曲波形的半波数。

将其代入式(18)并对有关项求偏导再积分, 整理得

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}^2 \left\{ \rho h \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} + \left[D \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (e_0 \xi)^{2k} \pi^{2k} \times \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^k \pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 - \left(\frac{1}{2} \rho f_x a - P_x \right) \times \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + P_y \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right] \Theta(t) \right\} = 0 \quad (20)$$

因 A_{mn} 不能全为零, 故只有

$$\rho h \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} + \left[D \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (e_0 \xi)^{2k} \pi^{2k} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^k \times \pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 - \left(\frac{1}{2} \rho f_x a - P_x \right) \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + P_y \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right] \times \Theta(t) = 0 \quad (21)$$

将式(15)、 $J_y = J \cos(\omega t)$ 、 $B_z = B \cos(\omega t)$ 代入上述方程(ω 为变化频率), 并且令 $\Theta(t) = T$, $r = \omega t$, 则上式可整理为马丢方程标准形式, 即

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + (\lambda - \eta \cos 2r) T = 0 \quad (22)$$

式中

$$\begin{cases} \lambda = \frac{\omega_{mn}^2}{\omega^2} + \frac{\pi^2}{\rho h \omega^2} \left[\frac{m^2 P_x}{a^2} + \frac{n^2 P_y}{b^2} - \frac{JBh}{4a} \right] \\ \omega_{mn}^2 = \frac{D\pi^4}{\rho h} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (e_0 \xi)^{2k} \times \pi^{2k} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^k \\ \eta = \frac{\pi^2}{4\rho a \omega^2} JB \end{cases} \quad (23)$$

式中 ω_{mn} 为纳米板的固有圆频率。当非局部小尺度参数 $e_0 \xi = 0$ 时, 纳米板的固有圆频率将退化为宏观薄板的固有圆频率结果。

本文利用马丢方程系数之间的本征值关系来判别失稳临界状态。当方程的系数满足一定关系时, 该式就会有无穷多的解, 这些解分布在参数平面上形成不同的区域, 这就代表纳米板的稳定与不稳定区域。这些区域的分界就是方程系数之间的本征值关系, 代表纳米板的临界稳定值, 其关系为连分式形式, 公式为^[18]

$$\lambda - (2n)^2 - \frac{\eta^2}{\lambda - (2n-2)^2} - \frac{\eta^2}{|\lambda - (2n-4)^2} - \dots - \frac{\eta^2}{|\lambda - 4} - \frac{2\eta^2}{|\lambda} = -\frac{\eta^2}{(2n+2)^2 - \lambda} - \frac{\eta^2}{|(2n+4)^2 - \lambda} - \dots \quad (24)$$

4 算例分析

设纳米板材料参数为: 长宽 $a = b = 300 \text{ nm}$, 板厚 $h = 5 \text{ nm}$, 非局部参数 $e_0 \xi = 1 \text{ nm}$, 弹性模量 $E = 23 \text{ GPa}$, 泊松比 $\mu = 0.3$, 密度 $\rho = 7500 \text{ kg/m}^3$,

电流及磁场的变化频率 $\omega = 100\pi \text{ s}^{-1}$, 令 $m=n=1$, k 的值取到 20。将上述数据代入式(23)~式(24), 并应用 MATLAB 软件计算绘图。由于纳米板的屈曲波形由多个波形叠加而成, 算例给出的是最低阶的失稳模态。

4.1 板厚的影响

将板厚 h 作为变量, 使磁感应强度 B 分别为 0.1T、0.3T、0.5T, 不考虑机械载荷, 得到失稳临界电流密度随磁感应强度及板厚变化关系图(见图 2)。

从图 2 中可以看出, 失稳临界电流密度随板厚的增加而增加。这是因为当磁感应强度、板长一定时, 增加纳米板的厚度引起抗弯刚度的增加, 进而增加了纳米板的稳定性。

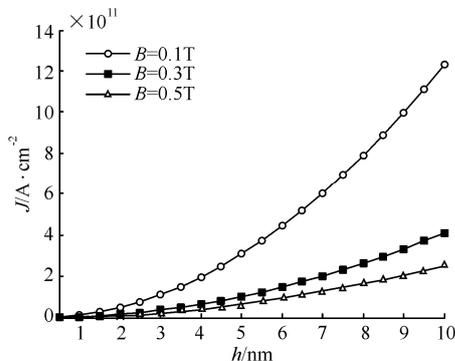


图 2 失稳临界电流密度随磁感应强度及板厚变化关系图
Fig.2 Relationship diagram of critical current density with magnetic induction intensity and plate thickness

