中国科学: 物理学 力学 天文学 2020 年 第 50 卷 第 8 期: 084601
SCIENTIA SINICA Physica, Mechanica & Astronomica physcn.scichina.com
《中国科学》杂志社 SCIENCE CHINA PRESS

评 述

若干弹性力学问题解的唯一性定理

高梦霓[1,2], 赵亚溥[1,2*]

1. 中国科学院力学研究所, 非线性力学国家重点实验室, 北京 100190;
2. 中国科学院大学工程科学学院, 北京 100049
*联系人, E-mail: yzhao@imech.ac.cn

收稿日期: 2020-02-18; 接受日期: 2020-04-08; 网络出版日期: 2020-07-14
国家自然科学基金(编号: 51861145314, 11872363)、中国科学院前沿科学重点研究计划(编号: QYZDJSSW-JSC019)和中国科学院战略性先导科技专项(B类) (编号: XDB22040401)资助项目

摘要 弹性力学问题解的适定性, 包括存在性、唯一性以及稳定性(对边界条件的连续依赖性). 其中解的唯一性定理是求解定解问题的一个有力工具, 为各种求解方法提供理论依据, 解是否满足唯一性是弹性理论的一个基本问题. 然而, 在物理上三维弹性问题存在非唯一解的例子广泛存在, 其相应的数学模型并不能要求解的唯一性定理无条件成立. 因此解的唯一性需在一定的条件下成立, 如弹性张量、应变能函数和变形范围的限制条件. 本文回顾了解的唯一性定理在弹性理论中的背景和发展历史, 重点介绍了线性弹性理论、有限变形非线性弹性理论和具有初始应力场的弹性理论中边值问题的解的唯一性定理, 给出了其中重要定理的证明方法. 在此基础上, 结合研究进展提出了弹性力学问题解的唯一性定理的待解决问题.

关键词 弹性理论, 边值问题, 唯一性定理, 本构关系, 应变能函数, 凸性

PACS: 46.05.+b, 02.60.Lj, 04.20.Ex, 46.25.Cc, 46.25.-y

1 引言

弹性力学问题的完整提法由基本方程和定解条件构成, 且需研究其解的适定性(Well-Posedness). 这一概念最初由Hadamard[1](1865–1963)于1903年给出, 包括解的存在性、唯一性和稳定性(对边界值的连续依赖性). 当满足基本方程以及定解条件的应力、应变和位移(相差一个刚性位移)解仅存在1个时, 称为解满足唯一性. 然而, 解的唯一性定理在弹性力学中的研究和应用开始得更早. Saint-Venant[2](1797–1886)采用半逆解法求解了线弹性梁的扭转和弯曲问题, 并试图证明所求解的唯一性. 虽然Saint-Venant对这一问题的证明并不严格正确, 但他的方法为复杂的偏微分方程的求解提供了思路. 若解的唯一性成立, 则无论采用什么方法求得的解, 以及无论解为何种形式, 所得解的正确性以及完整性得以保证. 若解的唯一性不成立, 则还存在其他解, 并需要判断和选择真实的应力和应变状态. 解的唯一性定理是否成立是弹性理论最基本的重要问题之一.

在经典线弹性理论中, 对于一个在三维空间中占

引用格式: 高梦霓, 赵亚溥. 若干弹性力学问题解的唯一性定理. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2020, 50: 084601
Gao M N, Zhao Y P. Some uniqueness theorems of solutions for the problems of elasticity (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2020, 50: 084601, doi: 10.1360/SSPMA-2020-0042

有一定区域的均质各向同性(Homogeneous and Isotropic)弹性体的标准混合位移-力边值问题，Kirchhoff[3](1824–1887)在1859年给出平衡问题的解的唯一性成立的充分条件，Neumann[4](1798–1895)在1885年给出线弹性动力学问题的解的唯一性成立的充分条件：根据应变能正定这一条件，材料的Lamé常数需满足经典不等式$\mu>0$，$3\lambda+2\mu>0$，也可以用杨氏模量和泊松比表示为$E>0$，$-1<\nu<1/2$. 由于实验结果显示大多数常规材料的Lamé常数均大于零，这一经典不等式似乎是可以保证的. 很长一段时间内，线弹性力学中解的唯一性成立都是以经典不等式为条件，而对此不等式的必要性进行验证也因此被经典的弹性力学教材忽略.

另一方面，在物理上，三维弹性问题中存在非唯一解的例子广泛存在. 因此好的数学模型必须包含可能存在不同解的情况，不能要求解的唯一性无条件成立. 在理论上，伴随着非线性偏微分方程的发展，以及非线性弹性力学问题的建立，其解的唯一性问题的研究面临新的更大的挑战. 在工程应用上，如在土木工程中解的唯一性为结构设计中的强度问题的有效预测提供理论依据；如在地下岩土工程(如隧道)的线弹性问题中备受关注的位移反分析法，根据一般弹性理论得到的位移解析解进行弹性反分析，进而得到岩石力学参数，而位移解的唯一性是开展位移反分析的基础. 弹性力学问题解的唯一性保证了相应数学模型在一定条件下总有唯一的确定的状态，这是一般弹性理论在实际应用中的前提和基础. 判断弹性力学问题解的唯一性成立以及不成立的条件，是弹性理论在工程应用中的理论基础，也是发展数学弹性理论的重要内容.

弹性力学边值问题的定解条件为给定边界条件，其解的唯一性成立的限制条件包括对容许变形的内部和外部限制、对材料参数的限制以及对应变能函数形式的限制等. 因此对边值问题的解的唯一性更多是针对特定情况的讨论，而对于一般弹性力学问题提法的解的唯一性定理，并无明确的充要条件的结论. 在一些专著中，如Knops和Payne[5]在1971年的专著和Gurtin[6]在1973年的专著针对线弹性力学边值问题；Truesdell和Noll[7]在1965年的专著、Valent[8]在1988年的专著以及Ogden[9]在1997年的专著针对非线性弹性力学边值问题，对解的唯一性定理与研究进展进行了详细的阐述，然而现下解的唯一性问题的更多新结果需要回顾和总结，对现在的发展方向需要进行新的展望. 因此本文主要针对弹性静力学的位移-力边值问题中解的唯一性定理，对问题的提法以及主要研究方法、若干重要研究结果以及相应的研究进展和待解决问题进行阐述，同时旨在提供解的唯一性定理在弹性理论中的相关发展的文献查阅途径.

2 一般弹性力学边值问题的完整提法

一个弹性体的物质流形$\mathcal{B}$(简单物质)变形前在欧氏空间$\mathbb{R}^n$中有微分同胚，$\mathbf{X}:\mathcal{B}\to\Omega_0\overset{X_i}{\leftrightarrow}\mathbb{R}^n$，其中主要涉及二维与三维空间$n=2, 3$. 区域$\Omega_0$为非空的、有界的、开的单联通区域，且有足够光滑的边界$\partial\Omega_0$ (Ω_0为Lipschitz域)，闭包$\overline{\Omega}_0$为固定的参考构形(Undeformed/Reference Configuration). 参考构形若为自然状态(Natural State)，即无变形且初始应力(Initial Stress)为零，经过足够光滑的变形映射$\boldsymbol{\chi}:\mathbf{X}\in\Omega_0\to\mathbf{x}=\boldsymbol{\chi}(\mathbf{X})\in\Omega\subset\mathbb{R}^n$到当前构形(Deformed/Current Configuration). 变形梯度张量(Deformation Gradient Tensor) $\mathbf{F}=\mathbf{x}\otimes\nabla_{\mathbf{X}}\in\mathbb{M}^n$为两点张量，弹性体变形前后体积变化为雅可比行列式$J=\det\mathbf{F}$. 变形前后的位移为$\mathbf{u}=\mathbf{x}-\mathbf{X}\in\mathbb{R}^n$，位移梯度张量(Displacement Gradient Tensor)为$\mathbf{H}=\mathbf{u}\otimes\nabla_{\mathbf{X}}\in\mathbb{M}^n$，其中$\mathbb{M}^n$为$n$阶实矩阵集合；且格林应变张量(Green Strain Tensor)为$\mathbf{E}=(\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{F}-\mathbf{I})/2=(\mathbf{C}-\mathbf{I})/2\in\mathbb{S}^n$, $\mathbf{C}\in\mathbb{S}^n_+$为右柯西-格林变形张量(Right Cauchy-Green Deformation Tensor)，其中$\mathbb{S}^n$和$\mathbb{S}^n_+$分别为n阶对称矩阵与正定对称矩阵集合.

在此变形下相应的应力响应函数有关系式:

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{X},\ \mathbf{F})&=\det{}^{-1}(\mathbf{F})\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{X},\ \mathbf{F})\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\\&=\det{}^{-1}(\mathbf{F})\mathbf{F}\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{X},\mathbf{E})\mathbf{F}^{\mathrm{T}},\end{aligned}\tag{1}$$

其中，$\boldsymbol{\sigma}$, $\mathbf{P}$和$\mathbf{T}$分别为定义在当前构形上的柯西应力张量(Cauchy Stress Tensor)、两点张量第一类Piola-Kirchhoff应力张量(First P-K Stress Tensor, PK1应力)和参考构形上的第二类Piola-Kirchhoff应力张量(Second P-K Stress Tensor, PK2应力).

2.1 弹性力学边值问题的分类和微分提法

弹性力学的边值问题由基本方程和边界条件组成. 根据弹性体性质(表1)、限制条件(表2)将问题分

表 1 按照弹性体性质分类

Table 1 Classification according to properties of elastic body

均质性	弹性	凹凸性	初始状态
均质	柯西弹性	凸集	自然状态
非均质	超弹性	星形集	初始应力

类, 并给出位移-力边值问题的一般提法. 经典线弹性力学问题是在此提法基础上对控制方程增加辅助性假设的结果.

2.1.1 根据弹性体性质分类

弹性体以及所占区域Ω_0的性质决定着弹性体物理量(函数)的形式和性质. 将区域划分有界域和无界域, 其中有界域又可以分为凸集(Convex Set)、星形集(Star-Shape Set)等. 弹性体材料的弹性、均质性以及参考构形状态影响应力响应函数的形式, 以PK1应力响应函数$\widehat{\mathbf{P}}$为例进行说明. 在这里我们讨论两种材料, 第一种弹性体为柯西弹性材料(Cauchy Elastic Material), 非均质的、具有初始应力的弹性体的PK1应力响应函数表示为物质点、初始应力$\mathbf{P}^0$以及变形梯度的函数:

$$\mathbf{P} = \widehat{\mathbf{P}}(\mathbf{X},\ \mathbf{P}^0, \mathbf{F}). \tag{2}$$

第二种弹性体为格林弹性材料(Green Elastic Material), 也称之为超弹性材料(Hyperelastic Material), 对于非均质的、具有初始应力的弹性体, 即存在应变能函数(Strain Energy Function)是物质点、初始应力以及变形梯度的函数$\widehat{W}(\mathbf{X}, \mathbf{P}^0, \mathbf{F})$, 此时PK1应力为

$$\mathbf{P} = \frac{\partial \widehat{W}\left(\mathbf{X}, \mathbf{P}^0, \mathbf{F}\right)}{\partial \mathbf{F}}. \tag{3}$$

对于式(2)和(3), 若弹性体为均质的, 则物理量与物质点无关; 若参考构形为自然状态, 物理量与初始应力场无关; 此时PK1应力仅为变形梯度的函数:

$$\mathbf{P} = \widehat{\mathbf{P}}(\mathbf{F}) \text{ 或 } \frac{\partial \widehat{W}(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}}. \tag{4}$$

按照弹性体的性质分类如表1所示.

2.1.2 根据作用力与容许变形的限制条件分类

弹性体在载荷下发生变形, 包括体力和面力(只讨论保守的作用力). 当前构形下单位质量的体力密度$\mathbf{b}$和单位面积的面力密度$\mathbf{t}$分别为

$$\begin{aligned} &\mathbf{b}:\ \mathbf{x} \in \Omega \rightarrow \mathbf{b}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n, \\ &\mathbf{t}:\ \mathbf{x} \in \partial_t\, \Omega \rightarrow \mathbf{t}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \tag{5}$$

且满足合力以及合力矩的平衡条件:

表 2 按照限制条件分类

Table 2 Classification according to restrictive conditions

限制条件		数学形式
外部限制	位移边界	$\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} = \bar{\chi}(\mathbf{X}),\ \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{X});\ \mathbf{X} \in \partial_d\Omega_0 \subset \partial\Omega_0$
	力边界	$\mathbf{PN} = \mathbf{t}_0;\ \mathbf{X} \in \partial_t\Omega_0 \subset \partial\Omega_0$
	弹性边界	$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{Au} = 0;\ \mathbf{X} \in \partial_e\Omega_0 \subset \partial\Omega_0$, $\mathbf{A}$为正定的常张量
	第一类接触条件	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \bar{u}(\mathbf{X}),\ \mathbf{t}_\tau = \bar{\mathbf{t}}_\tau(\mathbf{X});\ \mathbf{X} \in \partial_{C1}\Omega_0 \subset \partial\Omega_0$
	第二类接触条件	$\mathbf{u}_\tau = \bar{\mathbf{u}}_\tau(\mathbf{X}), \mathbf{t} \cdot \mathbf{n} = \bar{t}(\mathbf{X});\ \mathbf{X} \in \partial_{C2}\Omega_0 \subset \partial\Omega_0$
	非局部边界	$\mathbf{x}(\mathbf{X}) = \chi(\mathbf{X}, \mathbf{X}') \subset \mathbb{R}^n;\ \mathbf{X}, \mathbf{X}' \in \bar{\Omega}_0$
	封闭边界	$\mathbf{x}(\mathbf{X}) = \chi(\mathbf{X}) \subset \mathrm{B} \subset \mathbb{R}^n;\ \mathbf{X} \in \bar{\Omega}_0$
	单边接触位移边界	$\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}) \subset \bar{\mathrm{C}} \subset \mathbb{R}^n;\ \mathbf{X} \in \partial_C\bar{\Omega}_0$
内部限制	保方向性	$\det\mathbf{F} > 0,\ \mathbf{X} \in \Omega_0$
	纯位移边界下的单射性	$\partial_d\Omega_0 = \partial\Omega_0,\ \det\mathbf{F} > 0;\ \chi : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$足够光滑
	其他条件下的单射性	$\det\mathbf{F} > 0,\ v = \int_\Omega \mathrm{d}v \geq \int_{\Omega_0} J\mathrm{d}V$

$$\begin{aligned}&\int_{\partial_t\Omega}\mathbf{t}(\mathbf{x})\mathrm{d}s+\int_{\Omega}\rho(\mathbf{x})\mathbf{b}(\mathbf{x})\mathrm{d}v=\mathbf{0},\\&\int_{\partial_t\Omega}\mathbf{r}\times\mathbf{t}(\mathbf{x})\mathrm{d}s+\int_{\Omega}\rho(\mathbf{x})\mathbf{r}\times\mathbf{b}(\mathbf{x})\mathrm{d}v=\mathbf{0},\end{aligned}\tag{6}$$

其中, 密度为$\rho(\mathbf{x})$, 距离固定点$\mathbf{o}$的矢径为$\mathbf{r}=\mathbf{x}-\mathbf{o}$.

由当前构形与参考构形的体积元的转换关系$\mathrm{d}v=J\mathrm{d}V$, 有面积元转换的南森(Nanson)公式:

$$\mathbf{n}\mathrm{d}s=J\mathbf{F}^{-\mathrm{T}}\mathbf{N}\mathrm{d}S,\tag{7}$$

即得到$\mathbf{n}=(\mathrm{Cof}\mathbf{F})\mathbf{N}/|(\mathrm{Cof}\mathbf{F})\mathbf{N}|$, 其中$\mathbf{n}$和$\mathbf{N}$分别为当前构形和参考构形中的面元外法线单位矢量. 进一步有面积元关系$\mathrm{d}s=|(\mathrm{Cof}\mathbf{F})\mathbf{N}|\mathrm{d}S$.

根据Da Silva定理得到参考构形上力与力矩平衡关系:

$$\begin{aligned}&\int_{\partial_t\Omega_0}\mathbf{t}_0(\mathbf{X})\mathrm{d}S+\int_{\Omega_0}\rho_0(\mathbf{X})\mathbf{b}(\mathbf{X})\mathrm{d}V=\mathbf{0},\\&\int_{\partial_t\Omega_0}\mathbf{r}_0\times\mathbf{t}_0(\mathbf{X})\mathrm{d}S+\int_{\Omega_0}\rho_0(\mathbf{X})\mathbf{r}_0\times\mathbf{b}(\mathbf{X})\mathrm{d}V=\mathbf{0},\end{aligned}\tag{8}$$

其中, 密度关系$\rho_0(\mathbf{X})=J\rho(\mathbf{x})$, 体力密度关系$\mathbf{b}(\mathbf{X})=\mathbf{b}(\mathbf{x})$, 面力密度关系$\mathbf{t}_0(\mathbf{X})=|(\mathrm{Cof}\mathbf{F})\mathbf{N}|\,\mathbf{t}(\mathbf{x})$.

参考构形上与变形无关的作用力为恒载(Dead Load), 其映射关系为

$$\begin{aligned}&\mathbf{b}:\ \mathbf{X}\in\Omega_0\to\mathbf{b}(\mathbf{X})\in\mathbb{R}^n,\\&\mathbf{t}_0:\ \mathbf{X}\in\partial_t\Omega_0\to\mathbf{t}_0(\mathbf{X})\in\mathbb{R}^n.\end{aligned}\tag{9}$$

相反, 与特定的变形相关的作用力称为活载荷(Live Load), 其映射关系为

$$\begin{aligned}&\mathbf{b}:\ \mathbf{X}\in\Omega_0\times\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n\to\mathbf{b}(\mathbf{X},\boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}))\in\mathbb{R}^n,\\&\mathbf{t}_0:\ \mathbf{X}\in\partial_t\Omega_0\times\mathbf{F}\in\mathbb{M}_+^n\to\mathbf{t}_0(\mathbf{X},\mathbf{F}(\mathbf{X}))\in\mathbb{R}^n.\end{aligned}\tag{10}$$

从数学的观点看, 假定作用力为恒载是一种简化, 而从物理现实出发, 实际施加的载荷很少为恒载, 一般为活载荷, 即参考构形上的作用力不但与物质点相关, 同样也是变形的函数. 以一个压力载荷为例, 在当前构形下的面力密度$\mathbf{t}(\mathbf{x})=-\pi\mathbf{n}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}\in\partial_t\Omega$, 其中$\pi$为压力常数. 当$\pi=0$时, 参考构形上的面力密度为$\mathbf{t}_0=\mathbf{0}$为恒载; 当$\pi\neq0$时, 参考构形上的面力密度为$\mathbf{t}_0(\mathbf{X})=-\pi(\mathrm{Cof}\mathbf{F})\mathbf{N}=-\pi J\mathbf{F}^{-\mathrm{T}}\mathbf{N}$, $\mathbf{X}\in\partial_t\Omega_0$, 即在一点处的面力为变形$\mathbf{F}$的函数.

另一种作用力限制条件为给定面力值的边界条件: 在参考构形边界面$\partial_t\Omega_0\subset\partial\Omega_0$给定面力值$\mathbf{t}_0$, 满足$\mathbf{PN}=\mathbf{t}_0$; 特别地, 当弹性体整个边界均为力边界时, $\partial_t\Omega_0=\partial\Omega_0$, 需要考虑平衡轴定理, 具体可见附录A以及Truesdell[7]第44节中的详细内容.

对容许变形的限制条件分为两种. 第一种为边界条件对变形的外部限制, 主要考虑位移边界条件: 在表面$\partial_d\Omega_0\subset\partial\Omega_0$上给定变形值, 即$\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}=\bar{\boldsymbol{\chi}}(\mathbf{X})$. 同样对于边界上容许形变的限制还有诸如非局部的位移边界、限制形变范围的封闭边界条件以及单边接触位移边界等. 第二种是根据物理条件对变形的内部限制, 包括保方向性和单射性, 即排除物质互相渗透的情况, 这一系列条件最初由Ciarlet[10–12](1938–)提出.

