

连续时间传递函数的赋值化指数积分变换逼近辨识

张 珩¹, 肖歆昕^{1,2†}

(1. 中国科学院 力学研究所, 北京 100190; 2. 中国科学院大学 工程科学院, 北京 100149)

摘要: 通过将常规的复域Laplace变换直接简化为实域上的指数积分变换, 提出了连续时间传递函数辨识的赋值化指数积分变换逼近(AVE)方法. 其主要特征是以采样序列为基础先行沿时间轴构造不同赋值下系统变量的指数积分变换(EIT)逼近, 继而沿指数变量方向实现模型参数估计的二维化在线递推计算. 文中分析了有限EIT逼近的渐近收敛性和时间连续化逼近的代数精度, 以及具有一定噪声抑制能力的指数因子赋值条件. 在一致激励和有界响应前提下, 通过相对复杂而苛刻的仿真算例, 充分验证了AVE方法对各种典型工况的有效性, 清晰表明了它对于最小相位及非最小相位系统, 开环或闭环的系统运行方式, 乃至刚性参数情形, 所具有的宽泛适应性.

关键词: 传递函数; 系统辨识; 参数估计; 指数积分变换; 连续时间; 逼近

引用格式: 张珩, 肖歆昕. 连续时间传递函数的赋值化指数积分变换逼近辨识. 控制理论与应用, 2020, 37(10): 2189–2197

DOI: 10.7641/CTA.2020.91004

Continuous-time transfer function identification based on approximations of value-assigned exponential integral transformation

ZHANG Heng¹, XIAO Xin-xin^{1,2†}

(1. Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China;

2. School of Engineering Science, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100149, China)

Abstract: In this paper a parameter identification method of continuous-time transfer function is proposed by means of the approximations of value-assigned exponential-integral-transformation (AVE) in real-domain simplified from common complex-domain Laplace transformation. The main feature is the online and recursive way in two-dimension space, that is, the exponential integral transformation (EIT) of system variables with different assignments is approximated along the time line only by using sampling data, and then the model parameters are estimated along exponential variable axis. In addition, the asymptotical convergence and its algebraic accuracy of EIT approximation in finite time are analyzed, as well as the condition to choose exponential variable values with a certain extent suppression to sampling noise is discussed. Under bounded response with consistent excitation, the effectiveness of AVE method for various typical operating conditions is sufficiently simulated and verified by a relatively complex and harsh example, which clearly shows the wide adaptability to minimum phase or non-minimum phase system, open-loop or closed-loop running, or even stiff cases.

Key words: transfer function; system identification; parameter estimation; exponential integral transformation; continuous-time; approximation

Citation: ZHANG Heng, XIAO Xinxin. Continuous-time transfer function identification based on approximations of value-assigned exponential integral transformation. *Control Theory & Applications*, 2020, 37(10): 2189–2197

1 引言

连续时间传递函数(continuous time transfer function, CTF)是线性连续定常系统输入输出关系的一种表征形式, 可定义为零初值条件下系统输入变量与输出变量各自时间函数的Laplace变换之比. 因其物理意义明确、建模简捷、表达清晰和易于分析设计等独特优点, 在电气传动^[1]、过程控制、动力工程^[2]、空天飞行等系统控制领域中得到了十分广泛的运用. 长期

以来, 国内外学者在关于CTF辨识方面开展了大量研究^[3–6]. 除早期的瞬态分析、相关性理论等非参数化方法^[7–9]之外, 针对CTF或等价状态空间模型参数的辨识大都通过时域或频域进行. 时域方面主要有为避免变量求导而通过增维滤波变换的状态变量滤波(state variable filtering, SVF)方法^[4, 10–12]、以时间卷积信息向量和正交分解为基础的子空间方法^[13–15], 以及衍生的 δ -算子模型^[16]、随机分布^[17]、滤波子空间运

收稿日期: 2019–12–13; 录用日期: 2020–05–28.

†通信作者. E-mail: xiaoxinxin@imech.ac.cn; Tel.: +86 10-82543786.
本文责任编辑: 黄攀峰.

算^[18-19]、矩配方法^[20]和利用Laguerre滤波的 w 算子变换方法^[21-22]等. 辨识性能改进的结果可参见广义Poisson矩寻优策略^[23]、一致性子空间方法^[24]、辅助变量方法^[25-27], 以及改进估计^[28]等. 此外, 在系统初值影响分析^[9,29]、变周期采样^[30-32]、离散模型连续化反演及影响研究^[33-34]、时间积分变量的离散化逼近^[35-36]、不同保持器结构下SVF的状态空间变换^[28,37]等方面, 也有相应的进展. 频域方法的主要结果可参见文献[38], 如利用多频激励与最小二乘相结合的传统型实验辨识方法^[39-40], 借助于闭环继电控制自激产生振荡, 并以SVF规避导数变量和对零阶保持器下时间响应频域积分加以近似化的频域传递函数输出误差方法^[41], 纯实极点情形的脉冲激励辨识^[42], 向量适配策略的频域辨识改进^[43], 以及采样控制情形下连续系统各类频域近似化的比较研究^[44]与滤波采样的参数估偏分析^[45]等.

尽管这些进展令人瞩目, 但相对于离散系统的辨识成果而言, CTF模型的参数估计仍有若干难题亟待解决. 首先, 子空间等时域方法为代表的结果因信息变量需通过全时程的连续化卷积所产生, 既复杂又不易像离散模型那样在线辨识. 其次, 在Fourier意义下的频域辨识中, 利用时间采样值的有限离散变换难以达到幅值与相位同时收敛的目的, 且离散化频域变换也仅能借助于单步中值化平均近似积分^[41,44]进行, 无疑会失去更加丰富的高频信息而产生误差. 即使对相对成熟的SVF方法来说, 滤波动力学变量在采样情形下也需通过类似的离散化近似积分方可实现. 鉴于频域收敛性的不足, 有学者提出了通过含有“阻尼因子”的频域变换加以缓解的对策^[38,46], 颇具启发意义. 第三, 简单的通过离散模型辨识再进行连续化变换的朴素想法并不易运用, 会因采样周期过小造成反演病态^[3,47], 而过大又会因信息丰富性的缺失而导致离散估计本身就偏离真值.

结合上述分析, 本文试图单纯运用多个“阻尼因子”综合解决离散变换的渐近性、参数估计可解性乃至计算复杂性问题. 通过将复域Laplace变换直接化简为实域指数积分变换, 以采样序列为基础先行沿时间轴构造不同赋值下系统变量的指数积分变换(exponential integral transformation, EIT)逼近, 并沿指数因子变量方向实现模型参数估计的二维化在线递推计算, 建立连续时间传递函数参数的赋值化指数积分变换逼近(approximations of value-assigned exponential-integral-transformation, AVE)辨识方法. 整个辨识过程无需时域卷积或频域复数运算.

本文中给出了相对复杂苛刻的仿真算例, 结果清晰地显现了它对开环或闭环系统, 最小相位或非最小相位, 乃至刚性对象等良好的估计精度与宽泛的适应性.