同时可以看出, 失稳临界电流密度随着磁感应强度的增加而降低, 并且磁感应强度对电流密度的影响程度与板厚存在一定关系; 当板厚小于 1nm 时, 磁感应强度对失稳临界电流密度的影响程度较小, 当板厚大于 1nm 时, 其影响程度将明显增大, 此时就可以通过调节磁感应强度的大小来有效提高纳米板的稳定性。

4.2 板长的影响

将板长作为变量, 使 B 分别为 0.1T、0.3T、0.5T, 不考虑机械载荷, 得到失稳临界电流密度随磁感应强度及板长变化关系图(见图 3)。从图 3 中可以看出, 失稳临界电流密度随板长度的增加而降低, 同时验证了磁感应强度对失稳临界电流密度的影响规律。同时可知, 随着磁感应强度的减小, 板长对失稳临界电流密度的影响逐渐增大; 当磁感应强度 $B=0.1\text{T}$, 板长小于 450nm 时, 通过改变板长可以大幅度增加纳米板的稳定性; 当板长大于 450nm 时, 曲线趋于平缓, 板长对失稳临界电流密度的影响程

度变小, 此时, 磁感应强度对其影响占主导地位。

令 $B=0.3\text{T}$, 当板厚 h 为 1nm、5nm、9nm 时, 不考虑机械载荷, 得到失稳临界电流密度随板长及板厚变化关系图(见图 4)。从图 4 中可以看出, 当板长小于 450nm 时, 纳米板越厚, 板长对其失稳临界电流密度影响程度越大; 当板长大于 450nm 时, 曲线趋于平缓, 板长对失稳临界电流密度的影响变小, 此时, 板厚对其影响占主导地位; 同时可验证当板厚小于 1nm 时, 板长对失稳临界电流密度的影响程度变得很小。

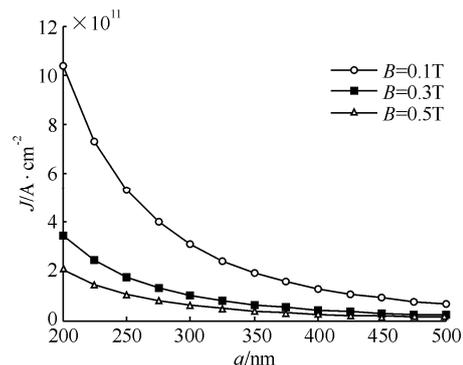


图 3 失稳临界电流密度随磁感应强度及板长变化关系图
Fig.3 Relationship diagram of critical current density with magnetic induction intensity and plate length

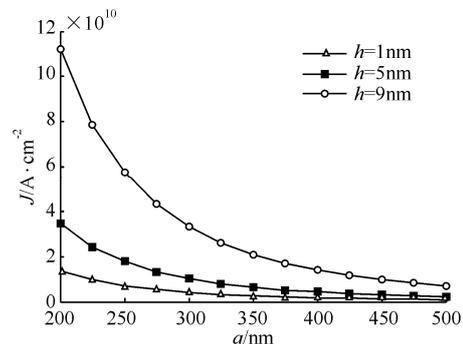


图 4 失稳临界电流密度随板长及板厚变化关系图
Fig.4 Relationship diagram of critical current density with plate length and thickness

4.3 机械载荷的影响

纳米板中面内施加机械载荷 P_x , 并将其作为变量, 当板长、板厚一定时, 令 B 分别为 0.3T、0.5T、0.7T, 可得失稳临界电流密度随机械载荷及磁感应强度变化关系图(见图 5)。从图 5 中可以看出, 当载荷增加, 失稳临界电流密度有所增加。这是因为纳米板中通入的电流为交变电流, 所以产生的洛伦兹力就是一种随着时间不断改变方向的力, 当没有外加载荷作用, 即 $P_x=0$ 时, 洛伦兹力的存在会使纳米板失稳, 但是此时的临界失稳电流密度较低; 当纳米板承受外加机械载荷后, 由于洛伦兹力不断变换方向就会与外加载荷相互抵消一部分, 在磁感应强