另一重要的位移-力限制条件为接触边界, 将边界$\partial\Omega_0$上的位移和力分解为切向分量和垂直分量[6]:

$$\begin{aligned}&\mathbf{u}=\mathbf{u}_\tau+\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\otimes\mathbf{n},\\&\mathbf{t}=\mathbf{t}_\tau+\mathbf{t}\cdot\mathbf{n}\otimes\mathbf{n},\end{aligned}\tag{11}$$

其中, $\mathbf{n}$为边界面的外法向单位向量, 根据给定的分量限制条件可将接触问题划分为第一类和第二类接触条件, 具体问题见第3.3节.

将作用力与容许变形的限制条件分类列于表2.

2.1.3 经典的位移-力边值问题的微分提法

弹性体的典型位移-力边值问题中的基本方程和边界条件用PK1应力表示, 按照边界条件将问题分为纯位移边界、纯力边界和混合边界问题. 其完整提法见表3.

2.2 总能量变分和Euler-Lagrange方程(变分提法)

在弹性数学理论研究中一个重要的研究方法为总能量(总势能, Total Energy)的变分法. 根据2.1.2节, 容许变形$\mathbf{p}$的集合为

$$P:=\left\{\begin{aligned}&\mathbf{p}:\bar{\Omega}_0\to\mathbb{R}^n;\ \det(\mathbf{p}\otimes\nabla)>0,\ \forall\mathbf{X}\in\bar{\Omega}_0;\\&\mathbf{p}(\mathbf{X})=\bar{\mathbf{x}},\ \forall\mathbf{X}\in\partial_d\Omega_0\end{aligned}\right\}.\tag{12}$$

则变形$\mathbf{x}$处对应的切空间为

$$T_xP:=\{\mathbf{q}:\bar{\Omega}_0\to\mathbb{R}^n;\ \mathbf{q}=0,\ \mathbf{X}\in\partial_d\Omega_0\}.\tag{13}$$

此切空间中的元素为光滑的向量场$\mathbf{q}$.

对于超弹性材料, 定义应变能函数泛函, 即应变能:

表 3 参考构形上的经典位移-力边值问题

Table 3 Classical displacement-traction boundary-value problem over the reference configuration

方程类型		方程
基本方程	变形几何方程	$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathrm{d}\mathbf{x} / \mathrm{d}\mathbf{X}$; $\mathbf{E} = (\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{F} - \mathbf{I}) / 2$
	PK1应力响应函数	$\mathbf{P} = \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{X}, \mathbf{P}_0, \mathbf{F})$ 或 $\mathbf{P} = \partial \widehat{W}(\mathbf{X}, \mathbf{P}_0, \mathbf{F}) / \partial \mathbf{F}$
	运动(平衡)方程	$\mathrm{Div}\mathbf{P} + \rho_0 \mathbf{b} = \rho_0 \ddot{\mathbf{x}}$; $(\ddot{\mathbf{x}} = 0)$
边界条件	纯位移边值问题	$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{X})$; $\mathbf{X} \in \partial_d \Omega_0 = \partial\Omega_0$
	纯力边值问题	$\mathbf{PN} = \mathbf{t}_0$; $\mathbf{X} \in \partial_t \Omega_0 = \partial\Omega_0$
	混合边值问题	$\partial_t\Omega_0 \cup \partial_d\Omega_0 = \partial\Omega_0$; $\partial_t\Omega_0 \cap \partial_d\Omega_0 = \varnothing$

$$W(\mathbf{p}) = \int_{\Omega_0} \widehat{W}\left(\mathbf{X}, \mathbf{p} \otimes \nabla\right) \mathrm{d}V. \tag{14}$$

则其在$\mathbf{x}$处的加托导数(Gâteaux Derivative)为

$$W'(\mathbf{x})\mathbf{q} = \int_{\Omega_0} \left\{\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{X}, \mathbf{F}) : \mathbf{q} \otimes \nabla\right\} \mathrm{d}V. \tag{15}$$

由于保守力的积分与路径无关, 可以定义作用力相关泛函. 对$\forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{a} \otimes \nabla \in \mathbb{M}_+^n$, 面力和体力对应的作用力势(Potential of the Applied Force)为

$$\begin{aligned} &\widehat{B} : \mathbf{X} \in \Omega_0 \times \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \to \widehat{B}(\mathbf{X}, \mathbf{a}) \in \mathbb{R}, \\ &\widehat{T} : \mathbf{X} \in \partial_t\Omega_0 \times \mathbf{a} \otimes \nabla \in \mathbb{M}_+^n \to \widehat{T}(\mathbf{X}, \mathbf{a}, \mathbf{a} \otimes \nabla) \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{16}$$

在恒载荷的情况下, 具有具体形式:

$$\begin{aligned} &\widehat{B}(\mathbf{X}, \mathbf{a}) = \rho_0 \mathbf{b}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{a}, \ \forall \mathbf{X} \in \Omega_0, \\ &\widehat{T}(\mathbf{X}, \mathbf{a}, \mathbf{a} \otimes \nabla) = \mathbf{t}_0(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{a}, \ \forall \mathbf{X} \in \partial_t\Omega_0. \end{aligned} \tag{17}$$

在容许变形集合内, 式(16)对应的泛函为

$$\begin{aligned} &B : \{\mathbf{p} : \overline{\Omega}_0 \to \mathbb{R}^n\} \to B(\mathbf{p}) = \int_{\Omega_0} \widehat{B}(\mathbf{X}, \mathbf{p}) \mathrm{d}V, \\ &T : \{\mathbf{p} : \overline{\Omega}_0 \to \mathbb{R}^n\} \to T(\mathbf{p}) = \int_{\partial_t\Omega_0} \widehat{T}\left(\mathbf{X}, \mathbf{p}, \mathbf{p} \otimes \nabla\right) \mathrm{d}S. \end{aligned} \tag{18}$$

则其在$\mathbf{x}$处的加托导数为

$$\begin{aligned} &B'(\mathbf{x})\mathbf{q} = \int_{\Omega_0} \rho \mathbf{b}(\mathbf{X}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{q} \mathrm{d}V, \\ &T'(\mathbf{x})\mathbf{q} = \int_{\partial_t\Omega_0} \mathbf{t}_0(\mathbf{X}, \mathbf{F}(\mathbf{X})) \cdot \mathbf{q} \mathrm{d}S. \end{aligned} \tag{19}$$

由式(14)和(18), 弹性体的总能量为

$$I(\mathbf{p}) = W(\mathbf{p}) - B(\mathbf{p}) - T(\mathbf{p}), \tag{20}$$

在$\mathbf{x}$处的加托导数为

$$I'(\mathbf{x})\mathbf{q} = W'(\mathbf{x})\mathbf{q} - B'(\mathbf{x})\mathbf{q} - T'(\mathbf{x})\mathbf{q}, \tag{21}$$

其Euler-Lagrange方程为

$$I'(\mathbf{x})\mathbf{q} = 0. \tag{22}$$

在容许应变集合P中, 若足够光滑的映射$\mathbf{x} \in P$使得能量取得最小值, 即$I(\mathbf{x}) = \inf I(\mathbf{p})$, 则这个映射也是位移-力边值的解. 总能量的极小值点与平衡问题的位移-力边值问题的解一致.

2.3 应变能函数的性质

对于超弹性材料, 应力应变的本构关系由应变能函数表示. 构造的应变能函数$\widehat{W}(\mathbf{X}, \mathbf{F})$是定义在$\Omega_0 \times \mathbb{M}_+^n$上的实函数. Cauchy应力张量与物体变形和运动描述的本构关系需满足的八大本构公理: 因果性公理(Axiom of Causality)、确定性公理(Axiom of Determinism)、等存在公理(Axiom of Equipresence)、客观性公理(Axiom of Objectivity, 物质标架无差异性)、物质不变性公理(Axiom of Material Invariance)、邻域公理(Axiom of Neighborhood)、记忆公理(Axiom of Memory)和相容性公理(Axiom of Admissibility). 由客观性公理, 存在由右柯西-格林变形张量定义的应变能函数$\widetilde{W}(\mathbf{X}, \mathbf{C}) = \widehat{W}(\mathbf{X}, \mathbf{F})$, 是定义在$\Omega_0 \times \mathbb{S}_+^n$中的实函数. 应变能函数在定义集合上的凸性是极小化问题研究中的主要困难根源. 几种凸性主要关系为[13,14]

严格凸⇒凸⇒多凸⇒拟凸⇒秩一凸,

其中, ⇒表示“蕴含”, 即充分条件. 应变能函数$\widehat{W}(\mathbf{F})$对$\mathbf{F}$的几种凸性概念详细定义如下.

(1) 凸函数(Convex Function)与严格凸函数(Strictly Convex Function): 若函数$\widehat{W}(\mathbf{F})$定义在集合

$\mathbb{U}\subset\mathbb{M}^3_+$上, 令$[\mathbf{F},\mathbf{G}]\in\mathbb{U}$, 当不等式$\widehat{W}(\lambda\mathbf{F}+(1-\lambda)\mathbf{G})\le\lambda\widehat{W}(\mathbf{F})+(1-\lambda)\widehat{W}(\mathbf{G})$成立则函数为凸函数; 当等号仅仅在$\mathbf{F}$=$\mathbf{G}$时成立, $\widehat{W}(\mathbf{F})$为严格凸函数. 这一概念由Hill[15]用于有限变形时解的唯一性定理的证明.

(2) 多凸函数(Polyconvex Function): 若函数$\widehat{W}(\mathbf{F})$定义在集合$\mathbb{U}\subset\mathbb{M}^3_+$上, 若对于每个物质点, 在集合$\mathbb{U}':=\{(\mathbf{F},\mathrm{Cof}\mathbf{F},\det\mathbf{F})\in\mathbb{M}^3\times\mathbb{M}^3\times\mathbb{R}\}$的凸壳$\mathrm{co}\mathbb{U}':=\mathbb{M}^3\times\mathbb{M}^3\times(0,+\infty)$上都存在凸函数$\widehat{W}^*(\mathbf{F},\mathrm{Cof}\mathbf{F},\det\mathbf{F}):\mathbb{M}^3\times\mathbb{M}^3\times(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, 使得$\widehat{W}(\mathbf{F})$与之相等, 则称$\widehat{W}(\mathbf{F})$为多凸函数. 这一概念最初由Ball[16]提出并用于有限变形理论.

(3) 拟凸函数(Quasiconvex Function): 若函数$\widehat{W}(\mathbf{F})$定义在集合$\mathbb{U}\subset\mathbb{M}^3_+$上, 有界开子集$\Omega_0\subset\mathbb{R}^3$的测度为$\mathrm{vol}\Omega_0$. 对任意物质点$\mathbf{X}\in\Omega_0$和任意函数$\mathbf{p}\in\mathbb{D}(\Omega_0)$(连续可微且具有紧支撑的函数的空间$\mathbb{D}(\Omega_0):=\{\mathbf{p}\in C^\infty,\ \mathrm{supp}\ \mathbf{p}$是紧集$\}$), 且变量满足$\mathbf{F}+\mathbf{p}\otimes\nabla\in\mathbb{U}$. 函数为拟凸函数当满足不等式

$$\widehat{W}(\mathbf{F})\le\frac{1}{\mathrm{vol}\Omega_0}\int_{\Omega_0}\widehat{W}\left(\mathbf{F}+\mathbf{p}\otimes\nabla\right)\mathrm{d}V.$$

这一数学概念最初由Morrey[17]在1952年计算变分时提出, 而后Ball[16]在1977将之应用于非线性弹性理论, 主要是解的存在性的研究.

(4) 秩一凸函数(Rank-One Convex Function): 若函数$\widehat{W}(\mathbf{F})$定义在集合$\mathbb{U}\subset\mathbb{M}^3_+$上, 若有秩$\mathrm{rank}(\mathbf{F}-\mathbf{G})\le 1$且$[\mathbf{F},\mathbf{G}]\in\mathbb{U}$, 当不等式

$\widehat{W}(\lambda\mathbf{F}+(1-\lambda)\mathbf{G})\le\lambda\widehat{W}(\mathbf{F})+(1-\lambda)\widehat{W}(\mathbf{G})$

成立时函数为秩一凸函数. 这一概念由Coral[18]于1937年和Graves[19]于1939年提出.

上述应变能函数凸性, 在非均质弹性体中依旧适用. 值得注意的是, 对于定义在$\mathbb{R}$上的实函数, 上述各凸性是一致等价的.

若应变能函数二阶连续可微, 有四阶弹性张量:

$$^*\mathbb{A}_{ijkl}(\mathbf{F})={}^*\mathbb{A}_{klij}(\mathbf{F})=\frac{\partial^2\widehat{W}(\mathbf{F})}{\partial F_{ij}\partial F_{kl}}.\tag{23}$$

此张量决定平衡方程的性质[20]如下.

(1) 平衡方程在点$\mathbf{X}$处是椭圆型的: 若张量满足椭圆条件$\det\left[{}^*\mathbb{A}_{ijkl}(\mathbf{F}(\mathbf{X}))v_jv_l\right]\neq 0$, 其中$\mathbf{v}\in\mathbb{R}^3$为任意非零矢量.

(2) 平衡方程在点$\mathbf{X}$处是强椭圆型的: 若张量满足强椭圆条件$p(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{u},\mathbf{v})={}^*\mathbb{A}_{ijkl}u_iu_kv_jv_l>0$, 也称为S-E(Strong-Ellipticity)不等式, 其中$\mathbf{u}$, $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^3$为任意非零矢量; 当$p(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{u},\mathbf{v})\ge 0$时, 此条件又称为L-H(Legendre-Hadamard)不等式.

(3) 各向同性弹性张量的椭圆条件可见文献[21–24]; 线弹性理论中的应用可见文献[25,26].

相对应地, 四阶弹性张量的正定性常用的有以下几种.

(1) 秩一正定(Rank-One Positive Definiteness): 满足条件$p(\mathbf{u},\mathbf{u},\mathbf{u},\mathbf{u})={}^*\mathbb{A}_{ijkl}u_iu_ku_ju_l>0$, 其中$\mathbf{v}\in\mathbb{R}^3$为任意非零矢量.

(2) M-正定(Mechanics Positive Definiteness): 满足条件$p(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{u},\mathbf{v})={}^*\mathbb{A}_{ijkl}u_iu_kv_jv_l>0$, 其中$\mathbf{u}$, $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^3$为任意非零矢量; 此条件与S-E不等式等价[27,28].

(3) 二阶正定(Second-Order Positive Definiteness): 满足条件$p(\mathbf{D},\mathbf{D})={}^*\mathbb{A}_{ijkl}D_{ij}D_{kl}>0$, 其中$\mathbf{D}\in\mathbb{M}^3$为任意非零张量. 我们将此更严格的正定性简称为正定性, 与CN(Coleman-Noll)不等式等价[29].

应变能函数的凸性与弹性张量的正定性有直接关系. 若应变能函数$\widehat{W}(\mathbf{F})$是一阶连续可微, 则此时函数为凸函数的一阶导数等价条件为

$$\widehat{W}(\mathbf{F}_1+\mathbf{H})-\widehat{W}(\mathbf{F}_1)-\mathbf{H}:\left.\frac{\partial\widehat{W}}{\partial\mathbf{F}}\right|_{\mathbf{F}=\mathbf{F}_1}\ge 0,\tag{24}$$

其中, $\mathbf{H}\in\mathbb{M}^3_+$. 若当且仅当$\mathbf{H}=\mathbf{0}$时等号成立, 式(24)为严格凸函数的等价条件. 另一种一阶等价条件表示为

$$\left(\left.\frac{\partial\widehat{W}}{\partial\mathbf{F}}\right|_{\mathbf{F}=\mathbf{F}_1}-\left.\frac{\partial\widehat{W}}{\partial\mathbf{F}}\right|_{\mathbf{F}=\mathbf{F}_2}\right):(\mathbf{F}_1-\mathbf{F}_2)\ge 0.\tag{25}$$

严格凸函数仅当$\mathbf{F}_2$=$\mathbf{F}_1$时等号成立. 式(25)等价于PK1应力的单调性:

$$\begin{aligned}&\mathrm{tr}\{[\widehat{\mathbf{P}}(\mathbf{F}_1)-\widehat{\mathbf{P}}(\mathbf{F}_2)](\mathbf{F}_1-\mathbf{F}_2)^{\mathrm{T}}\}\\&\quad=[\widehat{\mathbf{P}}(\mathbf{F}_1)-\widehat{\mathbf{P}}(\mathbf{F}_2)]:(\mathbf{F}_1-\mathbf{F}_2)\ge 0,\end{aligned}\tag{26}$$

其中, $\mathbf{F}_1$=$\mathbf{S}\mathbf{F}_2$; $\mathbf{F}_1-\mathbf{F}_2=(\mathbf{S}-\mathbf{I})\mathbf{F}_2\in\mathbb{M}^3_+$, $\mathbf{S}\in\mathbb{S}^3_+$. 这一单

调不等式为GCN不等式(General Coleman-Noll Inequality)[30]. 若各向同性弹性体应变能函数$\widehat{W}(\mathbf{F})$是二阶连续可微的, 则凸函数的二阶导数等价条件为

$$\mathbf{D}:\left.\frac{\partial^2\widehat{W}}{\partial\mathbf{F}\partial\mathbf{F}}\right|_{\mathbf{F}=\mathbf{F}_1}:\mathbf{D}\geq 0;\ \frac{\partial^2\widehat{W}}{\partial F_{ij}\partial F_{kl}}D_{ij}D_{kl}\geq 0, \tag{27}$$

其中, $\mathbf{D}\in\mathbb{M}^3$. 上述不等式与CN不等式等价. 关于CN不等式和GCN不等式可参考文献[31].

将应变能函数的性质总结于表4.

3 线弹性理论中解的唯一性定理

在连续性假设和弹性假设的基础上, 对于无限小应变, 此时应变为变形的线性函数; 同时满足线性物理关系(本构关系), 线性弹性张量为$^*\mathbb{L}$, 建立无初始应力的线弹性理论. 此时不再区分参考构形和当前构形的差别, 结合边界条件, 建立采用无限小应变$\widetilde{\mathbf{E}}$和相应的柯西应力$\boldsymbol{\sigma}$描述的经典位移-力边值问题, 见表5.