2 实域上的指数积分变换

传递函数在线性、连续时间和定常意义下由以Laplace因子 s 为自变量的两个无约束系数多项式构成, 即

$$G(s) = \frac{y^*(s)}{u^*(s)} = \frac{\int_0^{\infty} y(t)e^{-st} dt}{\int_0^{\infty} u(t)e^{-st} dt} = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} b_i s^i}{\sum_{i=0}^n a_i s^i}, \quad (1)$$

式中: $a_0 = 1$; $a_{i+1}, b_i (i = 0, 1, \dots, n-1)$ 为待辨识参数; $u(t)$ 是以 T_s 为采样周期的含零阶保持器控制函数, 并满足一致性有界激励原则; $y(t)$ 为时域有界的系统响应. 变量“#”的Laplace变换用“#*(s)”表示, 且其在时刻 $t = kT_s$ 的采样值及其有限时间Laplace变换分别用“# $_k$ ”和“#*_ k (s)”表示.

式(1)中Laplace算子 s 的实部和虚部分别为实域的指数因子 σ 与复频率 $j\omega$. 显然在 $u(t), y(t)$ 有界情形下, 应满足 $\sigma > 0$. 但实际上一般都是令 $\sigma = 0$ 而直接关注系统的频域特性 $G(j\omega)$ (即蜕化为Fourier变换情形). 这在常规的分析 and 整定中并不相悖, 但若要进行未知参数辨识, 就不得不利用输入与响应的离散化采样序列计算相应的Fourier变换. 然而即便对 $u_k = \mathbf{1}(kT_s)$ 的简单情形来说, 因

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_k^*(j\omega) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(1 - e^{-jk+1\omega T_s})}{j\omega} \neq \frac{1}{j\omega},$$

其有限时间频域逼近也无法收敛. 为避免之, 应将 s 变量严格限定在 $\sigma > 0$ 的 \mathbb{C}^+ 中, 以保证 $u_k^*(\sigma + j\omega)$ 渐趋于 $\frac{1}{\sigma + j\omega}$. 这正是“阻尼因子”的作用所在^[38,46]. 受此启发, 不妨直接将 s 的定义域完全蜕化至正实域中, 从而将Laplace变换化简为由实变量 $s = \sigma$ 决定的指数积分变换(EIT):

$$\begin{cases} u^*(\sigma) = \int_0^{\infty} u(t)e^{-\sigma t} dt, \\ y^*(\sigma) = \int_0^{\infty} y(t)e^{-\sigma t} dt, \end{cases} \quad (2a)$$

其中 $\forall \sigma \in (0, \infty)$. 由此既保证了变换计算的渐近收敛性, 又省略了繁琐的复数运算, 并使得式(1)定义的复数域传递函数 $G(s)$ 自然蜕化为实域内连续时间传递函数(continuous time transfer function in real-domain, CTTFR)形式:

$$G(\sigma) = \frac{y^*(\sigma)}{u^*(\sigma)} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} b_i \sigma^i}{\sum_{i=0}^n a_i \sigma^i}, \quad \forall \sigma \in (0, \infty). \quad (2b)$$

经此简化, $G(\sigma)$ 已成为由 $a_{i+1}, b_i, i = 0, 1, \dots, n-1$ 和单一变量 σ 确定的简单实函数, 虽已无频域特

征显现, 但模型参数却仍完整蕴含其中. 鉴此, 若能利用序列 $\{u_k, y_k, k = 0, 1, 2, \dots\}$ 构造出 σ 在不同赋值下 $\{u^*(\sigma), y^*(\sigma)\}$ 的有效逼近, 即可将复数域内传递函数的辨识问题, 精简地转化为寻求对式(2b)中各参数的实域估计.

3 两类逼近

由定义式(2a)知, 有界时间函数必存在对应的EIT函数. 但因仅有输入与响应的采样值已知, 故需将该式广义积分转化为以时间序列为基础的有限EIT逼近形式, 且响应函数有限EIT逼近中的连续时间积分项也需以离散化形式计算.

3.1 时间函数的有限EIT逼近及其收敛性

令 $\mu_i(x) = \int_0^1 \lambda^i e^{-\lambda x} d\lambda, x > 0, i = 0, 1, 2, \dots$, 由采样序列确定 $\{u(t), y(t)\}$ 的有限EIT逼近如下:

$$\begin{cases} u_k^*(\sigma) = T_s \mu_0(\sigma T_s) \sum_{i=0}^k e^{-i\sigma T_s} u_i, \\ y_k^*(\sigma) = T_s \sum_{i=0}^k e^{-i\sigma T_s} \int_0^1 y_{i+\lambda} e^{-\lambda\sigma T_s} d\lambda, \\ \sigma_K^* = \{\sigma > 0 | 0 < |u_k^*(\sigma) y_k^*(\sigma)| < \infty, k > K\}, \\ \sigma \in \sigma_K^*, \end{cases} \quad (3)$$

式中: $y_{k+\lambda} = y(k + \lambda T_s), 0 \leq \lambda < 1$.

将式(3)与式(2a)比较, 可得到

$$\begin{aligned} |u_k^*(\sigma) - u^*(\sigma)| &< \frac{e^{-k\sigma T_s} \max |u(t)|}{\sigma}, \\ |y_k^*(\sigma) - y^*(\sigma)| &< \frac{e^{-k\sigma T_s} \max |y(t)|}{\sigma}, \end{aligned}$$

则由 $y^*(\sigma) = G(\sigma)u^*(\sigma)$ 推知式(3)的有限EIT逼近以指数级渐近收敛, 即

$$\begin{aligned} \left| \frac{y_k^*(\sigma)}{u_k^*(\sigma)} - G(\sigma) \right| &< \\ \frac{e^{-k\sigma T_s}}{\sigma |u_k^*(\sigma)|} \{ &|G(\sigma)| \max_{t \in \mathbb{R}^+} |u(t)| + \max_{t \in \mathbb{R}^+} |y(t)| \}, \end{aligned}$$

其中 $\forall k > K$.

3.2 $y_k^*(\sigma)$ 的采样逼近

为规避式(3)中需有响应函数在采样间隔内时域积分的困难, 可根据采样样本的逐步积累性, 采用少量有限个随采样时刻递增而不断更新的采样数据, 通过构造分段多项式函数形式加以拟合, 用以改善时间连续化的逼近精度.

假设响应的采样含有方差为 σ_w^2 的零均值独立高斯白噪声测量误差 w_k , 采样值为 $\hat{y}_k = y_k + w_k, k = 0, 1, 2, \dots$. 选择自 \hat{y}_{k-q+1} 起的连续 $p (> q \geq 1)$ 个采样值构造式(3)中响应函数 $y_{k+\lambda}$ 的多项式逼近 $\hat{y}_{p,q,k+\lambda}$, 即

$$\hat{y}_{p,q,k+\lambda} = \lambda_p^T S_{p,q}^{-1} \hat{Y}_{p,q,k}, \quad (4a)$$

$$\hat{Y}_{p,q,k} = [\hat{y}_{k-q+1} \ \dots \ \hat{y}_k \ \hat{y}_{k+1} \ \dots \ \hat{y}_{k-q+p}]^T, \quad (4b)$$

$$\lambda_p = [1 \ \lambda \ \lambda^2 \ \dots \ \lambda^{p-1}]^T, \quad (4c)$$

$$W_{p,q,k} = [w_{k-q+1} \ \dots \ w_k \ w_{k+1} \ \dots \ w_{k-q+p}]^T, \quad (4d)$$

式中: $S_{p,q}$ 为 $p \times p$ 矩阵, 除第 $(q, 1)$ 元素为 1 外, 其余第 (i, j) 元素均等于 $(i - q)^{j-1}$. 此外, 构造零时刻前后具有奇函数性质的延拓 $\hat{y}_{-k} = -\hat{y}_k, k = 1, 2, \dots, q - 1$, 用以增加初期逼近的平滑性.