度一定的情况下, 当纳米板发生失稳时, 就需要通入幅值较大的电流密度。这表明改变载荷大小与改变通入电流强度及磁场大小一样, 都是通过改变洛伦兹力, 从而改变纳米板的稳定性。

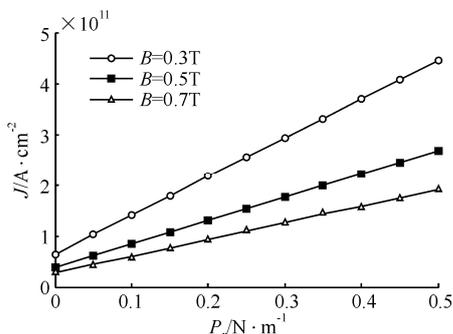


图5 失稳临界电流密度随机械载荷及磁感应强度变化关系图
Fig.5 Relationship diagram of critical current density with mechanical load and magnetic induction intensity

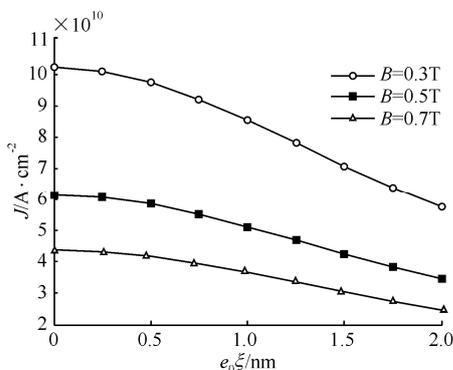


图6 失稳临界电流密度随小尺度参数及磁感应强度变化关系图
Fig.6 Relationship diagram of critical current density with small scale parameter and magnetic induction intensity

4.4 小尺度参数的影响

以上分析了板的几何尺寸以及外加机械载荷对纳米板失稳临界电流密度的影响。进一步地, 当板长、板厚一定时, 将纳米板非局部小尺度参数作为变量, 可得不同磁感应强度条件下, 失稳临界电流密度随小尺度参数的变化关系图(见图6)。由图6可见, 失稳临界电流密度随着小尺度参数的增加而下降。说明在对微纳米构件进行分析时, 必须考虑尺寸效应对其带来的影响, 这样才能准确地预测构件的力学行为。

当磁感应强度、板厚一定时, 令纳米板板长 a 分别为 100nm、300nm、500nm, 可得失稳临界电流密度随小尺度参数及板长度变化关系图(见图7)。从图7中可以看出, 随着板长的减小, 小尺度参数对纳米板的稳定性的影响明显增大, 这说明结构尺度越小, 小尺度参数 $e_0\xi$ 的影响越显著, 同时也说明在分析微纳米结构时, 尺寸效应的影响不能忽略。

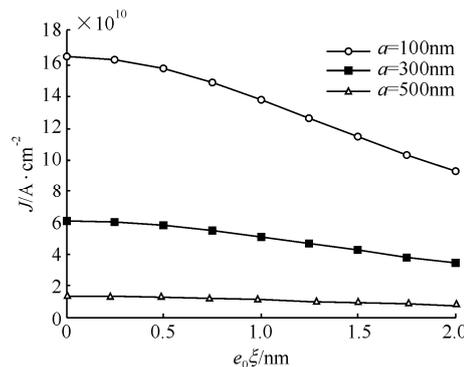


图7 失稳临界电流密度随小尺度参数及板长度变化关系图
Fig.7 Relationship diagram of critical current density with small scale parameter and plate length

5 结 论

- 1) 基于非局部弹性理论, 给出了考虑尺寸效应的纳米板在电磁场及机械载荷共同作用下的磁弹性动力稳定方程, 并利用伽辽金积分原理将其整理为马丢方程的标准形式。
- 2) 利用马丢方程系数的本征值关系, 分析了失稳临界电流密度与磁感应强度、板长、板厚、机械载荷及小尺度参数之间的关系。数值模拟结果表明: 纳米板的失稳临界电流密度随着磁感应强度、板长以及小尺度参数的增加而降低; 随着板厚、机械载荷的增加而提高。另外, 磁感应强度的变化对失稳临界电流密度的影响较大, 主要体现在洛伦兹力对纳米板稳定性的影响上, 因此改变磁感应强度和电流的大小可以有效地提高纳米板的稳定性。
- 3) 从板长与板厚对失稳临界电流密度的影响结果来看, 当小尺度参数 $e_0\xi$ 取 1nm 时, 纳米板板长在 200nm~450nm、板厚在 1nm~10nm 的区间内, 纳米板的稳定性随着磁感应强度、板长及板厚的变化而急剧变化。在这个灵敏区间内改变磁感应强度、板长及板厚的大小, 可以有效地提高纳米板的稳定性。
- 4) 微纳米结构尺寸效应的影响不可忽略, 并且其影响程度随着板的几何尺寸的增加而逐渐减小。