3.1 经典线弹性力学边值问题的解的唯一性定理

在连续性假设、线弹性假设、小变形小应变假设、自然初始状态假设的基础上增加均质性假设、各向同性假设等辅助性假设, 共六大假设的基础上, 建立经典的线弹性理论, 此时弹性张量为

$$^*\mathbb{E}=2\mu^*\mathbb{I}^s+\lambda(\mathbf{I}\otimes\mathbf{I})=\mu(^*\mathbb{I}+{}^*\mathbb{I}^{\mathrm{T}})+\lambda(\mathbf{I}\otimes\mathbf{I}), \tag{28}$$

具有小对称性$^*\mathbb{E}_{ijkl}={}^*\mathbb{E}_{jikl}={}^*\mathbb{E}_{ijlk}$和大对称性$^*\mathbb{E}_{ijkl}={}^*\mathbb{E}_{klij}$, 其中$^*\mathbb{I}_{ijkl}=\delta_{ik}\delta_{jl}$, $^*\mathbb{I}^{\mathrm{T}}_{ijkl}=\delta_{il}\delta_{kj}$, $^*\mathbb{I}^s$为四阶单位对称张量, $\mathbf{I}$为二阶单位张量. λ和μ为Lamé常数. 应力为$\boldsymbol{\sigma}={}^*\mathbb{E}:\widetilde{\mathbf{E}}=\lambda\,\mathrm{tr}(\widetilde{\mathbf{E}})\mathbf{I}+2\mu\widetilde{\mathbf{E}}$, 得到位移表示的平衡方程(Lamé-Navier Equation):

表 4 应变能函数$\widehat{W}(\mathbf{F})$的凸性

Table 4 Convexity of the strain energy function $\widehat{W}(\mathbf{F})$

函数性质	数学关系不等式	备注
严格凸函数	等号仅在$\mathbf{F}=\mathbf{G}$时成立	$\widehat{W}\in C^2$, CN不等式
凸函数	$\widehat{W}(\lambda\mathbf{F}+(1-\lambda)\mathbf{G})\leq\lambda\widehat{W}(\mathbf{F})+(1-\lambda)\widehat{W}(\mathbf{G})$; $[\mathbf{F},\mathbf{G}]=\lambda\mathbf{F}+(1-\lambda)\mathbf{G}\in\mathbb{U}\subset\mathbb{M}^3_+,\ \lambda\in[0,1]$	PK1应力单调性
多凸函数	$\widehat{W}(\mathbf{F})=\widehat{W}^*(\mathbf{F},\mathrm{Cof}\,\mathbf{F},\det\mathbf{F});\ \mathbf{F}\in\mathbb{M}^3_+$	Ball[16]
拟凸函数	$\widehat{W}(\mathbf{F})\leq\frac{1}{\mathrm{vol\,D}}\int_{\mathrm{D}}\widehat{W}(\mathbf{F}+\nabla\theta(\mathbf{X}))\mathrm{d}\mathbf{X}$	Morrey[17]
秩一凸函数	$\widehat{W}(\lambda\mathbf{F}+(1-\lambda)\mathbf{G})\leq\lambda\widehat{W}(\mathbf{F})+(1-\lambda)\widehat{W}(\mathbf{G})$; $[\mathbf{F},\mathbf{G}]=\lambda\mathbf{F}+(1-\lambda)\mathbf{G}\in\mathbb{U}\subset\mathbb{M}^3_+;\ \lambda\in[0,1]$ $\mathrm{rank}(\mathbf{F}-\mathbf{G})\leq 1$	$\widehat{W}\in C^2$, L-H不等式

表 5 线弹性力学经典位移-力边值问题

Table 5 The classical displacement-traction boundary-value problems in the linear elasticity

方程类型		数学形式
基本方程	平衡方程	$\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla+\rho\mathbf{b}=\mathbf{0}$
	变形几何方程	$\widetilde{\mathbf{E}}=(\mathbf{u}\otimes\nabla+\nabla\otimes\mathbf{u})/2,\ \widetilde{\mathbf{W}}=(\mathbf{u}\otimes\nabla-\nabla\otimes\mathbf{u})/2$
	应变能函数	$\widehat{W}(\widetilde{\mathbf{E}})=(\widetilde{\mathbf{E}}:{}^*\mathbb{L}:\widetilde{\mathbf{E}})/2$
	应力响应	$\boldsymbol{\sigma}={}^*\mathbb{L}:\widetilde{\mathbf{E}}$
边界条件	位移边界	$\mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x});\ \mathbf{x}\in\partial_d\Omega$
	力边界	$\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{t};\ \mathbf{x}\in\partial_t\Omega$

$$\mu\Delta\mathbf{u}+(\lambda+\mu)\nabla\otimes\nabla\cdot\mathbf{u}+\rho\mathbf{b}=0,$$
$$\mu\frac{\partial u_i}{\partial x_j\partial x_j}+(\lambda+\mu)\frac{\partial u_j}{\partial x_i\partial x_j}+\rho b_i=0. \tag{29}$$

3.1.1 材料常数重要不等式

对材料弹性张量${}^*\mathbb{E}$的两个重要限制条件为二阶正定性(正定性)和M-正定性(强椭圆性), 因此我们首先介绍这两个条件下材料常数重要不等式.

根据应变能函数为正的物理限制:

$$\begin{aligned}\widetilde{W}(\widetilde{\mathbf{E}})&=\frac{1}{2}\widetilde{\mathbf{E}}:{}^*\mathbb{E}:\widetilde{\mathbf{E}}=\frac{1}{2}{}^*\mathbb{E}_{ijkl}\widetilde{E}_{ij}\widetilde{E}_{kl}\\&=\frac{1}{2}\lambda(\mathrm{tr}\widetilde{\mathbf{E}})^2+\mu\mathrm{tr}\widetilde{\mathbf{E}}^2\\&=\frac{1}{2}\lambda\widetilde{E}_{jj}\widetilde{E}_{kk}+\mu\widetilde{E}_{ij}\widetilde{E}_{ij}>0\end{aligned} \tag{30}$$

为弹性张量${}^*\mathbb{E}$的正定二次型. 可以得到三维空间中Lamé常数表示的经典不等式(Classical-Inequalities):

$$\mu>0,\ 3\lambda+2\mu>0. \tag{31}$$

或者以泊松比ν的形式写为

$$\mu>0,\ -1<\nu<1/2. \tag{32}$$

根据弹性张量${}^*\mathbb{E}$的强椭圆性得到S-E不等式:

$${}^*\mathbb{E}_{ijkl}a_ib_ja_kb_l>0,\forall a_i,b_i\neq 0\in\mathbb{R}^n. \tag{33}$$

由2.2节, 此时应变能函数为秩一凸函数. 在三维空间中Lamé常数表示的S-E不等式为

$$\mu>0,\ \lambda+2\mu>0. \tag{34}$$

或者以泊松比ν的形式写为

$$\mu>0,\ \nu<1/2\ 或\ \nu>1. \tag{35}$$

这两个不等式的物理含义可以见Truesdell[7]著作中第51节的内容以及文献[32,33].

除此之外, 还会常用到弹性张量的半正定性、(半)负定性以及强负椭圆性, 我们将其对应的三维各向同性弹性体中材料常数的不等式统计为表6, 而二维各向同性弹性体中材料常数的不等式统计为表7.

表 6 经典线弹性力学的材料参数不等式(三维)

Table 6 Inequalities of material constants in classical linear elasticity (three-dimension)

性质	弹性张量	三维Lamé常数	三维剪切模量与泊松比
正定性	${}^*\mathbb{E}_{ijkl}S_{ij}S_{kl}>0;\ \forall S_{ij}\neq 0\in\mathbb{S}^n$	$\mu>0,\ 3\lambda+2\mu>0$	$\mu>0,\ -1<\nu<1/2$
半正定性	${}^*\mathbb{E}_{ijkl}S_{ij}S_{kl}\geq 0;\ \forall S_{ij}\neq 0\in\mathbb{S}^n$	$\mu\geq 0,\ 3\lambda+2\mu\geq 0$	$\mu\geq 0,\ -1\leq\nu<1/2$
负定性	${}^*\mathbb{E}_{ijkl}S_{ij}S_{kl}<0;\ \forall S_{ij}\neq 0\in\mathbb{S}^n$	$\mu<0,\ 3\lambda+2\mu<0$	$\mu<0,\ -1<\nu<1/2$
半负定性	${}^*\mathbb{E}_{ijkl}S_{ij}S_{kl}\leq 0;\ \forall S_{ij}\neq 0\in\mathbb{S}^n$	$\mu\leq 0,\ 3\lambda+2\mu\leq 0$	$\mu\leq 0,\ -1\leq\nu<1/2$
强椭圆性	${}^*\mathbb{E}_{ijkl}a_ib_ja_kb_l>0;\ \forall a_i,b_i\neq 0\in\mathbb{R}^n$	$\mu>0,\ \lambda+2\mu>0$	$\mu>0,\ \nu<1/2$ 或 $\nu>1$
强负椭圆性	${}^*\mathbb{E}_{ijkl}a_ib_ja_kb_l<0;\ \forall a_i,b_i\neq 0\in\mathbb{R}^n$	$\mu<0,\ \lambda+2\mu<0$	$\mu<0,\ \nu<1/2$ 或 $\nu>1$

表 7 经典线弹性力学的材料参数不等式(二维)

Table 7 Inequalities of material constants in classical linear elasticity (two-dimension)

性质	弹性张量	二维Lamé常数	二维剪切模量与泊松比
正定性(强椭圆性)	${}^*\mathbb{E}_{ijkl}S_{ij}S_{kl}>0;\ \forall S_{ij}\neq 0\in\mathbb{S}^n$	$\mu>0,\ \lambda+2\mu>0$	$\mu>0,\ \nu<1/2$ 或 $\nu>1$
半正定性	${}^*\mathbb{E}_{ijkl}S_{ij}S_{kl}\geq 0;\ \forall S_{ij}\neq 0\in\mathbb{S}^n$	$\mu\geq 0,\ \lambda+2\mu\geq 0$	$\mu\geq 0,\ \nu<1/2$ 或 $\nu\geq 1$
负定性(强负椭圆性)	${}^*\mathbb{E}_{ijkl}S_{ij}S_{kl}<0;\ \forall S_{ij}\neq 0\in\mathbb{S}^n$	$\mu<0,\ \lambda+2\mu<0$	$\mu<0,\ \nu<1/2$ 或 $\nu>1$
半负定性	${}^*\mathbb{E}_{ijkl}S_{ij}S_{kl}\leq 0;\ \forall S_{ij}\neq 0\in\mathbb{S}^n$	$\mu\leq 0,\ \lambda+2\mu\leq 0$	$\mu\leq 0,\ \nu<1/2$ 或 $\nu\geq 1$

3.1.2 主要研究结论

由于经典的线弹性力学问题解的唯一性问题已有成熟的研究结果，Knops[5]专著以及Gurtin[6]专著对此做了详细的论述. 因此我们主要详述在这一问题研究历史上的两个重要方法和结论，并将其他重要结论以表格的形式给出.

在三维空间中的均质各向同性弹性体，其经典线弹性力学边值问题解的唯一性的完整的数学证明过程，由Kirchhoff[3]在1850年推导板壳方程时试图建立，并于1859年发表，这种证明方法也成为了后续研究的标准.

Kirchhoff解的唯一性定理：三维弹性体的经典线弹性混合边值问题，当材料的弹性张量满足正定性时，μ>0, 3λ+2μ>0, 至多存在一个经典解(位移解至多差别小的刚性位移).

假设存在两组解: $\boldsymbol{\sigma}_{(i)}, \widetilde{\mathbf{E}}_{(i)}, \mathbf{u}_{(i)}\ (i=1,2)$. 由于两组解在同样的载荷与边界条件下，两组解之差 $\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\sigma}_{(1)}-\boldsymbol{\sigma}_{(2)}$, $\widetilde{\mathbf{E}}=\widetilde{\mathbf{E}}_{(1)}-\widetilde{\mathbf{E}}_{(2)}$, $\mathbf{u}=\mathbf{u}_{(1)}-\mathbf{u}_{(2)}$满足下述方程组:

$$\begin{cases}\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla=0,\\ \widetilde{\mathbf{E}}=\dfrac{\mathbf{u}\otimes\nabla+\nabla\otimes\mathbf{u}}{2},\\ \boldsymbol{\sigma}=\lambda\operatorname{tr}(\widetilde{\mathbf{E}})\mathbf{I}+2\mu\widetilde{\mathbf{E}},\end{cases} \qquad (36)$$

$$\begin{cases}\mathbf{u}=\mathbf{0},(\partial_d\Omega),\\ \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{0},(\partial_t\Omega)\end{cases}$$

描述的为无体力和面力的混合边值问题. 因此, 此时的应变能为

$$W=\int_{\Omega}\widehat{W}(\widetilde{\mathbf{E}})\mathrm{d}V=\frac{1}{2}\int_{\Omega}\boldsymbol{\sigma}:(\mathbf{u}\otimes\nabla)\mathrm{d}V. \qquad (37)$$

根据高斯定理以及关系式:

$$(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{u})\cdot\nabla=\boldsymbol{\sigma}:(\mathbf{u}\otimes\nabla)+\mathbf{u}\cdot(\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}). \qquad (38)$$

式(37)积分有

$$\begin{aligned}W&=\frac{1}{2}\int_{\Omega}(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{u})\cdot\nabla-\mathbf{u}\cdot(\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma})\mathrm{d}V\\ &=\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}\underbrace{\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}}_{0}\mathbf{u}\mathrm{d}S-\int_{\Omega}\mathbf{u}\cdot\Big(\underbrace{\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}}_{0}\Big)\mathrm{d}V.\end{aligned} \qquad (39)$$

根据式(36)的边界条件，式(39)右端为0；当应变能为正, 即采用式(30)正定性条件的积分形式:

$$W=\int_{\Omega}\widehat{W}(\widetilde{\mathbf{E}})\mathrm{d}V=\frac{1}{2}\int_{\Omega}{}^{*}\mathbb{E}_{ijkl}\widetilde{E}_{ij}\widetilde{E}_{kl}\mathrm{d}V>0. \qquad (40)$$

若要式(40)为0成立，则必有$\widetilde{E}_{ij}$=0，进而根据本构方程得到σ_{ij}=0，根据几何方程可以将位移场确定为一个刚性位移的范围内. 如果位移边界条件不允许有刚性位移, 此时可以得到位移场是唯一的. 事实上, 采用的积分形式(式(40))是比正定性(式(30))更弱一点的限制条件.

在正定性条件下，Kirchhoff唯一性定理可以推广至纯位移边值问题和纯力边值问题. 对于各向同性的常规材料，实验结果表明两个Lamé常数总是满足λ>0, μ>0. 因此Kirchhoff解的唯一性定理是应用最广泛的，如弹性力学教程中此结果的证明[34,35]. 但在数学上不难发现，当材料的弹性张量满足负定时，解的唯一性依旧成立. 因此可以将对材料常数的限制放松至不等式:

$$\mu(3\lambda+2\mu)>0\ \text{或者}\ \mu\neq0,\ -1<\nu<1/2. \qquad (41)$$

式(41)也被称为经典线弹性力学混合边值问题解的唯一性成立的经典充分条件.

除了考虑解的唯一性的充分条件，考虑其必要性条件也是研究的重要内容. 在1898–1901年，Cosserat等人[36,37]发表了一系列关于经典线弹性力学位移边值问题解的唯一性的文章，给出了进一步放松的充分条件，并在1901年给出了$-\infty<\nu<-1$条件下纯力边值问题不满足解的唯一性的反例[37].

Cosserat唯一性定理: 三维弹性体的经典线弹性的纯位移边值问题，当材料的弹性张量满足强椭圆性时，μ>0, λ+2μ>0, 至多存在一个经典解.

采用Kirchhoff的证明方法, 假设存在两组解, 对于位移边值问题，此时两组解的差对应的方程组描述的为无体力的位移边值问题，此时的势能可以表示为应变能, 根据Kelvin的方法[38]有

$$\begin{aligned}I&=W-\int_{\Omega}\mathbf{b}\cdot\mathbf{u}\mathrm{d}V=\int_{\Omega}\widehat{W}(\widetilde{\mathbf{E}})\mathrm{d}V\\ &=\frac{1}{2}\int_{\Omega}\Big(\lambda\operatorname{tr}^2\widetilde{\mathbf{E}}+2\mu\operatorname{tr}\widetilde{\mathbf{E}}^2\Big)\mathrm{d}V=0,\end{aligned} \qquad (42)$$

其中，$\operatorname{tr}\widetilde{\mathbf{E}}^2=\widetilde{\mathbf{W}}:\widetilde{\mathbf{W}}+\mathbf{u}\otimes\nabla:\nabla\otimes\mathbf{u}$；首先根据任意标

量φ、矢量$\mathbf{v}$、张量$\mathbf{S}$的两个运算规则:

$$\begin{aligned}&\mathrm{div}(\varphi\mathbf{v})=(\varphi\mathbf{v})\cdot\nabla=\varphi(\mathbf{v}\cdot\nabla)+\mathbf{v}\cdot(\nabla\otimes\varphi),\\&\mathrm{div}(\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{v})=\mathbf{S}:(\mathbf{v}\otimes\nabla)+\mathbf{v}\cdot(\mathbf{S}\cdot\nabla),\end{aligned}\tag{43}$$

得到

$$\begin{aligned}&\mathbf{u}\otimes\nabla:\nabla\otimes\mathbf{u}\\&\quad=\mathrm{div}[(\mathbf{u}\otimes\nabla)\cdot\mathbf{u}]-\mathbf{u}\cdot(\nabla\otimes\mathbf{u}\cdot\nabla)\\&\quad=\underbrace{\mathrm{div}[(\mathbf{u}\otimes\nabla)\cdot\mathbf{u}]-\mathrm{div}[(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}]}_{0}\\&\qquad+(\mathbf{u}\cdot\nabla)(\mathbf{u}\cdot\nabla).\end{aligned}\tag{44}$$

代入积分有

$$\int_\Omega\mathbf{u}\otimes\nabla:\nabla\otimes\mathbf{u}\mathrm{d}V=\int_\Omega\mathrm{tr}^2\widetilde{\mathbf{E}}\mathrm{d}V.\tag{45}$$

则式(42)简化为

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{2}\int_\Omega\Big[\lambda\,\mathrm{tr}^2\widetilde{\mathbf{E}}+2\mu\Big(\widetilde{\mathbf{W}}:\widetilde{\mathbf{W}}+\mathbf{u}\otimes\nabla:\nabla\otimes\mathbf{u}\Big)\Big]\mathrm{d}V\\&=\frac{1}{2}\int_\Omega[(\lambda+2\mu)\mathrm{tr}^2\widetilde{\mathbf{E}}+2\mu\widetilde{\mathbf{W}}:\widetilde{\mathbf{W}}]\mathrm{d}V.\end{aligned}\tag{46}$$

因此, 当参数满足强椭圆条件$\mu>0$, $\lambda+2\mu>0$时, 对比式(42)和(46), 两组解之差对应的势能为0的条件等价于应变的第一不变量(迹)为零且旋转为零. 同样当$\mu<0$, $\lambda+2\mu<0$时, 证明结果依旧是成立的, 即此时的条件可以合并表示为[39]

$$\mu(\lambda+2\mu)>0,\ \text{或}\ \mu\neq0,\ \nu<1/2\ \text{或}\ \nu>1.\tag{47}$$

在Cosserat唯一性定理的基础上, 通过举证反例的方式, 得到式(47)这一合并不等式是纯位移边值问题解的唯一性成立的充分必要条件. 进一步, Edelstein和Fosdick[40]在1968年给出了混合边值问题解的唯一性成立的必要条件为$\mu\neq0$, $-1\le\nu\le1/2$. 将经典线弹性力学的位移-力边值问题解的唯一性的研究结论列在表8[41–44]中.

表8中力边值问题经典解的唯一性成立的充要条件的研究结论由Truesdell等人[45]在其著作的第51节给出: 在光滑区域与光滑边界下, 其充要条件为$-1<\nu<1$. 对于必要性的研究, Edelstein和Fosdick[40]通过举反例的方法给出必要条件为$-1\le\nu<1$. 近年针对力边值问题充分条件的研究结论主要有两方面: (1) 弹性张量的限制条件不能由正定条件和负定条件放松至椭圆条件[46]; (2) 放松区域和力边界的光滑性限制条件是解的唯一性定理. Russo等人[47–49]给出在弹性张量满足式(41)时解的唯一性成立的充分条件:

$$\begin{aligned}&\int_{\partial\Omega_0}\mathbf{t}\mathrm{d}s=\mathbf{0},\ \int_{\partial\Omega_0}\mathbf{z}\times\mathbf{t}\mathrm{d}s=0,\ \mathbf{z}\in\partial\Omega;\\&\partial\Omega\in C^3,\ \mathbf{t}\in C^0(\partial\Omega_0).\end{aligned}\tag{48}$$

在此基础上, Coscia和Starita[50]将结果扩展至边界的光滑性$\partial\Omega_0\in C^{2+\alpha}$, $\alpha>0$.

除常规材料之外, 新型材料或者超材料逐渐在工程上得以应用. 对于给定材料的弹性体, 即其材料(等效)弹性张量已知, 弹性边值问题经典解是否唯一可通过唯一性成立的必要条件判断.

问题1 三维经典线弹性理论中纯力边值问题, 其经典解的唯一性成立的必要条件是否仍待证明? 证实或证否其充分必要条件为$\mu\neq0$, $-1\le\nu<1/2$.