定义 $\mu_p^T(x) = [\mu_0(x) \ \mu_1(x) \ \dots \ \mu_{p-1}(x)]^T S_{p,q}^{-1}$, 再以式(4) $\hat{y}_{p,q,k+\lambda}$ 替代式(3)中的 $y_{k+\lambda}$, 得到 $y_k^*(\sigma)$ 的离散逼近 $\hat{y}_{p,q,k}^*(\sigma) = T_s \sum_{i=0}^k e^{-i\sigma T_s} \mu_p^T(\sigma T_s) \hat{Y}_{p,q,i}$. 整理之和式(3), 进而导出输入与响应变量沿 k 向递推的有限EIT逼近模型:

$$\begin{cases} u_k^*(\sigma) = u_{k-1}^*(\sigma) + \rho_k(\sigma T_s) \mu_0(\sigma T_s) u_k, \\ \hat{y}_{p,q,k}^*(\sigma) = \hat{y}_{p,q,k-1}^*(\sigma) + \rho_k(\sigma T_s) \mu_p^T(\sigma T_s) \hat{Y}_{p,q,k}, \\ \rho_k(\sigma T_s) = e^{-\sigma T_s} \rho_{k-1}(\sigma T_s), \\ \hat{y}_{p,q,-1}^*(\sigma) = 0, u_{-1}^*(\sigma) = 0, \rho_0(\sigma T_s) = T_s. \end{cases} \quad (5)$$

一般情形下, EIT逼近误差主要由两类因素叠加构成. 一类是时间连续化逼近过程中所固有的算法误差, 取决于具体的 σ 值、逼近参数 (p, q) 、被逼近函数形式、采样密度和逼近时长等要素, 也取决于能否通过正交性方式加以改善等. 由于式(4)为等距Lagrange多项式逼近, 因此它在每个采样周期内都至少具有 $p - 1$ 阶的代数精度. 另一类误差就是采样过程中的测量噪声对 $\hat{y}_{p,q,k}^*(\sigma)$ 的影响. 它所导致的随机误差方差为

$$\text{Cov}\{\hat{y}_{p,q,k}^*(\sigma)\} = T_s^2 \mu_p^T(\sigma T_s) \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^k e^{-(i+j)\sigma T_s} \times E\{W_{p,q,i} W_{p,q,j}^T\} \mu_p(\sigma T_s),$$

展开其中的 $E\{W_{p,q,i} W_{p,q,j}^T\}$ 项, 即知

$$\begin{cases} \text{Cov}\{\hat{y}_{p,q,k}^*(\sigma)\} = [\sigma_w T_s Q_{p,q,k}(\sigma T_s)]^2, \\ Q_{p,q,k}^2(\sigma T_s) = \\ \mu_p^T(\sigma T_s) \left[\frac{1 - e^{-2(k-q+2)\sigma T_s}}{1 - e^{-2\sigma T_s}} \Omega_{p,q,q-1} + \right. \\ \left. \sum_{i=0}^{q-2} e^{-2i\sigma T_s} (\Omega_{p,q,i} - \Omega_{p,q,q-1}) \right] \mu_p(\sigma T_s), \end{cases} \quad (6)$$

式中:

$$\begin{aligned} \Omega_{p,q,i}(m, m - j) &= \Omega_{p,q,i}(m - j, m) = \\ &1(i - q + m) e^{-j\sigma T_s}, \end{aligned}$$

其中: $j = 0, 1, \dots, p - 1; m = j + 1, \dots, p$. 上式表明, 噪声对于 $\hat{y}_{p,q,k}^*(\sigma)$ 的影响与逼近参数 (p, q) 、指数因子 σ 和 T_s 等关系虽密切而复杂, 但也有一些规律可循.

由 $\Omega_{p,q,q-1}$ 的正定性知

$Q_{p,q,k}(x) < Q_{p,q,k+1}(x) < \dots < Q_{p,q,\infty}(x)$,
 有 $\text{Cov}\{\hat{y}_{p,q,k}^*(\sigma)\} < [\sigma_w T_s Q_{p,q,\infty}(\sigma T_s)]^2$. 另一方面,
 在 $x = 0$ 或 ∞ 附近还有 $Q_{p,q,\infty}(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}} + O(\sqrt{x})$
 及 $Q_{p,q,\infty}(x) = \frac{1}{x}$ 等渐近性, 从而当 T_s 充分小时有

$$T_s Q_{p,q,\infty}(\sigma T_s) \approx \sqrt{\frac{T_s}{2\sigma}},$$

意味着 σ 的恰当选择, 能够在一定程度上抑制噪声对
 响应函数EIT逼近值的影响.

进一步假设 $\hat{y}_{p,q,\infty}^*(\sigma)$ 的噪声方差衰减系数为 η^2 ,
 并设

$$\sigma_{p,q}(T_s, \eta) = \{\sigma > 0 | T_s Q_{p,q,\infty}(\sigma T_s) = \eta\}. \quad (7)$$

又知有 $\text{Cov}\{\hat{y}_{p,q,k}^*(\sigma)\} \leq (\eta\sigma_w)^2, \sigma \geq \sigma_{p,q}(T_s, \eta)$. 因此式(7)就是 σ 的选取下界值. 图1给出了 $\eta = 0.4, 0.7$
 和 1.0 s 这三种衰减系数下的 $\sigma_{p,q}(T_s, \eta)$ 曲线族, 并标注
 了最前者中变化率相对显著的曲线所对应的 (p, q) 值,
 其余的曲线族亦相似排列. 总体上 σ 的下界与 T_s 均呈
 正趋势变化, 且越小的 η 意味着 σ 选值越大. 所以, 条件
 允许时应尽量选择小采样周期, 以同时达到降低 σ 选
 值和类似于滤波降噪的效果. 但这种滤波并非体现在
 时域波形内, 而是对赋值后EIT逼近时噪声影响的适当
 抑制. 此外, $(p, 1)$ 对应的约束最大, $(p, 2)$ 次之, 其
 余的 (p, q) 差别较小.