本文研究结果对实际工程中纳米板电磁结构元件的稳定性设计有一定的参考价值。

参 考 文 献 (References)

[1] 韩光平. 微电子机械系统力学性能及尺寸效应研究[D]. 西安: 西安理工大学, 2006. (HAN Guangping. Research on mechanical properties and size effects in MEMS[D]. Xi'an: Xi'an University of Technology, 2006(in Chinese)).

- [2] 康新, 席占稳. 基于 Cosserat 理论的微梁振动特性的尺度效应[J]. 机械强度, 2007, 29(1): 1-4. (KANG Xin, XI Zhanwen. Size effect on the dynamic characteristic of a micro beam based on Cosserat theory[J]. Journal of mechanical strength, 2007, 29(1): 1-4(in Chinese)).
- [3] 王炳雷. 微结构尺寸效应研究及其应用[D]. 济南: 山东大学, 2011. (WANG Binglei. The study and application on size effect of micro-structures[D]. Jinan: Shandong University, 2011(in Chinese)).
- [4] LI C, CHEN L, SHEN J P. Vibrational responses of micro/nanoscale beams: size-dependent nonlocal model analysis and comparisons[J]. Journal of mechanics, 2015, 31(1): 7-19.
- [5] 李明, 周攀峰, 郑慧明. 磁敏固支载流单壁碳纳米管在轴向磁场中的振动特性[J]. 应用力学学报, 2017, 34(4): 634-640. (LI Ming, ZHOU Panfeng, ZHENG Huiming. Vibration characteristics of magnetically sensitive clamped-clamped carbon nanotubes conveying fluid subjected to a longitudinal magnetic field[J]. Chinese journal of applied mechanics, 2017, 34(4): 634-640(in Chinese)).
- [6] SHAHROKH H H, ARASH T S. Buckling analysis of micro/nanoscale plates via nonlocal elasticity theory[J]. Physica E: low-dimensional systems and nanostructures, 2011, 43(7): 1400-1404.
- [7] 刘辰. 非局部压电纳米板的振动和稳定性研究[D]. 北京: 北京交通大学, 2016. (LIU Chen. Research on vibration and stability of nonlocal piezoelectric nanoplates[D]. Beijing: Beijing Jiaotong University, 2016(in Chinese)).
- [8] WOLFE P. Bifurcation theory of an elastic conducting wire subjected to magnetic forces[J]. Journal of elasticity, 1990, 23(2/3): 201-217.
- [9] GAO Yuanwen, HOON H. Numerical analysis on magnetic-elastoplastic buckling and bending of ferromagnetic rectangular plate[J]. International journal of modern physics B, 2008, 22(31/32): 6212-6217.
- [10] VAN LIESHOUT P H, RONGEN P M J, VAN DE VEN A A F. A variational principle for magneto-elastic buckling[J]. Journal of engineering mathematics, 1987, 21(3): 227-252.
- [11] SHAHIN F, AMIN H, MOHAMMAD H, et al. Spatial buckling analysis of current-carrying nanowires in the presence of a longitudinal magnetic field accounting for both surface and nonlocal effects[J]. Physica E: low-dimensional systems and nanostructures, 2018, 97: 191-205.
- [12] VAN DE VEN A A F. Magnetoelastic buckling of thin plates in a uniform transverse magnetic field[J]. Journal of elasticity, 1978, 8(3): 297-312.
- [13] YANG Wentao, PAN Hao, ZHENG Dali, et al. Buckling of a ferromagnetic thin plate in a transverse static magnetic field[J]. Chinese science bulletin, 1998, 43(19): 1666-1670.
- [14] 白象忠, 田振国. 板壳磁弹性力学基础[M]. 北京: 科学出版社, 2006. (BAI Xiangzhong, TIAN Zhenguo. Magneto-elastic foundation of plate and shell[M]. Beijing: Science Press, 2006(in Chinese)).
- [15] ERINGEN A C, EDELEN D G B. On nonlocal elasticity[J]. International journal of engineering science, 1972, 10(3): 233-248.
- [16] ERINGEN A C. On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves[J]. Journal of applied physics, 1983, 54(9): 4703-4710.
- [17] 陈玲, 刘金建, 李成, 等. 基于非局部弹性理论的纳米板横向振动[J]. 力学季刊, 2016, 37(3): 485-492. (CHEN Ling, LIU Jinjian, LI Cheng, et al. Transverse vibration of nanoplates based on nonlocal elasticity theory[J]. Chinese quarterly of mechanics, 2016, 37(3): 485-492(in Chinese)).
- [18] 王知人, 王平, 白象忠. 载流薄板磁弹性动力失稳临界状态的判别[J]. 工程数学学报, 2006, 23(1): 133-138. (WANG Zhiren, WANG Ping, BAI Xiangzhong. The magnetic-elasticity stability criterion of a thin current carrying plate[J]. Chinese journal of engineering mathematics, 2006, 23(1): 133-138(in Chinese)).