3.2 一般线弹性理论中解的唯一性定理

除去3.1节中的经典结论, 一般线弹性问题的解的唯一性定理主要在以下方面.

(1) 经典线弹性动力学的初边值问题: 对于表5给

表 8 经典线弹性力学位移-力边值问题的解的唯一性定理

Table 8 The uniqueness theorems of solutions to the displacement-traction boundary-value problems in classical linear elasticity

问题	限制条件	条件关系
混合边值问题	$\mu>0,\ -1<\nu<1/2$	充分条件[3]
	$\mu\neq0, -1\le\nu\le1/2$	充要条件[40]
纯位移边值问题	$\mu>0,\ \nu<1/2$ 或 $1<\nu$	充分条件[36]
	$\mu\neq0,\ -\infty\le\nu\le1/2,\ 1<\nu\le\infty$	充要条件[41–44]
纯力边值问题	$\mu\neq0,\ -1<\nu<1/2$	充分条件[3]
	$-1\le\nu<1$	必要条件[7,37,40]

出的位移-力边值问题, 在动力学的初边值问题中经典解的唯一性.

(2) 弹性体所占区域: 无界域(Unbound Domain)与外区域(Exterior Domain) $\Omega=\mathbb{R}^n\setminus\overline{\Omega'}$.

(3) 解的类型: 经典解与变分解(弱解).

(4) 二维问题: 二维平面问题.

(5) 材料性质: 非均质性(弹性张量与物质点有关)、均质但各向异性(弹性张量为常张量).

(6) 边界条件: 接触问题.

结合文献[5,51,52]中已有的经过验证的解的唯一性定理, 通过对以上6个方面现存问题的讨论, 下面将结果和研究进展进行总结.

将弹性体所占区域扩展到无界/外区域, 对于线弹性力学边值问题, 需要添加无穷远处的给定条件. 利用Kirchhoff方法假设存在两组解, 且两组解之差$\mathbf{u}=\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2$满足下列的基本方程和边界条件.

1) 有界区域:

$$\begin{aligned}&\operatorname{div}^*\mathbb{L}(\mathbf{u}\otimes\nabla)=\mathbf{0},\ \text{在}\ \Omega\ \text{上},\\ &D(\mathbf{u})=\mathbf{0},\ \text{在}\ \partial\Omega\ \text{上},\end{aligned}\tag{49}$$

其中, 边界条件$D(\mathbf{u})$考虑表2中的位移边界、力边界、弹性边界和接触边界条件.

2) 外区域($\Omega=\mathbb{R}^n\setminus\overline{\Omega'}$)或无界域: 增加无穷远处的条件

$$\mathbf{u}=o(1).\tag{50}$$

除了经典解, 由2.2节总能量的E-L方程得到解$\mathbf{u}\in W^{1,2}(\Omega)=H^2(\Omega)$, 其中$W^{1,2}(\Omega)$为索伯列夫空间(Sobolev Space), $H^2(\Omega)$为希尔伯特空间(Hilbert Space). 在容许变形集合在$\mathbf{u}$处的切空间中的任意向量$\mathbf{v}:\overline{\Omega}\to\mathbb{R}^n$, 有$I'(\mathbf{u})\mathbf{v}=\mathbf{0}$, 即

$$W'(\mathbf{u})\mathbf{v}=B'(\mathbf{u})\mathbf{v}+T'(\mathbf{u})\mathbf{v},\tag{51}$$

其中,

$$\begin{aligned}&W'(\mathbf{u})\mathbf{v}=\int_\Omega{}^*\mathbb{L}(\mathbf{u}\otimes\nabla):(\mathbf{v}\otimes\nabla)\mathrm{d}v,\\ &B'(\mathbf{u})\mathbf{v}+T'(\mathbf{u})\mathbf{v}=\int_\Omega\mathbf{b}\cdot\mathbf{v}\mathrm{d}v+\int_{\partial_t\Omega}\mathbf{t}\cdot\mathbf{v}\mathrm{d}s.\end{aligned}\tag{52}$$

$\mathbf{v}$在位移边界$\partial_d\Omega$处趋于零.

对于第(1)方面, 将线弹性动力学问题的经典解的唯一性结论列于表9中. Neumann[4]给出了各向同性弹性体混合初边值问题解的唯一性的充分条件: 弹性张量满足正定条件; Gurtin等人[53,54]给出各向同性弹性体和各向异性弹性体位移初边值问题解的唯一性的充要条件: 弹性张量满足强椭圆条件; 在无界域或外区域上, Wheeler和Sternberg[55]给出了各向同性弹性体混合初边值问题, 弹性张量满足正定条件时解的唯一性定理; 而后Wheeler[56]将此结论扩展到各向异性弹性体.

工程和日常广泛应用的材料具有多样性, 多呈现出非各向同性或者非均质性. 一方面, 在工程中研究材料的弹性参数, 如从微观和宏观角度对材料力学性能的测量[57,58], 发展多孔介质材料的弹性模量测量方法[59]等; 另一方面, 在数学弹性理论上需对一般线弹性力学的求解以及所得解的唯一性进行研究. 在理论上对非各向同性材料的定解问题解满足唯一性成立的充分必要条件进行研究, 可方便工程上的直接判断.

对于线弹性平衡问题的其他方面, 将各向同性弹性体的边值问题中解的唯一性总结为表10[60–66]. 将均质各向异性弹性体和非均质弹性体的边值问题中解的唯一性结论总结为表11[67–73].

对于有界域中三维问题, 均质各向异性弹性体, 材料的弹性张量满足正定性, 则在局部可积的索伯列夫

表 9 线弹性动力学初边值问题中解的唯一性定理

Table 9 The uniqueness theorems of solutions to the initial-boundary-value problems in linear elastodynamics

动力学(初边值)问题	限制条件	条件关系
混合边值问题	(1) 密度$\rho>0$且连续; (2) 对称性${}^*\mathbb{L}_{ijkl}={}^*\mathbb{L}_{jikl}={}^*\mathbb{L}_{klij}$; (3) 半正定性${}^*\mathbb{L}_{ijkl}S_{ij}S_{kl}\geq0$	一般线弹性体经典解充分条件[4]
纯位移边值问题	$\rho>0$; 椭圆性${}^*\mathbb{L}_{ijkl}a_ib_ja_kb_l\geq0$	均质弹性体经典解充要条件[53,54]
无界域混合边值问题	(1) 密度$\rho>0$且连续; (2) 大对称性与正定性; (3) ${}^*\mathbb{L}_{ijkl}$和ρ^{-1}连续且有界	无界域经典解充分条件[55,56]

表 10　各向同性线弹性力学中其他解的唯一性

Table 10　Other uniqueness theorems of solutions in isotropic linear elasticity

均质各向同性弹性体线弹性问题	限制条件	条件关系
混合边值问题	$\mu \neq 0,\ \nu \in (-\infty, 1/2)$	二维平面应变 经典解充分条件[5]
	$\mu > 0,\ 3\lambda + 2\mu > 0$	内部载荷问题 经典解充分条件[6,55]
	(1) 弹性张量正定性 ${}^{*}\mathbb{E}_{ijkl}S_{ij}S_{kl} > 0$ (2) 位移条件 $\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 = o(1);\ \mathbf{r} \to \infty$ (3) 应力条件 $\boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_2 = o(1);\ \mathbf{r} \to \infty$	三维外区域经典解充分条件[6] (仅有条件(1)和(2) [60]或(1)和(3) [61], 以及二维外区域相同问题[59,60]仍成立)
纯位移边值问题	$\mu \neq 0,\ \nu \in [-\infty, 1/2] \cup (1, \infty]$	二维平面经典解充要条件[44] (充分性[63]和必要性[41,42])
	(1) 弹性张量正定性 (2) 位移边界值连续 $\bar{\mathbf{u}} \in C^0(\partial\Omega_0)$ (3) 无穷远处的相容条件 $\langle {}^{*}\mathbb{E}(\mathbf{h}_0 \otimes \nabla), \bar{\mathbf{u}} \rangle = \mathbf{u}_\infty$ (4) 位移解范围 $\mathbf{u} \in \{\mathbf{v}, \mathbf{v} = o(\log r)\}$	二维外区域 变分解的充分条件[64]
纯力边值问题	$\mu \neq 0,\ -1 < \nu < 1$	不同形状弹性体 经典解充分条件[5,65,66]
	(1) 力边界连续 $\bar{\mathbf{t}} = C(\partial\Omega)$ (2) 弹性体所占域 $\Omega \in C^3$ (3) 正定性: $\mu > 0, \lambda + 2\mu > 0$	二维外区域$\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega'}$ 经典解充分条件[64]
	$\mu \neq 0,\ \nu \neq 1$	二维问题经典解必要条件[63]

空间$W_{\mathrm{loc}}^{1,2}(\Omega)$上的位移解(变分解)唯一[48]. 此时对纯位移边界, 在均质弹性体中可以将充分条件放松到强椭圆性; 在更一般的非均质弹性体中, 当弹性张量与某个各向同性弹性张量${}^{*}\mathbb{E}_0$接近, 即$\|{}^{*}\mathbb{L} - {}^{*}\mathbb{E}_0\|_{L^\infty(\Omega)} < \gamma_1$时, 可同样将充分条件放松至强椭圆性.

问题2　在有界域三维线弹性理论中, 均质各向异性弹性体, 材料的弹性张量满足强椭圆性条件是否为纯位移边值问题变分解满足唯一性的必要条件? 材料的弹性张量满足正定性条件是否为纯力边值和混合边值问题变分解的唯一性的必要条件?

对于有界域中二维问题, 均质各向同性弹性体, 位移边值问题的经典解的唯一性充要条件: 满足 $\mu \neq 0$, $\nu \in [-\infty, 1/2] \cup (1, \infty]$; 混合位移-力边值问题的解的唯一性充分条件$\mu \neq 0$, $\nu \in (-\infty, 1/2)$和力边值问题的解的必要条件为$\mu \neq 0$, $\nu \neq 0$.

问题3　在有界域二维线弹性理论中, 均质各向同性弹性体, 弹性张量满足正定性是否是混合边值和力边值问题的解的唯一性的充分必要条件?

在无界域上, 如半空间上, 无界的弹性体的弹性力学问题在工程上有着重要的应用, 如水坝、地基、地下井等应力分析. 对于外区域、无界域或者半空间中非均质弹性体, 增加无穷远处边界条件, 建立位移边值问题的方程:

$$\mathrm{div}\,{}^{*}\mathbb{L}(\mathbf{u} \otimes \nabla) + \rho\mathbf{b} = \mathbf{0},\ \text{在}\ \Omega_0\ \text{上}, \tag{53a}$$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}},\ \text{在}\ \partial_d\Omega_0\ \text{上}, \tag{53b}$$

$$\lim_{r \to \infty} \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_0. \tag{53c}$$

其变分解存在性的充分条件[74]: 弹性张量${}^{*}\mathbb{L}$满足一致正定的条件下, 即对任意对称二阶张量$\mathbf{L}$满足

$$\alpha \mathbf{L}^2 \le \mathbf{L} : {}^{*}\mathbb{L}(\mathbf{L}) \le \beta \mathbf{L}^2,\ \exists \alpha, \beta > 0. \tag{54}$$

对于各向同性弹性体, 在三维上为$\mu>0$, $3\lambda+2\mu>0$, 在二维上为$\mu>0$, $\lambda+2\mu>0$. 同时有解的唯一性的经典结论: 若位移边界值满足$\bar{\mathbf{u}} \in W^{1/2,2}(\partial\Omega)$, 即在$W^{1,2}(\Omega)$的迹空间(Trace Space)上, 则在空间$W_{\mathrm{loc}}^{1,2}(\Omega)$中存在一个变分解, 而其解在集合$\{\mathbf{u} \in W_{\mathrm{loc}}^{1,2}(\Omega),\ \mathbf{u}^2 = O(\log r)\}$上满足

表 11 一般线弹性理论中解的唯一性定理

Table 11 The uniqueness theorems of solutions in linear elasticity

问题		限制条件	条件关系
均质各向异性弹性体	混合边值问题	正定性	外区域在 $W^{1,\,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$空间变分解充分条件[48]
	位移边值问题	强椭圆性	有界域/外区域在$W^{1,\,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$空间变分解充分条件[67]
非均质弹性体	力边值问题	正定性	有界域变分解充分性[48]
		正定性且$\mathbf{u}\in\{\mathbf{v}:\mathbf{v}=o(r)$ **或** $\mathbf{v}\otimes\nabla=o(1)\}$	无界域/半空间变分解充分条件[49,68] (二维[69])
	混合边值问题	(1) 正定性 (2) 存在常弹性张量$^*\mathbb{L}_0$满足强椭圆性且$^*\mathbb{L}-{}^*\mathbb{L}_0=o(\mathbf{1})$ (3) 范围$\{\mathbf{u}\in W^{1,\,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega):\ \mathbf{u}=O(r^{-\varepsilon})\},\varepsilon>0$	外区域变分解充分条件[48]
	位移边值问题	(1) 强椭圆性 (2) 存在各向同性张量$^*\mathbb{E}_0$且满足$\Vert{}^*\mathbb{L}-{}^*\mathbb{E}_0\Vert_{L^\infty(\Omega)}<\gamma_1$	有界域变分解充分条件[48]
		(1) 正定性 (2) 范围$\{\mathbf{u}\in W^{1,\,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega),\mathbf{u}^2=O(\log r)\}$	无界域变分解充分条件[70–72]
		(1) 正定性 (2) 存在正数β依赖于边界 (3) 范围$\{\mathbf{u}\in W^{1,\,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega):\ \mathbf{u}^2=O(\log^{1+1/\beta}r)\}$	二维外区域变分解充分条件[64]
		(1) 正定条件 (2) 位移边界条件$\bar{\mathbf{u}}\in W^{1/2,\,2}(\partial\Omega_0)$ (3) 无穷远处存在$\lim\limits_{\mathbf{x}\to\infty}\mathbf{u}(\mathbf{x})=\mathbf{u}_\infty$	二维外Lipschitz域式(53a)和(53b)变分解充分条件[73]

唯一性[70–72].

在此基础上的二维外区域问题上，Tartaglione[64]给出定理：若$\Omega\in C^3$, 弹性张量满足正定性, 在变形集合$\{\mathbf{u}\in W^{1,\,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega):\ \mathbf{u}^2=O(\log^{1+1/\beta}r)\}$上至多一个变分解. 其中正数$\beta$依赖于边界$\partial\Omega$.

Russo和Simader[73]对Lipschitz域上弹性体且无穷远处的位移条件为$\lim\limits_{r\to\infty}\mathbf{u}(\mathbf{x})=\mathbf{u}_\infty$时，给出定理：弹性张量满足正定性，位移解存在的充分必要相容条件为$\langle{}^*\mathbb{E}(\mathbf{h}_0\otimes\nabla)\mathbf{n},\ \bar{\mathbf{u}}\rangle=\mathbf{u}_\infty$，此时存在方程(53a)和(53b)的唯一解. 其中$\mathbf{h}_0$为方程(53a)的解且满足在边界$\partial\Omega$上为零，$\mathbf{h}_0\otimes\nabla\in L^2(\Omega)$，$\mathbf{n}$为边界的单位外法线矢量.

对于外区域、无界域或者半空间中弹性体的力边值问题的力边界条件为:

$$^*\mathbb{E}(\mathbf{u}\otimes\nabla)\mathbf{n}=\mathbf{t},\ \partial_t\Omega=\partial\Omega. \tag{55}$$

Tartaglione[64]给出均质且各向同性弹性体的解的唯一性定理：若$\Omega\in C^3$且弹性张量满足正定条件，给定力边界连续$\mathbf{t}=C^0(\partial\Omega)$，则存在唯一的经典解. Crisci[69]证明了非均质弹性体在弹性张量满足正定性时的解的唯一性定理.

问题4 在无界域二维线弹性理论中, 经典位移-力边值问题解的取值形式与无穷远处的边界条件相容, 构造解的位移范围内，弹性张量满足正定性是否是解的唯一性的充要条件?

在无界域三维问题中, 对于均质弹性体, 弹性张量若满足正定性，则$W^{1,\,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$上有唯一解；对于单纯的位移边界，条件可以放松为强椭圆条件. 对于非均质弹性体，在弹性张量正定的条件下，仍然需要附加对弹性张量的进一步限制和位移解的限定范围, 如

$$\{\mathbf{u}\in W^{1,\,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega),\mathbf{u}^2=O(\log r)\}.$$

问题5 在无界域三维线弹性理论中, 非均质弹性体, 弹性张量满足正定性是否是$W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$上有唯一解的必要条件?

3.3 线弹性力学接触边界值问题解的唯一性定理

根据表2和5, 可建立线弹性理论中接触边界问题的基本提法. Gurtin[6]给出了第一类接触边界问题, 在弹性张量正定条件下的解的唯一性.

Fosdick等人[46]在2007年研究了均质各向同性弹性体在强椭圆条件下的一类接触边界问题(Mixed-mixed Problem)的解的唯一性定理: 将边界划分为$\partial_i\Omega$ (i=1, 2, 3), 且根据边界上位移和面力的分解情况有

$$\begin{aligned}&\operatorname{div}^*\mathbb{E}(\mathbf{u}\otimes\nabla)+\rho\mathbf{b}=\mathbf{0},\ \text{在}\ \Omega\ \text{上},\\&\partial_1\Omega:\ \ \mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}},\\&\partial_2\Omega:\ \ \mathbf{u}_\tau=\bar{\mathbf{u}}_\tau(\mathbf{X}),\ \mathbf{t}\cdot\mathbf{n}=\bar{t}(\mathbf{X}),\\&\partial_3\Omega:\ \ \mathbf{u}\cdot\mathbf{n}=\bar{u}(\mathbf{X}),\ \mathbf{t}_\tau=\bar{\mathbf{t}}_\tau(\mathbf{X}),\end{aligned}\tag{56}$$

其中, 构形表面$\partial\Omega$的外法线方向为$\mathbf{n}$, 其第二基本型(Weingarten张量)为$\mathbf{K}=\mathbf{K}^{\mathrm{T}}=-\mathrm{grad}_s\mathbf{n}(\mathbf{X})$. 曲面的平均曲率为$\mathrm{tr}\mathbf{K}/2=(\lambda_1+\lambda_2)/2$, 其中$\lambda_i$ (i=1, 2)是$\mathbf{K}$的特征值, 为曲面在某点的主曲率. 在强椭圆条件下, 解的唯一性与弹性体表面的几何性质有关: 若$\partial_2\Omega$的任意点都有平均曲率$\mathrm{tr}\mathbf{K}(\mathbf{X})>0$, 且$\partial_3\Omega$上任意点$\mathbf{K}(\mathbf{X})$正定, 此时问题(56)的位移解若存在, 则是唯一的; 如果$\partial_2\Omega$的任意点都有平均曲率$\mathrm{tr}\mathbf{K}(\mathbf{X})\geq0$; 且$\partial_3\Omega$上任意点$\mathbf{K}(\mathbf{X})$半正定, 当弹性体为单联通时, 问题(56)的位移解若存在, 则是唯一的.