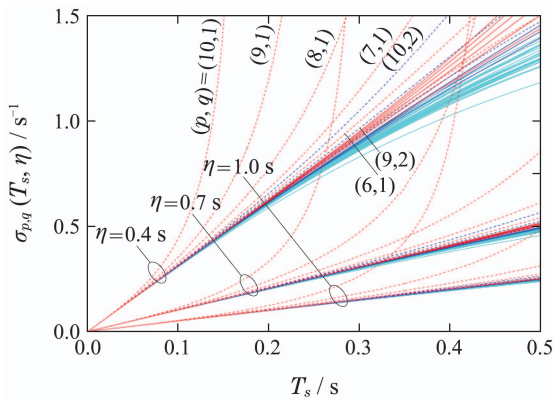


图1 不同 (p, q) 参数下的 $\sigma_{p,q}(T_s, \eta)$ 曲线

Fig. 1 The curves of $\sigma_{p,q}(T_s, \eta)$ with different (p, q)

4 连续时间传递函数的参数估计

令 $s = \sigma$, 整理式(1)得 $A(\sigma)y^*(\sigma) = B(\sigma)u^*(\sigma)$,
 再以式(5)中的 $u_k^*(\sigma), \hat{y}_{p,q,k}^*(\sigma)$ 分别取代 $u^*(\sigma), y^*(\sigma)$,
 即得与指数因子 σ 相关的参数方程

$$\begin{cases} \varphi_{p,q,k}^T(\sigma)\theta = \hat{y}_{p,q,k}^*(\sigma), \\ \theta = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n \ b_0 \ b_1 \ \dots \ b_{n-1})^T, \\ \varphi_k(\sigma) = [-\sigma \hat{y}_{p,q,k}^*(\sigma) \ -\sigma^2 \hat{y}_{p,q,k}^*(\sigma) \ \dots \ -\sigma^n \hat{y}_{p,q,k}^*(\sigma) \ u_k^*(\sigma) \ \sigma u_k^*(\sigma) \ \dots \ \sigma^{n-1} u_k^*(\sigma)]^T. \end{cases} \quad (8)$$

按预设的衰减系数 η 和式(7), 人为选定 r 个两两不
 相同的 σ 赋值 σ_i , 从而沿 k 向递推获得相应的 $u_k^*(\sigma_i)$,
 $\hat{y}_{p,q,k}^*(\sigma_i)$ 和 $\varphi_{p,q,k}(\sigma_i)$ 等信息变量值, $i = 1, 2, \dots, r$.
 又因待辨识参数为 $2n$ 个, 故为保证式(8)的可解性, 需
 满足 $r \geq 2n$. 以此为基础, 继而导出第 k 步时参数向量
 θ 由逼近参数 (p, q) 确定并沿 σ 向实现的直接或递推辨
 识解 $\hat{\theta}_{p,q,r,k}$:

$$\hat{\theta}_{p,q,r,k} = \left\{ \sum_{i=1}^r \varphi_{p,q,k}(\sigma_i) \varphi_{p,q,k}^T(\sigma_i) \right\}^{-1} \times \sum_{i=1}^r \hat{y}_{p,q,k}^*(\sigma_i) \varphi_{p,q,k}(\sigma_i), \quad (9a)$$

$$\begin{cases} \hat{\theta}_{p,q,i,k} = \hat{\theta}_{p,q,i-1,k} + P_{i,k} \varphi_{p,q,k}(\sigma_i) \times \\ \quad \{ \hat{y}_{p,q,k}^*(\sigma_i) - \varphi_{p,q,k}^T(\sigma_i) \hat{\theta}_{p,q,i-1,k} \}, \\ P_{i,k} = P_{i-1,k} - \frac{P_{i-1,k} \varphi_{p,q,k}(\sigma_i) \varphi_{p,q,k}^T(\sigma_i) P_{i-1,k}}{1 + \varphi_{p,q,k}^T(\sigma_i) P_{i-1,k} \varphi_{p,q,k}(\sigma_i)}, \\ \hat{\theta}_{p,q,0,k} = 0, P_{0,k} = \alpha I, \end{cases} \quad (9b)$$

其中: $\alpha > 0$ 充分大; $i = 1, 2, \dots, r; k = p+1, p+2, \dots$

至此建立了基于周期采样和指数因子赋值的信息
 变量与参数向量求解模型. 利用了 $u_k, \hat{Y}_{p,q,k}$ 和 $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r)$, 由式(5)沿 k 向先行构造 $u_k^*(\sigma_i), \hat{y}_{p,q,k}^*(\sigma_i), \varphi_{p,q,k}(\sigma_i)$, 进而依据式(9a)直接求解, 或按式(9b)沿 σ 向经 r 次迭代实现CTTF模型参数的二维化在线递推辨识. 这就是AVE辨识方法的核心. 整个辨识过程无需时域卷积或频域复数运算, 仅借助了指数因子的多重相异赋值与多重迭代, 且这种赋值既保证了逼近的收敛性, 又能在一定程度上兼顾达到类似于噪声滤波的目的. 与常规的线性离散差分模型参数辨识相比, 每步估计仅多出 $r - 1$ 次计算.

5 算例与讨论

考虑 $n = 3$ 的待辨识线性连续时间传递函数模型为

$$G(s) = \frac{1 \pm 0.2s + s^2}{1 + 0.45s + 1.02s^2 + 0.05s^3}.$$

相应的开环极点为 $\{-20, -0.2 \pm j0.9798\}$, 零点根据最小相位与否为 $\mp 0.1 \pm j0.9950$. 选择单位阶跃型激励 $r_k = 1, k \geq 0$. 开环控制律为 $u_k = r_k$; 为考察闭环情形下 u_k 的阶梯变化对参数辨识过程的影响, 设定微分项含一阶滤波的PID反馈控制律如下:

$$u_k = 0.12 \left[e_k + \frac{T_s}{0.28} \sum_{i=0}^k e_i + \frac{0.38}{T_s + 0.5} \times \sum_{i=0}^k \frac{e_i - e_{i-1}}{(1 + 2T_s)^{k-i}} \right],$$

$$e_k = r_k - \hat{y}_k.$$

与常规的算例相比, 该模型有4个主要特点: 1) 显

著的刚性特征. 模型参数的刚性比达100之大, 对参数辨识来说是个不小的挑战; 2) 无论模型为最小相位或非最小相位属性, 或是开环或闭环运行方式, 其阶跃响应函数在零时刻附近都有很大跃升(如图2所示), 这是非常不利于以周期采样序列实现高精度时间连续化逼近的一种形式; 3) 尽管系统时间响应连续, 但因模型的极零点数仅相差1, 使得闭环时响应函数由于 u_k 的阶梯变化而同步呈现阶梯性改变(见图2内初始段放大图), 将导致因光滑性的降低而无益于有效逼近; 4) 模型中预置了非最小相位零点, 用以比较该情形下的辨识效果.

5.1 $G(\sigma)$ 估计与分析

$$\text{令 } \delta G_{p,q,k}(\sigma) = \frac{1}{G(\sigma)} \frac{\hat{y}_{p,q,k}^*(\sigma)}{u_k^*(\sigma)} - 1, \text{ 为CTTFR函}$$

数的相对估计误差, 考察无噪声时式(5)的算法精度. 针对最小相位情形, 不同采样周期($T_s = 0.1, 0.05, 0.025 \text{ s}$)和逼近参数(p, q)下, 在不同时刻($t = kT_s = 15, 30, 45 \text{ s}$)得到的相对逼近误差如图3所示. 图中每个沿 q 向虚线将沿 σ 向的各误差实线连接构成的虚拟曲面所对应的最大 q 值加1, 即为该组(p, q)曲线的 p 值. 经对比分析, 得到结论如下:

1) 在 $\sigma < 0.4 \text{ s}$ 时, 图中误差分布受步序 k 的影响

较大, 而当 $\sigma > 0.5 \text{ s}$ 之后, k 的作用不再明显, 3个时刻的曲线族趋于重合, 但随 σ 的继续增大, 误差水平也由小逐渐增加. 说明 σ 赋值过小或过大都不利于逼近水平的改善. 本例中 $\sigma = 0.5 \sim 0.7$ 较为适宜.