Relationship between uplift capacity and installation torque of screw anchor in sand

He Zequn Zhang Xinchun Zhu Ang

(Department of Mechanical Engineering, North China Electric Power University, 071003, Baoding, China)

Abstract: Based on the individual bearing model of screw anchor and according to the relationship between the uplift capacity and the resisting torque during the installation, a kind of installation torque model is proposed in this paper. Then the influences of structure parameters for screw anchor and soil parameters on installation torque are investigated by utilizing this theoretical model. Research results show that when the embedment depth of screw anchor reaches or exceeds the critical depth, the increase of installation torque will be weakened. The diameter ratio (D/d) of screw anchor, the size of anchor shaft and the compactness of the sand have a significant effects on the installation torque. If the size of anchor plate is larger or the sand is denser, the change of installation torque becomes relatively obvious. And the proportion of resistance torque caused by the anchor plate to the total resistance torque will increase. Anchor plate resistance torque is between 66% and 88%. The installation torque is also sensitive to the number of anchor plates. The increment of installation torque is gradually weakened when the number of anchor plates is greater than 3. The inclination angle of anchor plate has linear effect on the installation torque.

Keywords: *transmission line engineering, screw anchor, uplift capacity, installation torque, sand.*

Analysis of magneto-elastic stability of current-carrying nanoplates with four edges simply supported

Wang Ping^{1,2,3} Yao Jie^{1,2} Wang Dongxian^{1,2}

(1 College of Sciences, Yanshan University, 066004, Qinhuangdao, China;

2 Key Laboratory of Mechanical Reliability for Heavy Equipments and Large Structures of Hebei Province, 066004, Qinhuangdao, China;

3 The State Key Laboratory of Nonlinear Continuum Mechanics (LNM), 100080, Beijing, China)

Abstract: Under electromagnetic and mechanical loads, the magneto-elastic stability of a current-carrying nano-plate with four sides simply supported is studied. Firstly, combining the nonlocal theory and the magneto-elastic theory of plates and shells, the magneto-elastic dynamic equations of nanoscale plate which considered the scale effects are derived, and the magneto-elastic dynamic stability equation of the current-carrying nano-plate under electromagnetic and mechanical loads are obtained. Then applying Galerkin's principle, the stability equation is expressed as the standard form of special function Mathieu equation. According to the eigenvalues relation of the coefficients in Mathieu equation, the minimum critical instable state of magneto-elastic stability problem is determined. Finally, the relationship between critical current density and related parameters of nano-plate is obtained through numerical simulation. The results show that the stability of nanoplates is affected by magnetic induction intensity, plate length and thickness, applied mechanical loads and small scale parameters. When the small scale parameter is 1nm, the stability of the nanoplate varies sharply with the change of magnetic induction intensity, plate length in the range of 200nm~450nm and plate thickness in the range of 1nm~10nm. Changing the magnetic induction intensity, plate length and plate thickness in this sensitive range can effectively improve the stability of nanoplates.

Keywords: *nano-plate, scale effect, magneto-elasticity, stability, Mathieu equation.*