Russo和Tartaglione[75]将这一结果扩展到外区域上, 并针对弹性静力学的一类接触问题($\partial_3\Omega=\partial\Omega$)与其对偶问题($\partial_2\Omega=\partial\Omega$)进行讨论, 给出在强椭圆条件与几何条件下的更严格的解的唯一性. 当$\partial_3\Omega=\partial\Omega$时的基本方程和边界条件:

$$\begin{aligned}&\operatorname{div}^*\mathbb{E}(\mathbf{u}\otimes\nabla)+\rho\mathbf{b}=\mathbf{0},\ \text{在}\ \Omega\ \text{上},\\&[{}^*\mathbb{E}(\mathbf{u}\otimes\nabla)\mathbf{n}]_\tau=\bar{\mathbf{t}}_\tau,\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{n}=\bar{u},\ \text{在}\ \partial\Omega\ \text{上},\\&\lim_{r\to\infty}\mathbf{u}(\mathbf{x})=\mathbf{u}_0.\end{aligned}\tag{57}$$

弹性体光滑$\Omega\in C^\infty$且弹性张量满足强椭圆条件, 即$\mu>0$, $\lambda+2\mu>0$. 采用Kirchhoff的反证法, 假设存在两组解且两解之差$\mathbf{u}$满足

$$\begin{aligned}&\operatorname{div}^*\mathbb{E}(\mathbf{u}\otimes\nabla)=\mathbf{0},\ \text{在}\ \Omega\ \text{上},\\&[{}^*\mathbb{E}(\mathbf{u}\otimes\nabla)\mathbf{n}]_\tau=\mathbf{0},\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}=0,\ \text{在}\ \partial\Omega\ \text{上},\\&\mathbf{u}(\mathbf{x})=o(r).\end{aligned}\tag{58}$$

此时有解的唯一性定理: 若$\partial\Omega$上任意点张量$\mathbf{K}(\mathbf{X})$正定, 且方程的两组位移解之差为$\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2=o(1)$, 此时位移解$\mathbf{u}_1=\mathbf{u}_2$, 即解是唯一的; 若$\partial\Omega$上任意点$\mathbf{K}(\mathbf{X})$半正定且弹性体为单联通, 方程的两组位移解之差为$\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2=o(1)$, 此时位移解唯一.

对于均质但各向异性弹性体的一类接触问题(不含体力):

$$\operatorname{div}^*\mathbb{L}(\mathbf{u}\otimes\nabla)=\mathbf{0},\ \text{在}\ \Omega\ \text{上},\tag{59a}$$

$$[{}^*\mathbb{L}(\mathbf{u}\otimes\nabla)\mathbf{n}]_\tau=\bar{\mathbf{t}}_\tau,\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{n}=\bar{u},\ \text{在}\ \partial\Omega\ \text{上},\tag{59b}$$

$$\lim_{r\to\infty}\mathbf{u}(\mathbf{x})=\mathbf{u}_0.\tag{59c}$$

Russo和Tartaglione[76]给出了更加严格的解的唯一性定理: 当弹性张量${}^*\mathbb{L}$对任意的对称张量满足正定性$\mathbf{L}:{}^*\mathbb{L}(\mathbf{L})\geq\varepsilon\mathbf{L}^2$, 且有界. 若给定边界分别属于$\bar{u}\in W^{1/2,2}(\partial\Omega)$, $\bar{\mathbf{t}}_\tau\in W^{-1/2,2}(\partial\Omega)$, 则式(59a)和(59b)存在变分解$\mathbf{u}\in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\bar{\Omega})$, 在均匀索伯列夫空间$D^{1,2}(\Omega)$上有唯一的变分解; 存在一个依赖于$\Omega$的常数$c_k(\Omega)$, 位移解在一类解$\mathcal{M}$上唯一:

$$\mathcal{M}=\{\mathbf{u}\in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\bar{\Omega}):|\mathbf{u}|^2=o(r^{-1+\beta})\},\ \beta=\frac{\varepsilon}{2c_k\varepsilon_0}.$$

当$\partial_2\Omega=\partial\Omega$时, 而式(55)的对偶问题的基本方程和边界条件:

$$\begin{aligned}&\operatorname{div}^*\mathbb{E}(\mathbf{u}\otimes\nabla)+\rho\mathbf{b}=\mathbf{0},\ \text{在}\ \Omega\ \text{上},\\&\mathbf{n}\cdot[{}^*\mathbb{E}(\mathbf{u}\otimes\nabla)\mathbf{n}]=\bar{t},\ \mathbf{u}_\tau=\bar{\mathbf{u}}_\tau,\ \text{在}\ \partial\Omega\ \text{上},\\&\lim_{r\to\infty}\mathbf{u}(\mathbf{x})=\mathbf{u}_0,\end{aligned}\tag{60}$$

同样根据两组解之差, 有解的唯一性定理: 在强椭圆条件下, 若$\partial\Omega$上任意点平均曲率$\mathrm{tr}\mathbf{K}(\mathbf{X})>0$, 方程的两组位移解之差为$\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2=o(1)$, 此时位移解$\mathbf{u}_1=\mathbf{u}_2$, 即解是唯一的; 若$\partial\Omega$上任意点平均曲率$\mathrm{tr}\mathbf{K}(\mathbf{X})\geq0$, 且弹性体为单联通, 此时方程的解是唯一的.

接触边界在工程上具有重要应用, 由此引起的变形和应力分析对于如齿轮、滚珠轴承等的设计和计算十分重要. 对线弹性力学接触边界值问题解的唯一性进行研究, 是线弹性力学数学理论的重要内容, 也是将弹性理论适用于工程设计和计算的保证.

问题6 在有界域三维线弹性理论的接触问题中, 均质但各向异性弹性体与非均质弹性体在相同的几何条件下, 弹性张量正定性是解的唯一性的充分条件吗?

问题7 在无界域三维线弹性理论的接触问题中, 均质但各向异性弹性体在弹性张量满足正定性条件时, 考虑无穷远处边界条件的相容性, 解是否满足唯一性时的取值范围?

4 非线性弹性理论中的解的唯一性定理

由本构方程、场方程以及边界条件形成的弹性理论应能够预测一个特定物理问题的答案. 由第3节可知, 这种确定性对于特殊材料可以通过解的存在唯一性定理证明. 在小变形和线性弹性关系的假设下, 建立的弹性理论并不能描述和解决所有材料的问题. 因此除非必要情况下的简化, 更多情况需要讨论一般的非线性理论, 并讨论其数学性质. 非线性理论旨在预测一类范围更小的、确定的材料力学行为, 即局部解的唯一性.

对于三维弹性理论的位移-力边值问题, 其方程呈现出非线性, 主要包括有限变形的几何非线性、物理关系(即本构关系)的非线性、其他限制条件的非线性以及平衡方程的非线性(拟线性), 如表12所示.

三维非线性弹性问题存在解的非唯一性使得构造的数学模型应该容许存在多解的可能, 这也是非线性弹性理论的重要内容和基本难题. 对局部解的唯一性定理的限制包括位移变化范围的限制, 或者对应变能或势能的限制. 这些限制条件决定了证明解的唯一性定理的常用方法: 第一种方法为应力应变关系在原点附近邻域内的隐函数定理(Implicit Function Theorem); 而第二种方法为通过总能量极小值点的唯一性(局部和全局)来证明.

4.1 三维弹性理论的解的非唯一性例子

非线性纯位移边值问题、纯力边值问题和混合边值问题中都存在非唯一解的例子, 例子的总结可以参照文献[10,77,78], 在此给出三种位移-力边值问题典型的解的非唯一性的例子.

(1) 纯位移边值问题(图1)

考虑一个二维圆环, 其内部边界条件为$\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$, 外部边界围绕中心轴旋转π. 满足此条件的第一种变形与第二种变形如图1所示, 且两种变形的内部变形和应力不同. 此反例由John[79,80]在1972年给出, 而后证明在三维上此反例依旧成立[81].

(2) 纯力边值问题(图2)

1) 考虑力边界条件为零面力的半球形薄壳, 其本身的恒等变换为第一种平衡解, 将球壳外翻为第二种解. 两种解具有不同的变形和应力状态. 这一例子由Armanni[82]在1915年给出, 其他相关内容见文献[83–85], 与此例子类似有橡胶圆管的翻转[86–90].

2) 考虑二维板受到相同的面力条件, 而两种不同的加载方式可导致拉伸与压缩两种解[88,91–93].

(3) 混合位移-力边值问题(图3)

1) 一个杆件侧面受到的面力为零, 其中一端位移固定, 另一端受到足够大的压缩载荷时, 则可以存在无数多解[88,91,94,95].

2) 一个杆件侧面受到的面力为零, 两端的位移固定; 若其中一端绕中心轴旋转2π整数倍引起的变形是满足边界条件的无限多解[16,96].

4.2 从本构关系出发(隐函数法)

为了消除有限变形中几何非线性与物理非线性的

表 12 三维弹性理论中的非线性

Table 12 The non-linearities in three-dimensional elasticity theory

非线性分类	数学表达
几何关系	应变$\mathbf{E} = (\mathbf{H} + \mathbf{H}^{\mathrm{T}} + \mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{H})/2$是位移$\mathbf{u}$的非线性函数
应力响应关系	$\mathbf{T} = \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{X}, \mathbf{E})$以及$\mathbf{P}=\mathbf{FT}$是应变$\mathbf{E}$的非线性函数
限制条件	保方向性、不可压缩条件、单射及其他条件是$\mathbf{x}$的非线性函数
拟线性平衡方程	$\dfrac{\partial P_{ij}}{\partial F_{kl}}\dfrac{\partial^2 x_k}{\partial X_l \partial X_j} + \dfrac{\partial P_{ij}}{\partial X_j} + \rho_0 b_i = 0$ 最高阶导数为线性的

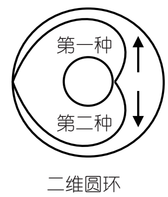

图 1 纯位移边值问题的解的非唯一性
Figure 1 The non-uniqueness of solutions in the displacement boundary-value problem.

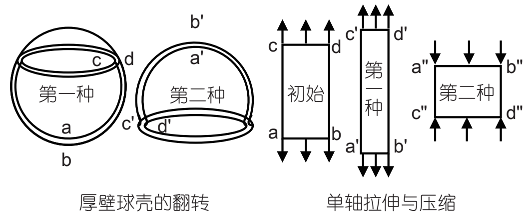

图 2 纯力边值问题的解的非唯一性
Figure 2 The non-uniqueness of solutions in the traction boundary-value problem.

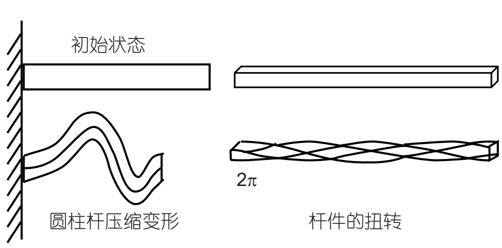

图 3 混合位移-力边值问题的解的非唯一性
Figure 3 The non-uniqueness of solutions in the displacement-traction boundary-value problem.

影响, 在小范围内将变形线性化或者有限变形下线性化本构关系, 是对非线性弹性理论解的数学性质进行研究的最直接方式.

4.2.1 Signorini解的唯一性定理和Stoppelli解的存在唯一性定理

三维弹性理论的数学分析中一个划时代工作是Signorini[97–99]对有限变形的研究工作. 将作用力表示为单参数ε的解析函数, 给出了参考构形上作用力的相容条件; 通过摄动方法构造出用参数表述的位移解, 用隐函数法证明了一类纯力边值问题解的唯一性. 而后Stoppelli[100–103]在1954–1957年采用无限小应变来近似表示有限应变, 证明了一类力边值问题解的局部存在与唯一性定理, 也可见Buren[104]的论文.

Signorini[100–103]证明方法的详解也可见Buren[104], Marsden和Wan[105], Valent[8], Grioli[106], Wang和Truesdell[88]等人的论文以及Truesdell[7]等人著作的第63节. 这一方法也被用于解决其他问题, 如Capriz和Guidugli[107–110]论证了线性和非线性弹性理论的相容性, 并表明力边值问题可以通过Signorini类型的摄动方法来解决, Grioli[106], Romano和Marasco[111], Iaccarino等人[112,113]将Signorini法扩展为解决具有活载荷的纯力边界的数学问题.

对于参考构形处于无应力的自然状态, 根据表3可以建立在参考构形上以PK1应力表示有限变形的纯力边值问题:

$$\begin{aligned}&\mathrm{Div}\mathbf{P}+\rho_0\mathbf{b}=\mathbf{0},\ \text{在}\ \Omega_0\ \text{上},\\&\mathbf{P}\mathbf{N}=\mathbf{t}_0,\ \text{在}\ \partial\Omega_0\ \text{上}.\end{aligned}\tag{61}$$

根据2.1.2节中作用力的限制条件, 参考构形上体力和面力满足合力与合力矩平衡. 假设作用力展开为单参数ε的解析函数:

$$\begin{aligned}&\mathbf{b}=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n\mathbf{b}_n,\ \text{在}\ \Omega_0\ \text{上},\\&\mathbf{t}_0=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n\mathbf{t}_{0n},\ \text{在}\ \partial\Omega_0\ \text{上}.\end{aligned}\tag{62}$$

任意变形下位移梯度为**H**=**F**−**I**, 将PK1应力响应函数展开为

$$\mathbf{P}=\widehat{\mathbf{P}}(\mathbf{F})=\widetilde{\mathbf{P}}(\mathbf{H})=\sum_{s=1}^{\infty}\widetilde{\mathbf{P}}_s(\mathbf{H}),\tag{63}$$

其中, $\widetilde{\mathbf{P}}(\mathbf{H})$为**H**的解析函数, $\widetilde{\mathbf{P}}_s(\mathbf{H})$为**H**的$s$次均匀齐次多项式. 方程(61)的解**u**是参数的解析函数:

$$\mathbf{u}=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n\mathbf{u}_n.\tag{64}$$

则位移梯度进一步表示为

$$\mathbf{H}=\mathbf{u}\otimes\nabla=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n\mathbf{u}_n\otimes\nabla=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n\mathbf{H}_n.\tag{65}$$

即$\mathbf{H}_n=\mathbf{u}_n\otimes\nabla$. 将式(65)代入式(63)有

$$\mathbf{P}=\sum_{s=1}^{\infty}\widetilde{\mathbf{P}}_s\left(\sum_{r=1}^{\infty}\varepsilon^r\mathbf{H}_r\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n\mathbf{P}_n(\mathbf{H}_1,\mathbf{H}_2,\dots,\mathbf{H}_n),\tag{66}$$

其中, $\mathbf{P}_n=\widetilde{\mathbf{P}}_1(\mathbf{H}_n)+\mathbf{Q}_n(\mathbf{H}_1,\mathbf{H}_2,\dots,\mathbf{H}_{n-1})$, 显然有$\mathbf{Q}_1\equiv\mathbf{0}$,

且$\mathbf{Q}_n$由响应函数决定.

对PK2应力的响应函数展开为

$$\mathbf{T} = \tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{C}) = \mathbf{L}_1(\mathbf{E}) + \mathbf{L}_2(\mathbf{E}) + \cdots, \tag{67}$$

其中, $\mathbf{E} = (\mathbf{C}-\mathbf{I})/2 = (\mathbf{H}+\mathbf{H}^{\mathrm{T}}+\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{H})/2$, $\mathbf{L}_s$为$\mathbf{E}$的s次多项式的响应函数, 满足大对称性与小对称性; 且$\mathbf{L}_1(\mathbf{E})=\mathbf{L}(\mathbf{E})$为$\mathbf{E}$的线性关系. 根据PK1应力与PK2应力的关系$\mathbf{P}=\mathbf{FT}=(\mathbf{H}+\mathbf{I})\mathbf{T}$, 得到$\mathbf{P}_s$与$\mathbf{L}_s$的关系:

$$\begin{aligned}
&\tilde{\mathbf{P}}_1(\mathbf{H}) = \mathbf{L}(\tilde{\mathbf{E}}),\\
&\tilde{\mathbf{P}}_2(\mathbf{H}) = \mathbf{L}\left(\frac{1}{2}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}\right) + \mathbf{L}_2(\tilde{\mathbf{E}}) + \mathbf{H}\mathbf{L}(\tilde{\mathbf{E}}),\\
&\vdots
\end{aligned} \tag{68}$$

其中, $\tilde{\mathbf{E}}_n = (\mathbf{H}_n + \mathbf{H}_n^{\mathrm{T}})/2$为小应变, 因此有

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}_1 = \tilde{\mathbf{P}}_1(\mathbf{H}) = \mathbf{L}(\tilde{\mathbf{E}}),\\
&\mathbf{P}_2 = \tilde{\mathbf{P}}_1(\mathbf{H}_2) + \mathbf{Q}_2(\mathbf{H}),\\
&\vdots\\
&\mathbf{P}_n = \mathbf{L}(\tilde{\mathbf{E}}_n) + \mathbf{Q}_n(\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2, \ldots, \mathbf{H}_{n-1}),
\end{aligned} \tag{69}$$

其中, $\tilde{\mathbf{P}}_1(\mathbf{H}_2) = \mathbf{L}(\tilde{\mathbf{E}}_2)$, 且$\mathbf{Q}_2(\mathbf{H}) = \tilde{\mathbf{P}}_2(\mathbf{H})$. 将式(69)代入到方程(61)中, 得到第$n$个力边值问题的方程:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Div}\mathbf{L}(\tilde{\mathbf{E}}_n) + \rho_0\mathbf{b}_n^* = \mathbf{0},\\
&\mathbf{L}(\tilde{\mathbf{E}}_n)\cdot\mathbf{N} = \mathbf{t}_{0n}^*, \text{在} \partial\Omega_0 \text{上}.
\end{aligned} \tag{70}$$

其中有效载荷为

$$\begin{aligned}
&\rho_0\mathbf{b}_n^* = \rho_0\mathbf{b}_n + \mathrm{Div}\mathbf{Q}_n(\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2, \ldots, \mathbf{H}_{n-1}),\\
&\mathbf{t}_{0n}^* = \mathbf{t}_{0n} - \mathbf{Q}_n(\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2, \ldots, \mathbf{H}_{n-1})\cdot\mathbf{N},\\
&n = 1, 2, 3, \ldots.
\end{aligned} \tag{71}$$

通过上述方式采用摄动方法, 将有限变形转化为n个无限小变形, 进而描述纯力边值问题. 根据(有效)载荷需满足合力与合力矩为零，可得到Signorini作用力相容性条件为

$$\sum_{m=1}^{n-1}\left(\int_{\partial\Omega_0}\mathbf{u}_{n-m}\times\mathbf{t}_{0m}\mathrm{d}S + \int_{\Omega_0}\mathbf{u}_{n-m}\times\rho_0\mathbf{b}_m\mathrm{d}V\right) = \mathbf{0}, \tag{72}$$

即每一个方程的相容条件依赖于前方程的位移解. 若同一个物体的无限小变形的纯力边值问题的解存在, 且唯一性要求差别在任意小的旋转, 则相对应的力边值问题的解$\mathbf{u}_n$也存在, 位移差为一个刚性旋转, 对任意常矢量$\boldsymbol{\omega}_n$, $\mathbf{u}_n$与$\mathbf{u}_n+\boldsymbol{\omega}_n\times(\mathrm{X}-\mathbf{X}_0)$都会满足上述该方程. 采用这种方法来处理在本质上与线性变形相差不大的变形. 但是在一般变形理论中, 由于任意旋转会导致合力矩不再满足平衡条件, 因此需要确定是否存在一个唯一的$\boldsymbol{\omega}_n$来消除这种不确定性. 显然对参考构形上力矩平衡方程:

$$\int_{\partial\Omega_0}\mathbf{u}\times\mathbf{t}_0\mathrm{d}S + \int_{\Omega_0}\mathbf{u}\times\rho_0\mathbf{b}\mathrm{d}V = \mathbf{0}. \tag{73}$$

将式(62)和(64)代入式(73), 由参数ε的取值任意性, 上述方程分为

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^2: \int_{\partial\Omega_0}\mathbf{u}_1\times\mathbf{t}_{01}\mathrm{d}S + \int_{\Omega_0}\rho_0\mathbf{u}_1\times\mathbf{b}_1\mathrm{d}V = \mathbf{0},\\
&\vdots\\
&\varepsilon^{r+s}: \sum_{q=1}^{r+s-1}\left[\int_{\partial\Omega_0}\mathbf{u}_{r+s-q}\times\mathbf{t}_{0q}\mathrm{d}S + \int_{\Omega_0}\rho_0\mathbf{u}_{r+s-q}\times\mathbf{b}_q\mathrm{d}V\right] = \mathbf{0}.
\end{aligned} \tag{74}$$

结合式(72)的相容条件, 对于$\mathbf{u}_p$依赖于$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_{p-1}$的相容性要求, m=2, 3, …, p有

$$\sum_{q=1}^{m-1}\left[\int_{\partial\Omega_0}\mathbf{u}_{m-q}\times\mathbf{t}_{0q}\mathrm{d}S + \int_{\Omega_0}\mathbf{u}_{m-q}\times\mathbf{b}_q\mathrm{d}V\right] = \mathbf{0}. \tag{75}$$

则对于$\mathbf{u}_p$对应的方程, 定义其力矩为

$$\sum_{q=1}^{p}\left[\int_{\partial\Omega_0}\mathbf{u}_{p+1-q}\times\mathbf{t}_{0q}\mathrm{d}S + \int_{\Omega_0}\mathbf{u}_{p+1-q}\times\mathbf{b}_q\mathrm{d}V\right] = \mathbf{m}_p. \tag{76}$$

若$\mathbf{u}_p$差异无限小旋转的位移$\mathbf{u}_p+\boldsymbol{\omega}_p\times\mathbf{r}_0$也是该方程的解, 代入式(76)有

$$\int_{\partial\Omega_0}(\boldsymbol{\omega}_p\times\mathbf{r}_0)\times\mathbf{t}_{01}\mathrm{d}S + \int_{\Omega_0}(\boldsymbol{\omega}_p\times\mathbf{r}_0)\times\mathbf{b}_1\mathrm{d}V = -\mathbf{m}_p. \tag{77}$$

根据运算规则:

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c} = [\mathbf{b}\otimes\mathbf{c} - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\mathbf{I}]\mathbf{a}. \tag{78}$$

定义张量$\mathbf{A}_1$为

$$\mathbf{A}_1 = \int_{\partial\Omega_0}\mathbf{r}_0\otimes\mathbf{t}_{01}\mathrm{d}S + \int_{\Omega_0}\rho_0\mathbf{r}_0\otimes\mathbf{b}_1\mathrm{d}V. \tag{79}$$

则式(77)等价于:

$$[\mathbf{A}_1 - (\mathrm{tr}\mathbf{A}_1)\mathbf{I}]\boldsymbol{\omega}_p = -\mathbf{m}_p. \tag{80}$$

若要确定唯一解需要满足$\det[(\mathbf{A}_1-\mathrm{tr}\mathbf{A}_1)\mathbf{I}]\neq 0$, 因此说明, $\mathbf{u}_p$的唯一性要求$\mathbf{t}_{01}$, $\mathbf{b}_1$不存在平衡轴, 关于平衡轴的证明见附录A.