2) 各种逼近情形中, ($p, 1$)和($p, p - 1$)参数对应的误差最小, ($p, 2$)与($p, p - 2$)次之, 以此类推, 且 p 越大, ($p, 1$)和($p, p - 1$)参数的逼近水平越好. 但随着 p 的持续增加(如 $p \geq 5$), 改善程度也逐渐趋缓.

3) 与开环情形相比, 闭环时的逼近精度因响应函数的阶梯效应会有所降低.

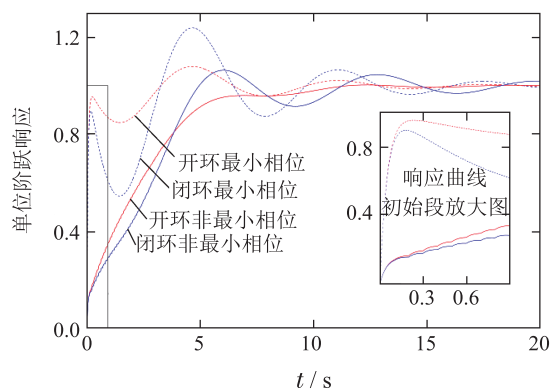
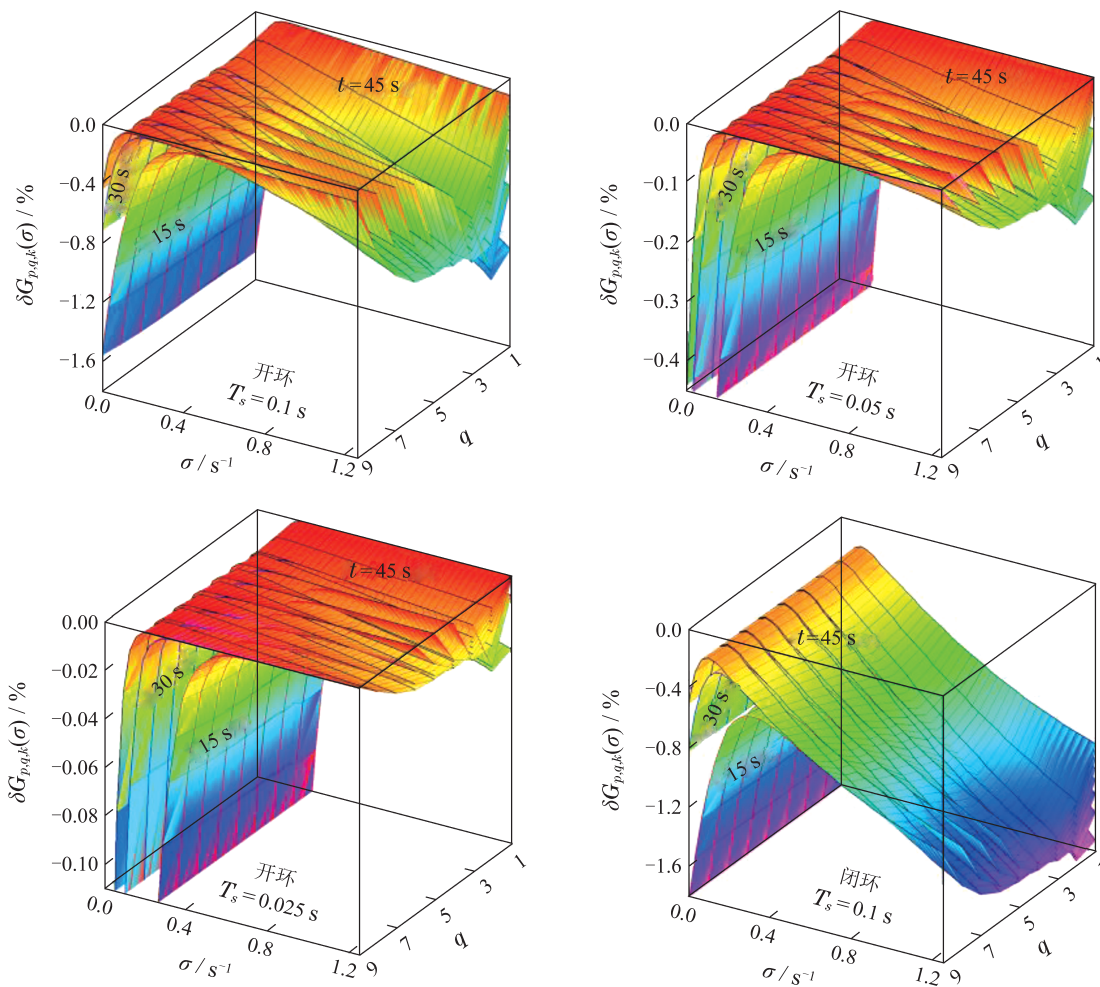


图 2 不同情形下算例模型的单位阶跃响应曲线

Fig. 2 The step responses of the example in different cases



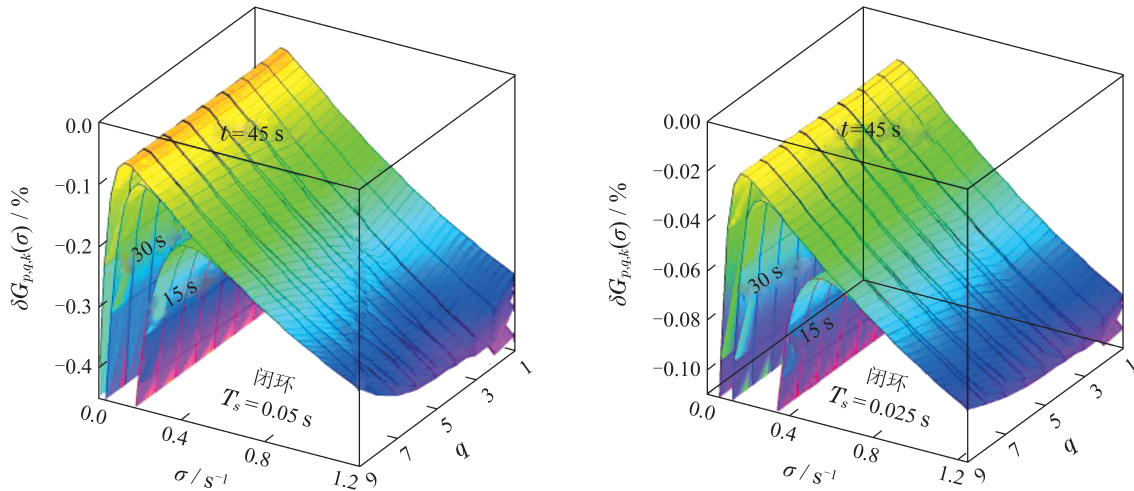


图3 不同 T_s 和 (p, q) 参数下最小相位CTFTR函数逼近的算法误差

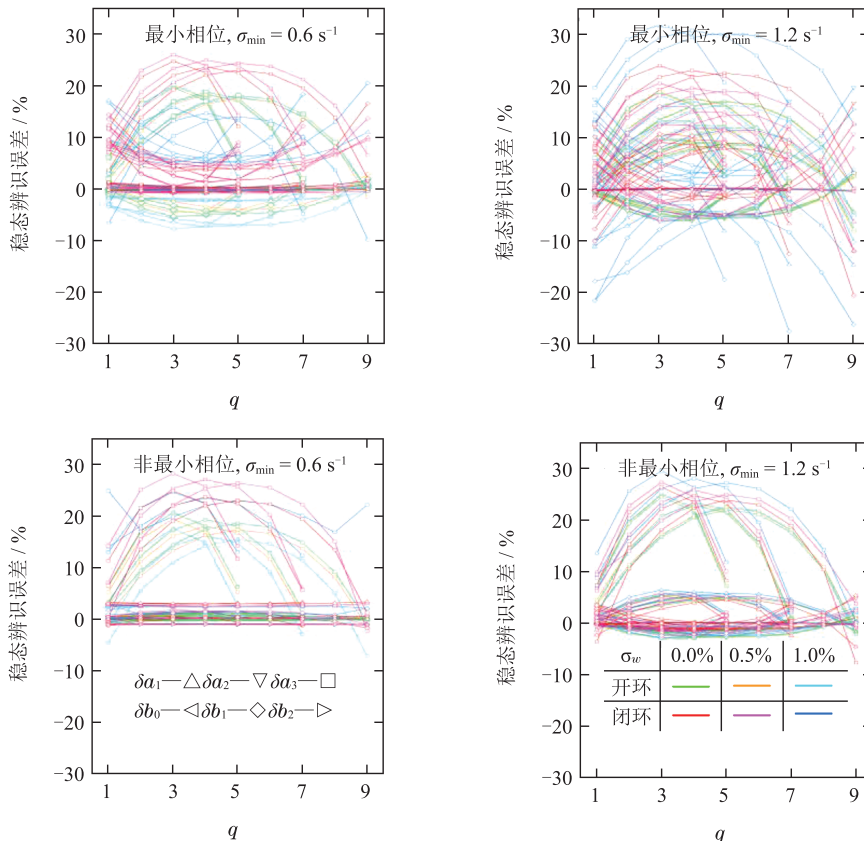
Fig. 3 The approximation errors of minimum-phase CTFTR under different T_s and (p, q)

4) $\sigma = 1.25 \text{ s}$ 时相对于 $T_s = 0.1, 0.05$ 和 0.025 s , 闭环相对误差的绝对值上限分别为1.26%, 0.22%和0.034%, 几乎按照前后采样周期之比的平方显著下降, 且闭环下规律相似, 分别为1.77%, 0.43%和0.10%. 说明适当降低采样周期有利于实域连续时间传递函数逼近精度的提高.

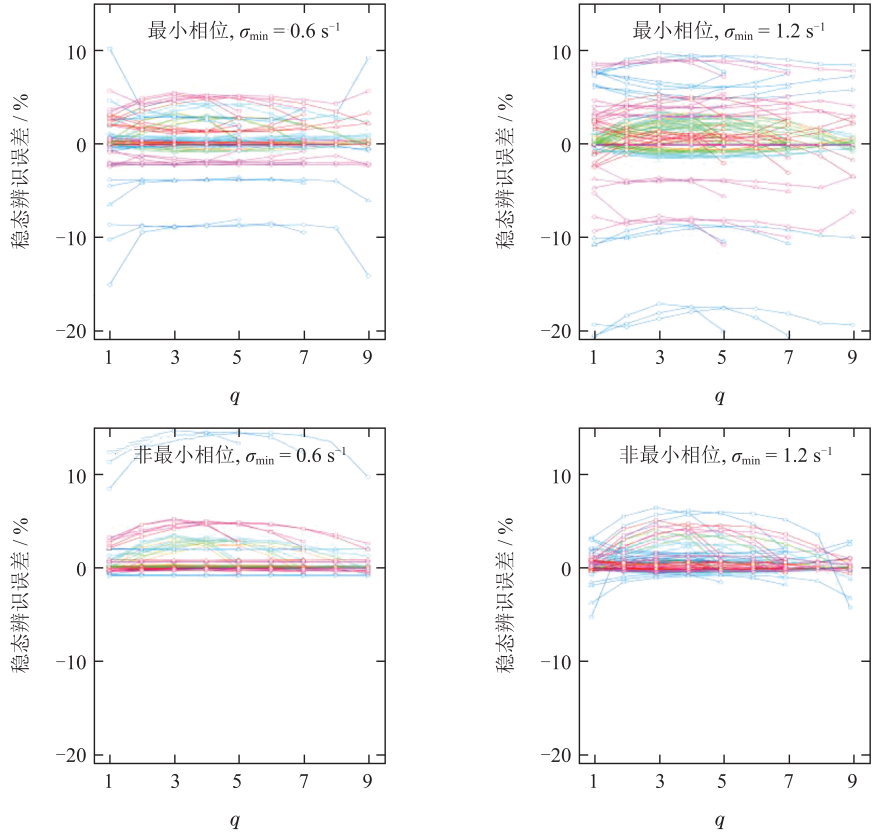
由于非最小相位情形下实域连续时间传递函数逼近的误差规律完全相近, 在此从略.

5.2 模型参数辨识

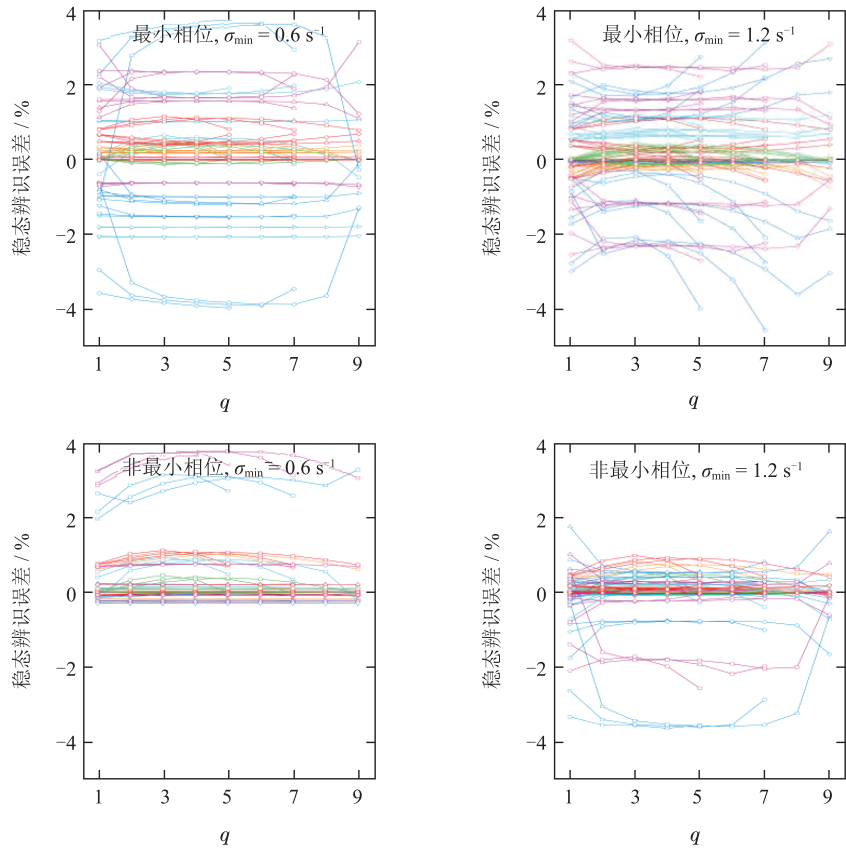
设定 $p = 6, 8, 10$ 和 $1 \leq q \leq p - 1, r = 6$ 以及 $\sigma_i = \sigma_{\min} + 10^{-5}(i - 1), i = 1, 2, \dots, r$, 运用式(5)(9)进行模型参数估计. σ_{\min} 分别取为0.6和1.2, σ_w 相对于开环单位阶跃响应的稳态值分别取为0%, 0.5%, 1.0%, 所得到的各工况下针对各模型参数的相对稳态估计误差结果整理见图4所示. 每条曲线终止时对应的 q 值加1, 即为该曲线对应的 p 参数.