Signorini唯一性定理: 若外载荷的一阶式$\mathbf{t}_{01}$, $\mathbf{b}_1$不存在平衡轴, (1) 若对于参数ε的解析解$\mathbf{u}=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n\mathbf{u}_n$存在, 则$\mathbf{u}_n$所满足的控制方程是完备的; 即同样的纯力边值问题, 若对于无限小变形的解存在, 则必存在解$\mathbf{u}_n$满足第n个方程; (2) 若对于无限小变形的解满足唯一性要求, 则任意阶的方程的解$\mathbf{u}_n$是唯一的(相差一个确定刚性旋转).

对于上述Signorini唯一性问题, 假定$n\geq 2$ 时, $\mathbf{b}_n=\mathbf{0}$, $\mathbf{t}_{0n}=\mathbf{0}$, 仅保留展开式的第一项, 则有

$$\begin{aligned}&\mathbf{b}=\varepsilon\mathbf{b}_1(\mathbf{X}),\ \mathbf{X}\in\Omega_0,\\&\mathbf{t}_0=\varepsilon\mathbf{t}_{01}(\mathbf{X}),\ \mathbf{X}\in\partial\Omega_0.\end{aligned}\tag{81}$$

当参数ε足够小, 可将问题线性化. Stoppelli解决了这一类力边值问题的解的局部存在唯一性问题. 他的思想是: 假设弹性体原点在变形后依旧为原点, 即$\mathbf{x}=\boldsymbol{\chi}(\mathbf{0})=\mathbf{0}$, 变形$\boldsymbol{\chi}^*$以及变形梯度$\mathbf{F}^*$为方程(61)的解, $\boldsymbol{\omega}$为弹性体与载荷绕原点的旋转张量$\mathbf{Q}$的反偶矢量(轴矢量), 则旋转之后的变形$\boldsymbol{\chi}=\mathbf{Q}\boldsymbol{\chi}^*$以及变形梯度$\mathbf{F}=\mathbf{Q}\mathbf{F}^*$, 旋转之后的位移为$\mathbf{u}=\mathbf{u}^*+\mathbf{Q}(\mathbf{X}-\mathbf{X}_0)=\mathbf{u}^*+\boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{X}-\mathbf{X}_0)$, PK1应力$\widehat{\mathbf{P}}(\mathbf{F})=\mathbf{Q}\widehat{\mathbf{P}}(\mathbf{F}^*)$满足的方程:

$$\begin{aligned}&\mathrm{Div}\widehat{\mathbf{P}}(\mathbf{F})+\rho_0\mathbf{Q}\mathbf{b}=\mathbf{0},\\&\widehat{\mathbf{P}}(\mathbf{F})\mathbf{N}=\mathbf{Q}\mathbf{t}_0.\end{aligned}\tag{82}$$

若能找到满足式(82)的唯一的旋转张量$\mathbf{Q}$, 则可以得到方程(61)的一个唯一且确定的解$\boldsymbol{\chi}=\mathbf{Q}\boldsymbol{\chi}^*$. 因此引入附加载荷$\mathbf{h}$和$\mathbf{g}$, 对于给定变形$\boldsymbol{\chi}$, 寻找唯一的旋转张量$\mathbf{Q}$使得$\mathbf{h}=\mathbf{0}$和$\mathbf{g}=\mathbf{0}$且平衡方程满足函数变换(要求弹性体所占区域为有界闭集, 且边界、体力以及PK1应力响应函数足够光滑):

$$\begin{aligned}&\mathrm{Div}\widehat{\mathbf{P}}(\mathbf{F})+\rho_0\mathbf{Q}\mathbf{b}=\mathbf{h},\\&-\widehat{\mathbf{P}}(\mathbf{F})\mathbf{N}+\mathbf{Q}\mathbf{t}_0=\mathbf{g}.\end{aligned}\tag{83}$$

由于$\boldsymbol{\chi}^*$为未旋转平衡方程的解, 则自然有

$$\int_{\partial\Omega_0}\mathbf{g}\mathrm{d}S+\int_{\Omega_0}\mathbf{h}\mathrm{d}V=\mathbf{0}.\tag{84}$$

为了使得合力矩平衡满足

$$\int_{\partial\Omega_0}\mathbf{r}_0\times\mathbf{g}\mathrm{d}S+\int_{\Omega_0}\rho_0\mathbf{r}_0\times\mathbf{h}\mathrm{d}V=\mathbf{0},\tag{85}$$

引入参考构形下的张量$\mathbf{A}_1$为

$$\mathbf{A}_1=\int_{\partial\Omega_0}\mathbf{r}_0\otimes\mathbf{t}_{01}\mathrm{d}S+\int_{\Omega_0}\rho_0\mathbf{r}_0\otimes\mathbf{b}_1\mathrm{d}V,\tag{86}$$

显然该张量对称, 且有

$$\varepsilon(\mathbf{A}_1\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}-\mathbf{Q}\mathbf{A}_1)=\mathbf{M}\equiv\int_{\Omega_0}[\widehat{\mathbf{P}}(\mathbf{F})^{\mathrm{T}}-\widehat{\mathbf{P}}(\mathbf{F})]\mathrm{d}V.\tag{87}$$

为寻找唯一的$\mathbf{Q}$, 令函数:

$$\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{Q})\equiv\mathbf{A}_1\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}-\mathbf{Q}\mathbf{A}_1=\frac{1}{\varepsilon}\mathbf{M},\tag{88}$$

则$\boldsymbol{\Phi}:\mathbb{O}^3\to\mathbb{W}$为正交张量群到反对称张量群的映射, 且$\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{I})=\mathbf{0}$. 根据反函数定理(Inverse Function Theorem), 若在$\mathbf{Q}=\mathbf{I}$附近, $\delta\boldsymbol{\Phi}$存在且为可逆映射, 载荷无平衡轴条件等价于

$$\det(\mathbf{A}_1-\mathbf{I}\mathrm{tr}\mathbf{A}_1)\neq 0.\tag{89}$$

式(87)和(89)的证明方法见附录A. 此时存在与ε无关的正整数α和β使得: 若$\|\mathbf{M}\|\leq a|\varepsilon|$, 则存在唯一的解$\mathbf{Q}$满足$\|\mathbf{Q}-\mathbf{I}\|\leq\beta$.

Stoppelli存在唯一性定理: 当弹性体所占区域Ω_0为有界闭集, 边界、体力以及PK1应力响应函数足够光滑, 力边值问题的载荷满足相容条件$\det(\mathbf{A}_1-\mathbf{I}\mathrm{tr}\mathbf{A}_1)\neq 0$, 则存在与参数$\varepsilon$无关的正数$\gamma$, δ使得$|\varepsilon|\leq\gamma$, 存在唯一解$\mathbf{x}=\boldsymbol{\chi}(\mathbf{X})=\mathbf{X}+\mathbf{u}(\mathbf{X})$, 满足条件$\boldsymbol{\chi}(\mathbf{0})=\mathbf{0}$且$|\mathbf{u}|\leq\delta$有界(局部解的唯一性定理).

4.2.2 St Venant-Kirchhoff材料纯位移边值问题

在有限变形下, 线性化的均质各向同性的物理关系为一种最简单的本构关系, 此时PK2应力响应函数满足关系:

$$\begin{aligned}&\mathbf{T}=\lambda(\mathrm{tr}\mathbf{E})\mathbf{I}+2\mu\mathbf{E},\\&\mathbf{E}=\frac{1}{2}(\mathbf{u}\otimes\nabla+\nabla\otimes\mathbf{u}+\nabla\otimes\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}\otimes\nabla).\end{aligned}\tag{90}$$

满足上述物理关系的材料为St Venant-Kirchhoff材料, 其材料参数λ, $\mu>0$. 对于参考构形为自然状态, 体力为保守恒载的纯位移边值问题(且边界值为零)以PK1应力形式$\mathbf{P}=\mathbf{F}\mathbf{T}$表示为

$$\begin{aligned}&\mathrm{Div}\mathbf{P}+\rho_0\mathbf{b}=\mathbf{0},\\&\mathbf{u}=\mathbf{0},\ \mathbf{X}\in\partial\Omega_0,\end{aligned}\tag{91}$$

其中, PK2应力响应函数为映射$\widehat{\mathbf{T}}:\mathbb{V}(\mathbf{O})\subset\mathbb{S}^3\to\mathbb{S}^3$,

且足够光滑. 其中Green应变在原点处的邻域:

$$\mathbb{V}(\mathbf{O}) = \left\{\mathbf{E} \in W^{1,p}(\Omega_0); \mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C}-\mathbf{I}), \forall \mathbf{X} \in \Omega_0\right\}. \quad (92)$$

方程(91)具有特解: $\mathbf{b}=\mathbf{0}$, $\mathbf{u}=\mathbf{0}$, 可以在原点邻域应用隐函数定理.

位移解为向量函数$\mathbf{u}:\bar{\Omega} \to \mathbb{R}^3$且满足边界条件的赋范向量空间$V^p(\Omega)$(对每个$p>3$):

$$\mathbf{u} \in V^p(\Omega_0) = \{\mathbf{u} \in W^{2,p}(\Omega_0); \mathbf{u}=\mathbf{0}, \forall \mathbf{X} \in \partial\Omega_0\}. \quad (93)$$

定义赋范向量空间$U^p(\Omega_0)$为$V^p(\Omega_0)$在原点的一个邻域, 则对$\mathbf{u} \in U^p(\Omega_0) \subset V^p(\Omega_0)$, 定义赋范向量空间$F^p(\Omega_0)$为勒贝格空间(Lebesgue Space) $L^p(\Omega_0)$在原点的邻域.

定义非线性算子

$$\mathbf{L}: \mathbf{u} \to \mathbf{L}(\mathbf{u}) = -\mathrm{Div}\mathbf{P} \in L^p(\Omega_0) \quad (94)$$

为$W^{2,p}(\Omega_0)$到空间$L^p(\Omega_0)$的映射. 则式(91)可以写为

$$\begin{aligned}&\mathbf{L}(\mathbf{u}) = -\mathrm{Div}\{(\mathbf{I}+\mathbf{u}\otimes\nabla)[\lambda(\mathrm{tr}\mathbf{E})\mathbf{I}+2\mu\mathbf{E}]\} = \rho_0\mathbf{b},\\ &\mathbf{u}=\mathbf{0},\ \mathbf{X} \in \partial\Omega_0,\end{aligned} \quad (95)$$

其中算子的分量表示为

$$\begin{aligned}L_i = -\partial_j\bigg\{&\mathbb{E}_{ijpq}\tilde{E}_{pq} + \frac{1}{2}\mathbb{E}_{ijpq}u_{m,p}u_{m,q}\\ &+\mathbb{E}_{rjpq}u_{p,q}u_{i,r} + \frac{1}{2}\mathbb{E}_{rjpq}u_{m,p}u_{m,q}u_{i,r}\bigg\}.\end{aligned} \quad (96)$$

St Venant-Kirchhoff材料唯一性定理[10]: 弹性体所占区域$\Omega \in \mathbb{R}^3$, 位移边界是$\partial\Omega \in C^2$, 对于每个$p>3$, 存在空间$L^p(\Omega)$的原点的邻域$F^p(\Omega)$, 以及位移解所在的空间$V^p(\Omega)$在原点的邻域$U^p(\Omega)$, 使得对每一个$\rho_0\mathbf{b} \in F^p(\Omega)$, 式(95)中所描述的边值问题在$U^p(\Omega)$中只有一个解.

若对于更一般弹性体, PK2应力响应满足关系:

$$\mathbf{T} = \lambda(\mathrm{tr}\mathbf{E})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{E} + o(\|\mathbf{E}\|^2),\ \lambda,\ \mu > 0, \quad (97)$$

且对于$\mathbf{u} \in U^p(\Omega) \subset V^p(\Omega)$, PK2应力响应函数$\hat{\mathbf{T}} \in C^2$, 则上述解的唯一性定理依旧成立.

对于一般的St Venant-Kirchhoff材料, 纯位移边值问题位移解在原点邻域内的唯一性, 相关讨论见文献[114–116]. Raïssouli和Oudaani[117]对一类满足$\lambda=0$, $\mu=1/2$的St Venant-Kirchhoff材料进行了研究, 并将解的唯一性结论扩展到混合边值问题.

4.3 从应变能出发(本构假定和稳定性相关)

由2.1节和2.2节的讨论可知, 对于超弹性体, 总能量的Euler-Lagrange方程的解对应着弹性理论的边值问题的解. 对应变能函数的性质分析是研究有限变形问题的有力工具[118], 对于构造的只满足解的存在性假设的应变能函数, 无限制的解的唯一性是不成立的.

4.3.1 应变能函数为严格凸函数(局部)

当应变能函数为(局部)严格凸函数时, 弹性理论的边值问题具有良好的数学性质. 利用给定变形上叠加小变形的问题, Ericksen和Toupin[42]研究了各向同性的材料满足强椭圆条件时, 此时位移边值问题的位移解若存在是唯一的. Hayes[119]研究了一类星形区域的混合边值问题解的唯一性, 并证明了强椭圆条件是其成立的充分非必要条件. Hill[15,43]给出了在给定变形上叠加小变形的范围内应变能函数性质与唯一性定理.

Hill唯一性定理: 当应变能函数为变形梯度的局部严格凸函数, 对于位移-力边值问题, 在叠加小变形的范围内, 给定大变形是唯一的.

这一经典结论的重新论述也可参照Truesdell[7]著作的第68节和Ogden[9]著作的第六章. 下文结合给定变形上叠加小变形的增量理论、应变能函数的凸性与本构关系不等式的关系, 对这一经典结论进行阐述.

对于超弹性体, 从自然状态(无应力状态)的参考构形上发生的有限变形, 其混合位移-力边值问题用PK1应力表示有

$$\begin{aligned}&\mathrm{Div}\mathbf{P} + \rho_0\mathbf{b} = \mathbf{0},\\ &\mathbf{PN} = \mathbf{t}_0,\ \text{在}\ \partial_t\Omega_0\ \text{上},\\ &\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}},\ \text{在}\ \partial_d\Omega_0\ \text{上}.\end{aligned} \quad (98)$$

不妨设方程(98)的一组解为($\mathbf{P}^0$, $\mathbf{F}^0$, $\mathbf{X}^0$, $\mathbf{u}^0$), 引入作为中间构形, 并在此给定变形上叠加一个无限小应变, 达到平衡的当前构形(图4).

从自然状态到中间构形的变形为$\mathbf{X}^0=\chi^0(\mathbf{X}^*)$, 自然状态到当前构形的变形为$\mathbf{x}=\chi(\mathbf{X}^*)$, 则叠加的变形$\delta\mathbf{u}=\mathbf{x}-\mathbf{X}^0=\delta\chi(\mathbf{X}^*)$, 其中$\delta\chi(\mathbf{X}^*)=\chi-\chi^0$. 描述在中间构形上的叠加的无限小位移梯度$\hat{\mathbf{H}}(\mathbf{X}^0) = \mathbf{Grad}_{\mathbf{X}^0}\delta\mathbf{u}$, 其高阶项可忽略; 无限小变形梯度$\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{X}^0) = \mathrm{d}\mathbf{x}/\mathrm{d}\mathbf{X}^0$, 叠加变形引

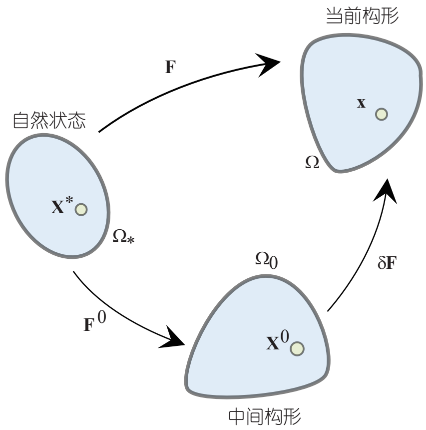

图 4 (网络版彩图)给定应变上叠加无限小应变问题的构形
Figure 4 (Color online) The configurations in the problem of infinitesimal strain superimposed upon the given strain.

起的体积变化为

$$\begin{aligned}&\tilde{J} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}V^0} = \det\tilde{\mathbf{F}} = \det(\mathbf{I}+\tilde{\mathbf{H}}) = 1+\mathrm{tr}\tilde{\mathbf{H}},\\&\tilde{J}^{-1} = \det{}^{-1}\tilde{\mathbf{F}} = 1-\mathrm{tr}\tilde{\mathbf{H}}.\end{aligned} \tag{99}$$

从自然状态到当前构形, 变形梯度进行乘法或者加法分解:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\mathbf{X}^*) &= \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}\mathbf{X}^*} = \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\mathbf{X}^0}\cdot\frac{\partial\mathbf{X}^0}{\partial\mathbf{X}^*} = \tilde{\mathbf{F}}\mathbf{F}^0\\&= \frac{\partial\left(\mathbf{X}^0+\delta\mathbf{u}\right)}{\partial\mathbf{X}^*} = \mathbf{F}^0+\delta\mathbf{F}^0\\&= \frac{\partial\mathbf{X}^0}{\partial\mathbf{X}^*} + \frac{\partial(\delta\mathbf{u})}{\partial\mathbf{X}^0}\cdot\frac{\partial\mathbf{X}^0}{\partial\mathbf{X}^*} = (\mathbf{I}+\tilde{\mathbf{H}})\mathbf{F}^0,\end{aligned} \tag{100}$$

其中变形梯度增量为$\delta\mathbf{F}^0 = \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{F}^0$, 自然状态到当前构形的体积变化同样进行乘法与加法分解:

$$J = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}V^0}\frac{\mathrm{d}V^0}{\mathrm{d}V^*} = \tilde{J}J_0 = (1+\mathrm{tr}\tilde{\mathbf{H}})J_0 = J_0+\delta J_0. \tag{101}$$

体积变化增量为$\delta J_0 = J_0\mathrm{tr}\tilde{\mathbf{H}}$.