(a) $T_s = 0.1 \text{ s}$ 情形



(b) $T_s = 0.05$ s情形



(c) $T_s = 0.025$ s情形

图 4 不同工况下模型参数估计的稳态误差

Fig. 4 Steady-state estimation errors of the model parameters under different conditions

图4中的“ $\delta\#$ ”表示对算例模型中各参数“ $\#$ ”的稳态相对估计误差,具体为每种工况下的10次Monte Carlo仿真结果的平均值。

注1 无论模型是否为最小相位或(开环/闭环)运行方式如何,所有误差曲线大都随 q 呈凸或凹形变化,且与噪声水平无关,只是曲线的整体会随着 σ_w 的不同略有偏移,且闭环时各误差曲线之间的离散性有所变大.这主要是由于噪声与闭环控制变量阶梯效应叠加作用的结果。

注2 开环情形下,在不同的逼近参数中,以 $(p, 1)$ 或 $(p, p-1)$ 对应的参数辨识误差为最小(或最大),以 $(p, \frac{p}{2})$ 为最大(或最小).此外, $(p, 1)$, $(p, p-1)$ 对应的误差还会随着 p 的增加而单调降低(或增加).闭环时,除个别情形外,也有相似的规律.所以从统计意义上讲, $(p, 1)$ 和 $(p, \frac{p}{2})$ 所对应的结果基本上反映了参数辨识误差的分布范围。

注3 开环时最小相位模型的辨识误差在 $\sigma_{\min} = 1.2 \text{ s}^{-1}$ 时的离散性要好于 0.6 s^{-1} 情形,表明开环条件下较大的 σ 赋值对噪声抑制较有利些.但就闭环情形来说, $\sigma_{\min} = 0.6 \text{ s}^{-1}$ 时的误差分布都几乎优于 1.2 s^{-1} 的水平,说明 σ 的赋值要综合兼顾噪声抑制与算法能力权衡选择.当然,不同的 σ 效果还与具体响应变化的形态有关,本例中的非最小相位情形就是如此。

注4 稳态辨识误差的绝对上限值按开环(闭环)情形,在 $T_s = 0.1 \text{ s}$ 时(以图4各组图中左右上下子图顺序)分别为20.06%(25.96%), 18.83%(31.67%), 20.61%(28.20%)和24.05%(29.49%).然而当 T_s 减小到0.025 s时,则迅速下降到2.08%(3.97%), 1.21%(4.57%), 1.09%(3.84%)和0.84%(3.63%)。

总体来看,降低采样周期对改善辨识精度的效果非常明显,对于开环/闭环、正常参数/刚性参数和最小相位/非最小相位情形都是如此,也与 $G(\sigma)$ 的估计结果相吻合.但考虑到数字控制器的处理能力及采样测量水平的制约,显然 T_s 不能无限度减小,而且降低到一定程度后的噪声影响也会相对显现,难以进一步有效改善精度,故需结合具体的硬件水平确定.此外,适当的 σ 赋值和较大的 $(p, 1)$ 或 $(p, p-1)$ 参数等,都有益于辨识精度的改善。

顺便强调,尽管本例选择的是对以周期采样为基础的连续化逼近具有明显损害性的苛刻模型,并且系统还具有显著的刚性特征,但本文方法仍能得到很好的结果.所以,对于一般特性稍有利(如惯性响应或极零点差超过1)的系统来说,预期会有更好的辨识效果。

6 结束语

通过将复域Laplace变换直接化简为实域上的指数积分变换,提出了连续时间传递函数参数的多重

赋值化指数积分变换逼近(AVE)辨识方法.其要义是利用周期采样序列先行沿时间轴向递推构造不同赋值下系统变量的EIT逼近,进而沿指数因子方向实现模型参数的直接求解或有限递推估计.辨识过程中无需涉及时域卷积或频域等复杂运算.此外,文中还分析了有限EIT逼近的渐近收敛性和时间连续化逼近的代数精度,以及具有一定噪声抑制能力的指数因子赋值条件.在一致激励和有界响应条件下,通过相对复杂和苛刻的仿真算例,充分验证了AVE方法对各种典型工况的有效性,清晰表明了该方法对于最小相位及非最小相位系统,开环或闭环的系统运行方式,乃至刚性参数情形,所具有的宽泛适应性。

顺便指出,由于文中的结果完全是在一般性实域下所得到,从这一角度上说,它对多变量情形下连续时间传递函数矩阵参数估计的推广没有明显的理论障碍.当然,就系统变量赋值化指数积分变换的逼近而言,还可进一步探究是否存在更高效的算法(如Gauss积分逼近,辅助变量消差等).此外,含时延情形下如何有效运用AVE策略也有待研究。

参考文献:

- [1] XIAO M H, ZHAO J, WANG Y, et al. Research on system identification based on hydraulic pump-motor of T HMCVT. *Engineering in Agriculture, Environment and Food*, 2019, 12(4): 420 – 426.
- [2] FENG H, YIN C, MA W, et al. Parameters identification and trajectory control for a hydraulic system. *ISA Transactions*, 2019: 228 – 240.
- [3] GARNIER H, WANG L P. *Identification of Continuous-Time Models from Sampled Data*. London: Springer-Verlag, 2008.
- [4] GARNIER H, MENSLER M, RICHARD A. Continuous-time model identification from sampled data: Implementation issues and performance evaluation. *International Journal of Control*, 2003, 76(13): 1337 – 1357.
- [5] GARNIER H. Direct continuous-time approaches to system identification: Overview and benefits for practical applications. *European Journal of Control*, 2015, 24: 50 – 62.
- [6] PASCU V, GARNIER H, LJUNG L, et al. Benchmark problems for continuous-time model identification: Design aspects, results and perspectives. *Automatica*, 2019, 107: 511 – 517.
- [7] MU B Q, CHEN H F. Hankel matrices for system identification. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2014, 409(1): 494 – 508.
- [8] CHEN L, ZHENG D J. The identification of a dam's modal parameters under random support excitation based on the Hankel matrix joint approximate diagonalization technique. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2014, 42(1/2): 42 – 57.
- [9] SÖDERSTRÖM T S, STOICA P G. *System Identification*. New Jersey: Prentice Hall, 1989.
- [10] VALSTAR J E. In flight dynamic checkout. *IEEE Transactions on Aerospace*, 1963, 1(2): 213 – 221.
- [11] ZHANG Heng. High accuracy parameter identification for linear multivariable continuous systems. *Control Theory & Applications*, 1985, 2(3): 130 – 133.

- (张珩. 线性多变量连续系统参数的高精度辨识. 控制理论与应用, 1985, 2(3): 130 – 133.)
- [12] FARHANG B, TENG T. Transfer function identification with filtering techniques. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1996, 44(6): 1334 – 1345.
- [13] BAUER D. Order estimation for subspace methods. *Automatica*, 2001, 37(10): 1561 – 1573.
- [14] LI W, RAGHAVAN H, SHAH S. Subspace identification of continuous-time models for process fault detection and isolation. *Journal of Process Control*, 2003, 13(5): 407 – 421.
- [15] HUANG B, DING S X, QING S J. Closed-loop subspace identification: An orthogonal projection approach. *Journal of Process Control*, 2005, 15(1): 53 – 66.
- [16] HUANG D L, KATAYAMA T. A subspace-based method for continuous-time model identification by using δ -operator model. *Transactions of ISCIE*, 2001, 14(1): 1 – 9.
- [17] OHSUMI A, KAMEYAMA K, YAMAGUCHI K I. Subspace identification for continuous-time stochastic systems via distribution-based approach. *Automatica*, 2002, 38(1): 63 – 79.
- [18] BASTOGNE T, GARNIER H, SIBILLE P, et al. PMF-based subspace method for continuous-time model identification deterministic study. *IFAC Proceedings Volumes*, 1997, 30(11): 1561 – 1566.
- [19] MERCERE G, OUVRARD R, GILSON M, et al. Subspace based methods for continuous-time model identification of MIMO systems from filtered sampled data. *European Control Conference*. Greece: ECC, 2007: 4057 – 4064.
- [20] INOUE K. Subspace identification with moment matching. *Automatica*, 2019, 99: 22 – 32.
- [21] BERGAMASCO M, LOVERA M. Continuous-time subspace identification in closed-loop using Laguerre filters. *IEEE Conference on Decision and Control*. Atlanta: IEEE, 2010: 2023 – 2028.
- [22] MOHDMOKHTAR R, WANG L P. Continuous time system identification using subspace methods. *ANZIAM Journal*, 2007, 47: 712 – 732.
- [23] VARANASI S K, JAMPANA P. Nuclear norm subspace identification of continuous time state-space models. *IFAC PapersOnLine*, 2018, 51(1): 530 – 535.
- [24] HOU J, CHEN F W, LI P H, et al. An improved consistent subspace identification method using parity space for state-space models. *International Journal of Control Automation and Systems*, 2019, 17(5): 1167 – 1176.
- [25] PAN S, GONZALEZ R A, WELSH J S, et al. Consistency analysis of the simplified refined instrumental variable method for continuous-time systems. *Automatica*, 2020, 113: 108767.
- [26] MOHDMOKHTAR R, WANG L P. Continuous time state space model identification using closed-loop data. *International Conference on Modelling and Simulation*. Kuala Lumpur: IEEE, 2008: 812 – 817.
- [27] SANTOS P L, AZEVEDOPERDICOULIS T, RAMOS J A, et al. Continuous-time IO systems identification through downsampled models. *European Control Conference*. Zurich: ECC, 2013: 3421 – 3426.
- [28] MAHATA K, GARNIER H. Identification of continuous-time errors-in-variables models. *Automatica*, 2006, 42(9): 1477 – 1490.
- [29] JIN Qibing, LIANG Zhu, QUAN Ling. Identification of continuous-time systems with unsteady initial conditions. *Control Theory & Applications*, 2011, 28(1): 125 – 130.
(靳其兵, 梁柱, 权玲. 具有不稳定初始状态的连续时间系统辨识. 控制理论与应用, 2011, 28(1): 125 – 130.)
- [30] HUSELSTEIN E, GARNIER H. An approach to continuous-time model identification from non-uniformly sampled data. *Decision and Control*. Las-Vegas: IEEE, 2003: 622 – 623.
- [31] JOHNASSE R. Continuous-time model identification and state estimation using non-uniformly sampled data. *IFAC Proceedings Volumes*, 2009, 42(10): 1163 – 1168.
- [32] DING F, QIU L, CHEN T W. Reconstruction of continuous-time systems from their non-uniformly sampled discrete-time systems. *Automatica*, 2009, 45(2): 324 – 332.
- [33] SINHA N K, LASTMAN G J. Transformation algorithm for identification of continuous-time multivariable systems from discrete data. *Electronics Letter*, 1981, 17(21): 779 – 780.
- [34] SINHA N K, PUTHENPURA S. Choice of the sampling interval for the identification of continuous-time systems from samples of input/output data. *IEEE Proceedings Part D Control Theory and Applications*, 1985, 132(6): 263 – 267.
- [35] KOWALCZUK Z, KOZLOWSKI J. Continuous-time approaches to identification of continuous-time systems. *Automatica*, 2000, 36(8): 1229 – 1236.
- [36] SONG Z Q, ZHAO G R. Continuous-time model identification based on integral equation and its application in magnetostrictive actuator. *World Congress on Intelligent Control and Automation*. Hangzhou: IEEE, 2004: 325 – 329.
- [37] MIDDLETON R H, GOOWIN G C. *Digital Control and Estimation: A Unified Approach*. New Jersey: Prentice Hall, 1990.
- [38] PINTELON R, SCHOUKENS J. *System Identification: A Frequency Domain Approach, Second Edition*. New Jersey: Wiley-IEEE Press, 2012.
- [39] MAMUM A A, LEE T H, LOW T S. Frequency domain identification of transfer function model of a disk drive actuator. *Mechatronics*, 2002, 12(4): 563 – 574.
- [40] YU C G, BLISS W G, GEIGER R L. A frequency domain parametric system identification algorithm for continuous-time linear filters. *International Symposium on Circuits and Systems*. Singapore: IEEE, 1991: 1725 – 1728.
- [41] CHEN F W, GARNIER H, GILSON M, et al. Frequency domain identification of continuous-time output-error models with time-delay from relay feedback tests. *Automatica*, 2018, 98: 180 – 189.
- [42] XU L, DING F. Parameter estimation for control systems based on impulse responses. *International Journal of Control Automation and Systems*, 2017, 15(6): 2471 – 2479.
- [43] SCHUMACHER R, OLIVERIRA G H. An optimal and unifying vector fitting method for frequency-domain system identification. *International Journal of Electrical Power and Energy Systems*, 2019, 104: 326 – 334.
- [44] YUCRA E A, YUZ J I. Frequency domain accuracy of approximate sampled-data models. *IFAC Proceedings Volumes*, 2011, 44(1): 8711 – 8717.
- [45] HU X L, WELSH J S. Bias analysis of continuous-time model identification from filtered sample output data. *Conference on Decision and Control*. Hawaii: IEEE, 2012: 208 – 213.
- [46] LIU T, GAO F. A frequency domain step response identification method for continuous-time processes with time delay. *Journal of Process Control*, 2010, 20(7): 800 – 809.
- [47] ASTRÖM K J. On the choice of sampling rates in parametric identification of time series. *Information Science*, 1969, 1(3): 273 – 278.

作者简介:

张珩 研究员, 博士生导师, 目前研究方向为鲁棒控制和智能系统及其空间应用, E-mail: hzhang@imech.ac.cn;

肖歆昕 高级工程师, 目前研究方向为空间飞行器动力学与控制, E-mail: xiaoxinxin@imech.ac.cn.