从自然状态到当前构形, 将PK1应力$\mathbf{P} = \mathring{\mathbf{P}}(\mathbf{F})$在$\mathbf{F}$=$\mathbf{F}^0$附近泰勒一阶展开:

$$\begin{aligned}\mathbf{P} &= \mathring{\mathbf{P}}(\mathbf{F}) = \mathbf{P}^0+\delta\mathbf{P}^0 = \mathbf{P}^0+\left.\frac{\partial\mathring{\mathbf{P}}}{\partial\mathbf{F}}\right|_{\mathbf{F}^0}:\delta\mathbf{F}^0\\&= \mathbf{P}^0+{}^*\mathbb{A}^0[\tilde{\mathbf{H}}\mathbf{F}^0] = \mathbf{P}^0+{}^*\mathbb{A}^0:\tilde{\mathbf{H}}\mathbf{F}^0,\end{aligned} \tag{102}$$

其中中间构形上的PK1应力为$\mathbf{P}^0 = \mathring{\mathbf{P}}(\mathbf{F}^0)$, PK1应力增量为

$$\delta\mathbf{P}^0 = \left.\frac{\partial\mathring{\mathbf{P}}}{\partial\mathbf{F}}\right|_{\mathbf{F}^0}:\delta\mathbf{F}^0 = {}^*\mathbb{A}^0[\tilde{\mathbf{H}}\mathbf{F}^0]. \tag{103}$$

则在叠加小范围内有关系式:

$$\dot{\mathbf{P}}(\mathbf{F}) = {}^*\mathbb{A}^0:\dot{\mathbf{F}}. \tag{104}$$

按照Hill的方法, 根据式(98), 建立PK1应力率$\dot{\mathbf{P}}$与速度$\mathbf{v}$表示的混合位移-力边值问题的基本方程和边界条件. 假设在给定变形$\mathbf{F}=\mathbf{F}^0$附近有第二组解, $\left(\dot{\mathbf{P}}^1, \mathbf{F}^1, \mathbf{u}^1, \mathbf{v}^1\right)$, 且两组解边界条件一致, 两组解只差$(\delta\dot{\mathbf{P}}, \delta\mathbf{F}, \delta\mathbf{v})$满足方程:

$$\begin{aligned}&\mathrm{Div}\delta\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{0},\ \delta\dot{\mathbf{P}} = {}^*\mathbb{A}^0:\delta\dot{\mathbf{F}},\\&\delta\dot{\mathbf{P}}\mathbf{N} = \delta\dot{\mathbf{t}}_0 = \mathbf{0},\ \text{在}\,\partial_t\Omega_0\text{上},\\&\delta\mathbf{v} = \mathbf{0},\ \text{在}\,\partial_d\Omega_0\text{上}.\end{aligned} \tag{105}$$

相对应的有

$$\begin{aligned}0 &= \int_{\partial_t\Omega_0}\delta\dot{\mathbf{t}}_0\cdot\delta\mathbf{v}\mathrm{d}S\\&= \int_{\Omega_0}\delta\dot{\mathbf{P}}:\delta\dot{\mathbf{F}}\mathrm{d}V = \int_{\Omega_0}(\delta\dot{\mathbf{F}})^{\mathrm{T}}:{}^*\mathbb{A}^0:\delta\dot{\mathbf{F}}\mathrm{d}V.\end{aligned} \tag{106}$$

根据2.2节内容, 当应变能密度函数在$\mathbf{F}$=$\mathbf{F}^0$附近为局部严格凸函数时, 其二阶等价的CN不等式为

$$(\delta\dot{\mathbf{F}})^{\mathrm{T}}:{}^*\mathbb{A}^0:\delta\dot{\mathbf{F}} > 0. \tag{107}$$

结合式(106)和(107), 此时混合边值问题的解是唯一的.

由此建立的是率形式的弹性理论, 这种研究方法也在弹塑性体边值问题中应用[120], 并可用于增量理论表示的具有初始应力场的弹性理论边值问题解的唯一性研究.

此外对解的唯一性与其他不等式的关系、与稳定性的关系、严格凸函数的物理含义与要求进行讨论.

(1) 应变能函数的严格凸性一阶等价不等式(26), 即PK1应力的单调性, 是上述问题解的唯一性充分条件. 假设方程(98)的两组容许解($\mathbf{P}_1$, $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{t}_{01}$)和($\mathbf{P}_2$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{t}_{02}$); 则两组解之差($\Delta\mathbf{P}$, $\Delta\mathbf{F}$, $\Delta\mathbf{b}$, $\Delta\mathbf{t}_0$)满足方程:

$$\begin{aligned}&\mathrm{Div}\Delta\mathbf{P} = -\rho_0\Delta\mathbf{b} = -\rho_0(\mathbf{b}_1-\mathbf{b}_2),\\&\Delta\mathbf{P}\mathbf{N} = \Delta\mathbf{t}_0 = \mathbf{t}_{01}-\mathbf{t}_{02},\ \text{在}\,\partial_t\Omega_0\text{上},\\&\Delta\mathbf{u} = \mathbf{0},\ \text{在}\,\partial_d\Omega_0\text{上}.\end{aligned} \tag{108}$$

则通过高斯定理以及散度运算, 在参考构形上的积分:

$$\begin{aligned}0 &= \int_{\partial_t\Omega_0} \Delta\mathbf{t}_0 \cdot \Delta\mathbf{x}\mathrm{d}S + \int_{\Omega_0} \rho_0 \Delta\mathbf{b} \cdot \Delta\mathbf{x}\mathrm{d}V \\ &= \int_{\Omega_0} \{(\Delta\mathbf{P}\cdot\Delta\mathbf{x})\cdot\nabla - \mathrm{Div}\Delta\mathbf{P}\cdot\Delta\mathbf{x}\}\mathrm{d}V \\ &= \int_{\Omega_0} \Delta\mathbf{P} : \Delta\mathbf{F}\mathrm{d}V. \end{aligned} \tag{109}$$

在式(109)成立的条件下, 若同时满足式(26)的PK1应力单调性不等式, 则必然有$\Delta\mathbf{P}=\mathbf{0}$, $\Delta\mathbf{F}=\mathbf{0}$; 显然式(26)是积分式$\int_{\Omega_0}\Delta\mathbf{P}:\Delta\mathbf{F}\mathrm{d}V>0$的充分条件, 也是方程的解唯一的充分条件. 因此也有如下定理.

GCN唯一性定理: 当应力响应函数是变形梯度的单调函数, 即满足GCN不等式, 对于给定位移-力边值问题, 若解存在, 则满足唯一性.

(2) Hadamard无限小超稳定性是上述解的唯一性的充分条件. 在讨论有限变形边值问题解的唯一性, 常常依赖于问题的稳定性. 在叠加小变形范围内, 根据Hadamard稳定性, 对于同一组边界条件存在两组不相等变形$\mathbf{x}\neq\mathbf{X}^0$, 由2.2节可知, 必然有$I(\mathbf{x})>I(\mathbf{X}^0)$, 即

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega_0}\{\widehat{W}(\mathbf{F})-\rho_0\mathbf{b}\cdot\mathbf{x}\}\mathrm{d}V-\int_{\partial_t\Omega_0}\mathbf{t}_0\cdot\mathbf{x}\mathrm{d}S \\ &\quad>\int_{\Omega_0}\{\widehat{W}(\mathbf{F}^0)-\rho_0\mathbf{b}\cdot\mathbf{X}^0\}\mathrm{d}V-\int_{\partial_t\Omega_0}\mathbf{t}_0\cdot\mathbf{X}^0\mathrm{d}S,\end{aligned} \tag{110}$$

即从一个平衡状态$\mathbf{X}^0$到另一个平衡状态$\mathbf{x}$, 应变能变化大于作用力做功:

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega_0}\{\widehat{W}(\mathbf{F})-\widehat{W}(\mathbf{F}^0)\}\mathrm{d}V \\ &\quad>\int_{\Omega_0}\rho_0\mathbf{b}\cdot\delta\mathbf{u}\mathrm{d}V+\int_{\partial_t\Omega_0}\mathbf{t}_0\cdot\delta\mathbf{u}\mathrm{d}S.\end{aligned} \tag{111}$$

对式(111)左端, 将应变能函数在$\mathbf{F}=\mathbf{F}^0$附近二阶展开:

$$\begin{aligned}\widehat{W}(\mathbf{F}) &= \widehat{W}(\mathbf{F}^0+\delta\mathbf{F}^0) \\ &= \widehat{W}(\mathbf{F}^0)+\mathbf{P}:\delta\mathbf{F}^0+\frac{1}{2}(\delta\mathbf{F}^0)^{\mathrm{T}}:^*\mathbb{A}^0:\delta\mathbf{F}^0.\end{aligned} \tag{112}$$

根据高斯定理, 式(111)右端等于$\int_{\Omega_0}\mathbf{P}:\delta\mathbf{F}^0\mathrm{d}V$, 则式(111)等价于

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_0}(\delta\mathbf{F}^0)^{\mathrm{T}}:^*\mathbb{A}^0:\delta\mathbf{F}^0\mathrm{d}V>0. \tag{113}$$

则根据此时两组解之差满足式(109), 局部的超稳定性式(113)成立是解的唯一性的充分条件, 即有如下定理.

局部的超稳定性-唯一性定理: 当弹性体处于有限变形下的平衡状态满足超稳定不等式, 对于给定位移-力边值问题, 给定有限变形在叠加小变形范围内至多存在一个解(相差任意无限小旋转).

(3) 应变能函数对于所有$\mathbf{F}\in\mathbb{M}_+^3$为凸性函数是不符合物理经验的, 上述解的唯一性的充分条件均是在局部范围内, 容许的叠加变形并不是任意的. 首先, 与物理性质$\det\mathbf{F}\to0^+$, $\widehat{W}(\mathbf{F})\to+\infty$, $\mathbf{F}\in\mathbb{M}_+^3$不相容[10]. 其次根据客观性公理, 应变能函数对任意正常正交张量$\mathbf{Q}\in\mathbb{O}_+^3$, 有$\widehat{W}(\mathbf{QF})=\widehat{W}(\mathbf{F})$. 当应变能函数为$\mathbf{F}$的严格凸函数, 其一阶等价式有

$$\widehat{W}(\mathbf{QF})-\widehat{W}(\mathbf{F})-\frac{\partial\widehat{W}(\mathbf{F})}{\partial\mathbf{F}}:(\mathbf{QF}-\mathbf{F})>0. \tag{114}$$

显然即

$$\mathbf{PF}^{\mathrm{T}}:(\mathbf{Q}-\mathbf{I})<0. \tag{115}$$

根据$\boldsymbol{\sigma}=J^{-1}\mathbf{PF}^{\mathrm{T}}$, 以及变形的保方向性$J=\det\mathbf{F}>0$, 有Cauchy应力表示式(115)的关系:

$$\boldsymbol{\sigma}:(\mathbf{Q}-\mathbf{I})<0;\ \forall\,\mathbf{F}\in\mathbb{M}_+^3,\mathbf{Q}\in\mathbb{O}_+^3,\boldsymbol{\sigma}\in\mathbb{S}^3. \tag{116}$$

根据对阵张量的谱分解定理, 存在正交张量$\mathbf{R}\in\mathbb{O}_+^3$使得$\boldsymbol{\sigma}$的特征值$\lambda_i$ (i=1, 2, 3)组成的对角张量$\mathbf{D}=\mathrm{diag}\lambda_i$满足$\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{R}^{\mathrm{T}}\mathbf{DR}$, 则有关系:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}:(\mathbf{Q}-\mathbf{I}) &= \mathbf{R}^{\mathrm{T}}\mathbf{DR}:(\mathbf{Q}-\mathbf{I})=\mathbf{D}:(\mathbf{RQR}^{\mathrm{T}}-\mathbf{I}) \\ &= \mathbf{D}:(\mathbf{Q}'-\mathbf{I})\le0,\ (\mathbf{Q}'\in\mathbb{O}_+^3).\end{aligned} \tag{117}$$

满足式(117)的Cauchy应力的集合为

$$\boldsymbol{\sigma}:=\{\mathbf{D}\in\mathbb{M}^3;\ \mathbf{D}:(\mathbf{Q}'-\mathbf{I})<0,\ \forall\mathbf{Q}'\in\mathbb{O}_+^3\}. \tag{118}$$

不妨取三个正交张量$\mathbf{Q}'$的特例:

$$\mathrm{diag}(1,-1,-1),\ \mathrm{diag}(-1,1,-1),\ \mathrm{diag}(-1,-1,1). \tag{119}$$

得到的Cauchy应力其特征值λ_i (i=1, 2, 3)应满足

$$\boldsymbol{\sigma}^*=\{\lambda_1+\lambda_2>0,\ \lambda_1+\lambda_3>0,\ \lambda_3+\lambda_2>0\}. \tag{120}$$

显然有$\boldsymbol{\sigma}\subset\boldsymbol{\sigma}^*$. 应变能函数$\widehat{W}$为变形梯度$\mathbf{F}$的严格凸函数时可以确保解的唯一性, 然而由4.3.1节可知, 严格凸函数的要求是过于强的充分条件, 是不现实的[7]. 因此更多凸性的应变能函数被提出并用以研究解的唯一性问题.

4.3.2 应变能函数为非严格凸性(一类均匀有限变形问题的全局唯一性)

当构造的应变能函数为变形梯度的非严格凸函数, 对其弹性边值问题的位移解的唯一性成立条件进行了研究. 对于均质三维弹性体(不要求各向同性)的纯位移边值问题的解的唯一性, Knops和Stuart[121]的工作给出第一个结果. 弹性体所占区域是欧氏空间中的有界开区域$\Omega_0\subset\mathbb{R}^n$, 集合的边界$\partial\Omega_0$为$\{\mathbf{X}_0+\varepsilon\mathbf{Z}: \varepsilon\ge 0, \forall\mathbf{Z}\in\mathbb{R}^n\setminus\{\mathbf{0}\}\}$, 即点$\mathbf{X}_0$的星形有界域, 边界$\partial\Omega_0$逐点连续可微, 且边界上定义的单位外法线矢量 $\mathbf{N}:\mathbf{X}\in\partial\Omega_0\to\mathbb{R}^3$. 无体力的纯位移边值问题的平衡方程为

$$\mathrm{Div}\mathbf{P}=\mathbf{0},\ \text{在}\Omega_0\text{上}. \tag{121}$$

对给定常张量$\mathbf{F}\in\mathbb{M}_+^{n\times n}$和常矢量$\mathbf{b}\in\mathbb{R}^n$, 其边界上的点均为仿射变形, 即位移边界条件为

$$\bar{\mathbf{x}}=\mathbf{F}\mathbf{X}+\mathbf{b};\ \forall\mathbf{X}\in\partial\Omega_0. \tag{122}$$

显然该问题的其中一个特解$\mathbf{v}:\overline{\Omega}_0\to\mathbb{R}^n$为均匀变形

$$\mathbf{v}(\mathbf{X})=\mathbf{F}\mathbf{X}+\mathbf{b};\ \forall\mathbf{X}\in\overline{\Omega}_0. \tag{123}$$

由于方程无体力以及面力做功, 所以总能量(势能)为

$$I(\mathbf{x})=W(\mathbf{x})=\int_{\Omega_0}\widehat{W}(\mathbf{x}\otimes\nabla)\mathrm{d}V. \tag{124}$$

考虑所有满足式(121)和(112)两个方程的解, 根据最小势能原理以及应变能函数的性质, 有如下定理.

Knops和Stuart唯一性定理: 应变能为二阶连续可微实函数$W\in C^2(\mathbb{M}_+^{n\times n},\mathbb{R})$, 且为秩一凸函数, 若存在任意光滑解$\mathbf{u}:\overline{\Omega}_0\to\mathbb{R}^n$满足平衡方程, 且满足仿射变形的边界条件$\mathbf{u}(\mathbf{X})=\mathbf{F}\mathbf{X}+\mathbf{b}, \forall\mathbf{X}\in\partial\Omega_0$, 其中一个特解为$\mathbf{v}(\mathbf{X})=\mathbf{F}\mathbf{X}+\mathbf{b}, \forall\mathbf{X}\in\overline{\Omega}_0$, 则有$I(\mathbf{u})\le I(\mathbf{v})$; 若应变能函数在$\mathbf{F}$处为严格拟凸函数, 则此时必然有$\mathbf{u}(\mathbf{X})=\mathbf{F}\mathbf{X}+\mathbf{b}, \forall\mathbf{X}\in\overline{\Omega}_0$, 即光滑位移解是唯一的$\mathbf{u}(\mathbf{X})=\mathbf{v}(\mathbf{X})$.

2003年, Müller和Šverák[122]在Knops和Stuart的结果基础上, 举出了其他拓扑条件下解的唯一性的反例. 当$\Omega_0\subset\mathbb{R}^2$, 弹性体是二维圆盘(开集), 应变能函数为严格拟凸函数, 且在同样的仿射变形的边界条件下, 构造出多个Lipschitz解为总势能的极小值点弱解. Taheri[123]证明了星形区域上弹性体的一类能量极小值点的唯一性. Knops等人[124]通过余能的性质研究了星形区域均质弹性体零体力零面力的非线性纯力边值问题的光滑应力场和位移场的唯一性. 当余能在$\mathbf{X}_0$处严格仿凸(Paraconvex)和秩$n-1$凸, 则光滑的应力场唯一且位移场相差为刚体平移和旋转.

对于可压缩均质且各向同性超弹性体非线性位移边值问题, John[79]在1972年利用应变能极小值给出具有唯一的均匀小应变(允许有大旋转)的光滑解的证明. 应变能函数展开形式为

$$\widehat{W}(\mathbf{E})=\frac{1}{2}\lambda\,\mathrm{tr}^2\mathbf{E}+\mu\,\mathrm{tr}\mathbf{E}^2+O(\|\mathbf{E}\|^3). \tag{125}$$

若给定位移边值$\bar{\mathbf{x}}, \forall\mathbf{X}\in\partial\Omega$, 平衡方程(121)的解$\boldsymbol{\chi}(\mathbf{X})$满足边界条件, 且变形映射属于集合$\boldsymbol{\chi}\in K=\{C^1(\overline{\Omega})\cap C^2(\Omega)\}$, 若$K$中另一任意变形$\boldsymbol{\chi}'$同样满足边界条件, 且应变能满足$W(\boldsymbol{\chi}')>W(\boldsymbol{\chi})$, 则$\boldsymbol{\chi}$在$K$中是唯一的. 2018年Sivaloganathan等人[78,125]将John[79]的结论扩展到混合位移-力边值问题. 假设一个给定的平衡方程的光滑位移解$\mathbf{u}_e$, 且总能量在此处的二阶导数一致正定, 即

$$\begin{aligned}\delta^2 I(\mathbf{u}_e)[\mathbf{q},\mathbf{q}]&=\int_{\Omega_0}\mathbf{q}\otimes\nabla:^*\mathbb{A}(\mathbf{u}_e\otimes\nabla):\mathbf{q}\otimes\nabla\,\mathrm{d}V\\&\ge c\int_{\Omega_0}|\mathbf{q}\otimes\nabla|^2\,\mathrm{d}V.\end{aligned} \tag{126}$$

若两个右柯西-格林变形张量的差$\mathbf{C}(\mathbf{u}_e)-\mathbf{C}(\mathbf{v}_e)$一致得足够小, 则不存在第二个平衡解$\mathbf{v}_e$.

Gurtin和Spector[94,96]结合Hill[15,43]和Stoppelli[100–103]以及John[79]的工作, 建立有限变形位移边值问题和混合边值问题恒载条件下解的唯一性定理: 平衡方程的位移解若属于任何凸的、稳定变形的非空集合, 此时解满足唯一性. Spector[77,95]在此基础上, 将结论扩展到一类简单活载荷力边值问题中.

除此之外, Gao等人[126]建立了一类以右变形张量$\mathbf{C}(\mathbf{u})$表示的应变能函数凸性的结论: 每个平衡方程的解$\mathbf{u}_e$(Cauchy应力半正定)都是总能量的最小值点. 若

在$\mathbf{u}_e$处应变能函数对于右变形张量严格凸, 则此解$\mathbf{u}_e$为唯一的能量极小值.

问题8 Knops和Stuart唯一性定理是对星形域上弹性体的一类均匀仿射变形的位移边界条件时位移解的全局唯一性定理, 是否可以在其他拓扑条件下成立?

4.3.3 应变能函数为严格多凸性

Ball[16]提出了多凸性应变能函数, 并给出了其关于纯位移和混合位移-力边值问题的存在性证明. 然而Ball形式的多凸性函数对于边值问题的解的唯一性是没有经过检验的.

一个重要的问题是, 多凸性应变能函数对应的应变能的极小值是否满足总能量的Euler-Lagrange方程式(22). 对这一问题的争论, 起始于1984年Ball和Schaeffer[127]的结论: 以变形梯度$\mathbf{F}$的奇异值$v_i(\mathbf{F})=[\lambda_i(\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{F})]^{1/2}$定义的应变能函数 $\widehat{W}(\mathbf{F})=\Phi(v_1, v_2, v_3)$对应的应变能的极小值, 包括全局和局部, 满足平衡方程. 而Zhang[128]在1991年则通过纯位移边值问题中隐函数法得到的平衡方程解与Ball形式多凸性函数的能量极小值点的对比, 得到两个结果是一致的; 同时提出疑问, 对于纯力边值问题, 两个方法得到的结果是否一致[8]? 在2002年Ball[129]对此进一步提出开放性问题(Problem 5): 请证实或证伪, 当多凸性应变能函数$\widehat{W}(\mathbf{F})$在合理增长(速率)条件下, 对于无体力的位移边值问题, 应变能的全局或局部定义的极小值满足总能量的Euler-Lagrange方程式(22).

在2010年的综述中Ball[130]给出了这一问题否定的回答, 并给出了一维变分的反例[131]. Sivaloganathan和Spector[78]则证明了对于一类多凸的应变能函数, 平衡方程的解若能够逐点满足特定的不等式, 则是应变能函数唯一的绝对极值点.

另一个重要的问题是Ball[129]提出的多凸性应变能函数与平衡方程解的唯一性的关系的开放性问题(Problem 8): 请证实或证伪, 一个所占区域同胚于球的均质弹性体, 当其应变能函数为严格多凸函数时, 其纯位移边值问题的光滑平衡解唯一.

其证实和证伪工作依赖于几何限制和边界限制条件. Spadaro[132]在2009年给出了二维空间上Problem 8的非唯一的例子, 要求二维圆盘有负的雅克比矩阵并有着单射的位移边界条件, 采用极小曲面的方法证实其解的非唯一性.

问题9 对于一个所占区域同胚于球的均质弹性体, 给定(严格)多凸应变能函数, 请确定其应变能极值点是总能量Euler-Lagrange方程的解的充分条件, 并给出纯位移边值问题的解满足唯一性的必要条件.

5 具有初始应力场的弹性理论中的解的唯一性定理

建立弹性理论的辅助假设之一为无初始应力假设, 即参考构形为自然状态, 这也是弹性理论数学分析的要求. 然而初始应力无处不在, 如地壳中的地应力(*In-Situ* Stress, 原岩应力), 影响着岩石的力学性质[133–136], 也是页岩开采中水力压裂裂纹扩展和缝网形成的关键因素[137–141]; 残余应力场作为一种重要的初始应力场, 在弹性体内具有自平衡的性质, 在日常生活和工业生产中普遍存在, 如在沉积薄膜中可致碎裂[142,143], 在微纳系统中致使微结构翘曲变形[144–146], 在生物力学中有重要作用[147]. 随着弹性理论的发展, 对建立具有初始应力场的弹性理论提出需求. 在定义本构关系的物质标架无差异性(Principle of Material Frame-Indifference, 即客观性)时, Cauchy[148]考虑具有初始应力场的本构关系的形式, 并用分量的形式给出了初始应力和位移梯度的线性关系; 具有初始应力场的弹性理论进一步发展, 如Hoger[149–151]对线性理论的一系列工作, Merodio等人[152–155]对有限变形开展的一系列工作. 同样, 初始应力场问题也并非是无条件满足解的唯一性, 如二维以及三维反例[156], 而其理论的数学性质仍需要研究和建立. 具有初始应力场的一般弹性力学问题的提法, 以及其解的唯一性的研究是弹性理论中的基本难题之一[157]. 由于具有初始应力场的有限变形理论仍未成熟, 这里主要讨论线弹性理论中解的唯一性问题.

增量理论中, 即在给定变形上增加无限小变形, 增量所满足的关系正是具有初始应力场的线弹性理论. 其相关理论的建立可以参照Ogden[9], Biot[158], Gurtin[6]以及Truesdell[7]等人的专著.

在4.3.1节的基础上, 以中间构形为增量理论的参考构形, 即$\mathbf{P}^0$为初始应力, 建立增量的位移-力边值问题, 有平衡方程:

$$\begin{aligned}&\mathrm{Div}\delta\mathbf{P}^0+\rho_0\delta\mathbf{b}=\mathbf{0},\\&\delta\mathbf{b}=\mathbf{b}+\frac{1}{\rho_0}\mathrm{Div}\mathbf{P}^0,\end{aligned}\tag{127}$$

其中,

$$\delta\mathbf{P}^0=\left.\frac{\partial\overset{\circ}{\mathbf{P}}(\mathbf{F})}{\partial\mathbf{F}}\right|_{\mathbf{F}^0}:\delta\mathbf{F}^0={}^*\mathbb{A}^0:(\widetilde{\mathbf{H}}\mathbf{F}^0).\tag{128}$$

位移边界条件为

$$\delta\mathbf{u}=\delta\bar{\mathbf{u}},\ 在\,\partial_d\Omega_0\,上.\tag{129}$$

力边界条件为

$$\begin{aligned}&(\delta\mathbf{P}^0)\mathbf{N}=\delta\mathbf{t}_0,\ 在\,\partial_t\Omega_0\,上,\\&\delta\mathbf{t}_0=\mathbf{t}_0-\mathbf{P}^0\mathbf{N}.\end{aligned}\tag{130}$$

由上述方程易发现, 增量方程中的作用力, 即体力和面力均依赖于给定变形, 即初始应力场, 在这里认为跟叠加变形无关, 即为恒载. 则具有初始应力场的弹性理论由式(126)–(128)表示.

为研究增量理论的叠加小变形的解的唯一性问题, 假设存在两组解, $(\delta\mathbf{P}_1^0,\ \delta\mathbf{F}_1^0,\ \delta\mathbf{u}_1)$和$(\delta\mathbf{P}_2^0,\ \delta\mathbf{F}_2^0,\ \delta\mathbf{u}_2)$, 两组解之差为

$$\Delta\delta\mathbf{P}^0=\delta\mathbf{P}_1^0-\delta\mathbf{P}_2^0,\ \Delta\delta\mathbf{u}=\delta\mathbf{u}_1-\delta\mathbf{u}_2.\tag{131}$$

作用力为恒载时, 由式(126)–(130)可得到$(\Delta\delta\mathbf{P}^0,\ \Delta\delta\mathbf{u})$满足方程:

$$\begin{aligned}&\mathrm{Div}(\Delta\delta\mathbf{P}^0)=\mathbf{0},\\&\Delta\delta\mathbf{u}=\mathbf{0},\ 在\,\partial_d\Omega_0\,上,\\&(\Delta\delta\mathbf{P}^0)\mathbf{N}=\mathbf{0},\ 在\,\partial_t\Omega_0\,上.\end{aligned}\tag{132}$$

由积分式(109)和高斯定理不难得到

$$\int_{\Omega_0}(\Delta\delta\mathbf{P}^0):(\Delta\delta\mathbf{F}^0)\mathrm{d}V=0.\tag{133}$$

由式(127), 得到式(133)即

$$\int_{\Omega_0}(\Delta\delta\mathbf{P}^0)^{\mathrm{T}}:{}^*\mathbb{A}^0:(\Delta\delta\mathbf{F}^0)\mathrm{d}V=0.\tag{134}$$

由正定不等式:

$$\int_{\Omega_0}(\Delta\delta\mathbf{F}^0)^{\mathrm{T}}:{}^*\mathbb{A}^0:(\Delta\delta\mathbf{F}^0)\mathrm{d}V>0,\tag{135}$$

将式(134)和(135)对比可得到两组解为同一组解, 即式(135)为解的唯一性的充分条件. 当取更严格的不等式时此条件仍成立:

$$(\Delta\delta\mathbf{F}^0)^{\mathrm{T}}:{}^*\mathbb{A}^0:(\Delta\delta\mathbf{F}^0)>0.\tag{136}$$

具有初始应力场的线弹性理论唯一性: 当应变能函数在点$\mathbf{F}^0$处为严格凸的, 或${}^*\mathbb{A}^0$的严格二阶正定性, 在位移-力边值问题中, 通过增量理论达到平衡状态的解若存在, 则是唯一的.

若将上述证明过程中增量形式以率形式给出, 即为Hill证明有限变形解的唯一性的方法.

Ogden[9]也在专著中给出了力边值问题$\partial_t\Omega_0=\partial\Omega_0$的解的唯一性定理的充分条件:

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega_0}(\Delta\delta\mathbf{P}^0):(\Delta\delta\mathbf{F}^0)\mathrm{d}V\\&\quad>\int_{\partial_t\Omega_0}\Delta\delta\mathbf{t}_0\cdot\Delta\delta\mathbf{x}\mathrm{d}S+\int_{\Omega_0}(\rho_0\Delta\delta\mathbf{b}\cdot\Delta\delta\mathbf{x})\mathrm{d}V.\end{aligned}\tag{137}$$

而其相应的增量的稳定性为

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega_0}(\delta\mathbf{P}^0):(\delta\mathbf{F}^0)\mathrm{d}V\\&\quad>\int_{\partial_t\Omega_0}\delta\mathbf{t}_0\cdot\delta\mathbf{x}\mathrm{d}S+\int_{\Omega_0}(\rho_0\delta\mathbf{b}\cdot\delta\mathbf{x})\mathrm{d}V.\end{aligned}\tag{138}$$

具有初始应力场的无限小应变的线弹性理论的边值问题的解的稳定性和唯一性的关系可以参见Gurtin[96].

Carlson和Man[159,160]研究了具有初始应力场的力边值(恒载)问题的解的唯一性, 即初始弹性张量${}^*\mathbb{A}'$, 用其表示的PK1应力响应为

$$\mathbf{P}=\mathbf{P}^0+\mathbf{H}\mathbf{P}^0+{}^*\mathbb{A}'[\mathbf{E}]+o(\mathbf{H}),\ \mathbf{H}\to\mathbf{0}.\tag{139}$$

并且将其正定性定义为: 存在依赖于${}^*\mathbb{A}'$常数$\gamma>0$, 对于$\forall\,\mathbf{u}\in H^1(\Omega)=W^{1,2}(\Omega)$, 使得

$$\int_{\Omega_0}\mathrm{sym}\mathbf{H}:{}^*\mathbb{A}':\mathrm{sym}\mathbf{H}\mathrm{d}V\geq\gamma\int_{\Omega_0}|\mathrm{sym}\mathbf{H}|^2\mathrm{d}V,\tag{140}$$

其中, $\mathrm{sym}\mathbf{H}=(\mathbf{u}\otimes\nabla+\nabla\otimes\mathbf{u})/2$. 并给出了解满足唯一性的条件, 即当初始应力足够小, 且弹性张量${}^*\mathbb{A}'$满足式(140), 问题的解若存在, 则是唯一的[161].

对于超弹性材料, 在具有初始应力场的参考构形上发生大变形的弹性力学问题在生物材料有着重要应用, 如生物薄膜、动脉壁等. 其应变能函数为初始应力场的函数$\widehat{W}(\mathbf{F},\mathbf{P}^0)$, 其位移解满足局部唯一性的必要条

件是重要研究内容. 对于未知初始应力场, 需进一步证实应变能函数的凸性与解的唯一性的关系.

6 总结

本文综述了若干弹性力学问题的解的唯一性定理, 讨论了证明解的唯一性常用到的方法, 分析了经典结果的物理含义与数学要求, 结合现有弹性理论中解的唯一性定理的发展, 提出若干未解决的问题.

由文中诸多经典结论和待解决问题, 对于某种给定本构关系的弹性材料, 约定了外作用力和弹性体边界的具体形式与正则性, 判断弹性力学边值问题解的唯一性成立与否是数学弹性理论中的基本难题. 易得出在有界域中, 对光滑区域和光滑边界, 当材料弹性张量满足正定性, 应变能函数为严格凸函数时, 对于位移-力边值问题的解的唯一性在局部上总是成立! 然而, 不同的材料分类和不同的边界条件, 其解的唯一性成立的必要条件不尽相同, 如经典线弹性力学位移边值问题与力边值问题成立的充要条件的差异. 对于有限变形非线性理论, 若仅考虑解的唯一性在局部的成立条件, 忽视当应变相差较大时的屈曲和分叉理论, 则与物理要求相悖. 进一步研究解的唯一性定理也在面临着物理现实的挑战, 主要包括以下几方面.

(1) 材料的非均质性、所占区域集合的非凸性以及非光滑性的影响;

(2) 实际施加的载荷一般无法简化为恒载, 即在参考构形上载荷为变形的函数的活载荷更符合物理现实情况;

(3) 在不可压缩的限制条件下, 增加了约束方程 $\det\mathbf{F}=1$, 同时应力响应中增加了不可压缩项(以待确定的压力系数表示), 增大数学分析的难度;

(4) 对于超弹性材料, 建立满足客观性公理和物质不变性公理的应变能函数来正确描述其本构关系是研究其力学性质的关键. 同时, 构造的应变能函数应与建立的弹性力学问题的解的存在性和唯一性相容, 且在有限变形时允许分叉(屈曲);

(5) 残余应力作为初始应力的一种, 其自平衡性质, 以及弹性体中的非协调性变形的存在, 此时不能使用弹性变形的增量理论;

(6) 具有初始应力场的超弹性本构, 应变能函数应是初始应力场和变形的函数, 其凸性与待定初始应力场和变形的唯一性的关系.

参考文献

1 Hadamard J. Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique. Princeton Univ Bull, 1902, 13: 49–52
2 Saint-Venant B D. Mémoire sur la torsion des prismes. Mém Savants Étrangers, 1855, 14: 233–560
3 Kirchhoff G. Über das gleichgewicht und die bewegung eines unendlich dünnen elastischen stabes. J Reine Angew Math, 1859, 56: 285–313
4 Neumann F. Vorlesung über die Theorie des Elasticität der festen Körper und des Lichtäters. Leipzing: Teubner, 1885
5 Knops R J, Payne L E. Uniqueness Theorems in Linear Elasticity. Berlin, Heidelberg: Springer Science & Business Media, 2012
6 Gurtin M E. The Linear Theory of Elasticity. In: Linear Theories of Elasticity and Thermoelasticity. Berlin, Heidelberg: Springer, 1973. 1–295
7 Truesdell C, Noll W. The non-linear field theories of mechanics. In: The Non-Linear Field Theories of Mechanics. Berlin, Heidelberg: Springer, 2004. 1–579
8 Valent T. Boundary Value Problems of Finite Elasticity: Local Theorems on Existence, Uniqueness, and Analytic Dependence on Data. Berlin, Heidelberg: Springer Science & Business Media, 1988
9 Ogden R W. Non-Linear Elastic Deformations. New York: Dover Publications Inc, 1997
10 Ciarlet P G. Mathematical Elasticity. Amsterdam: North-Holland, 1988
11 Ciarlet P G, Nečas J. Injectivity and self-contact in nonlinear elasticity. Arch Rational Mech Anal, 1987, 97: 171–188
12 Ciarlet P G, Nečas J. Unilateral problems in nonlinear, three-dimensional elasticity. Arch Rational Mech Anal, 1985, 87: 319–338
13 Ball J M. Does rank-one convexity imply quasiconvexity? In: Metastability and Incompletely Posed Problems. New York, NY: Springer, 1987. 17–32
14 Šilhavý M. Energy minimization for isotropic nonlinear elastic bodies. In: Multiscale Modeling in Continuum Mechanics and Structured Deformations. Vienna: Springer, 2004. 1–51

15 Hill R. On uniqueness and stability in the theory of finite elastic strain. J Mech Phys Solids, 1957, 5: 229–241

16 Ball J M. Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity. Arch Rational Mech Anal, 1976, 63: 337–403

17 Morrey C B. Quasi-convexity and the lower semicontinuity of multiple integrals. Pac J Math, 1952, 2: 25–53

18 Coral M. On the necessary conditions for the minimum of a double integral. Duke Math J, 1937, 3: 585–592

19 Graves L M. Problems. Duke Math J, 1939, 5: 656–660

20 Qi L, Dai H H, Han D. Conditions for strong ellipticity and m-eigenvalues. Front Math China, 2009, 4: 349–364

21 Knowles J K, Sternberg E. On the ellipticity of the equations of nonlinear elastostatics for a special material. J Elasticity, 1975, 5: 341–361

22 Knowles J K, Sternberg E. On the failure of ellipticity of the equations for finite elastostatic plane strain. Arch Rational Mech Anal, 1976, 63: 321–336

23 Rosakis P. Ellipticity and deformations with discontinuous gradients in finite elastostatics. Arch Rational Mech Anal, 1990, 109: 1–37

24 Simpson H C, Spector S J. On copositive matrices and strong ellipticity for isotropic elastic materials. Arch Rational Mech Anal, 1983, 84: 55–68

25 Chiriţă S, Danescu A, Ciarletta M. On the strong ellipticity of the anisotropic linearly elastic materials. J Elasticity, 2007, 87: 1–27

26 Merodio J. A note on strong ellipticity for transversely isotropic linearly elastic solids. Q J Mech Appl Math, 2003, 56: 589–591

27 Huang Z H, Qi L. Positive definiteness of paired symmetric tensors and elasticity tensors. J Comput Appl Math, 2018, 338: 22–43

28 Che H, Chen H, Wang Y. M-positive semi-definiteness and m-positive definiteness of fourth-order partially symmetric cauchy tensors. J Inequal Appl, 2019, 2019: 32

29 Coleman B D, Noll W. On the thermostatics of continuous media. Arch Rational Mech Anal, 1959, 4: 97–128

30 Coleman B D, Noll W. Material symmetry and thermostatic inequalities in finite elastic deformations. Arch Rational Mech Anal, 1964, 15: 87–111

31 Zhao Y P. Modern Continuum Mechanics (in Chinese). Beijing: Science Press, 2016 [赵亚溥. 近代连续介质力学. 北京: 科学出版社, 2016]

32 Hayes M. Static implications of the strong-ellipticity condition. Arch Rational Mech Anal, 1969, 33: 181–191

33 Truesdell C, Toupin R. Static grounds for inequalities in finite strain of elastic materials. Arch Rational Mech Anal, 1963, 12: 1–33

34 Wang M Z, Wang W, Wu J K. A Course in Elasticity (in Chinese). Beijing: Peking University Press, 2002 [王敏中, 王炜, 武际可. 弹性力学教程. 北京: 北京大学出版社, 2002]

35 Qian W C, Ye K Y. Mechanics of Elasticity (in Chinese). Beijing: Science Press, 1956 [钱伟长, 叶开沅. 弹性力学. 北京: 科学出版社, 1956]

36 Cosserat E, Cosserat F. Sur les équations de la théorie de l'élasticité. CR Acad Sci Paris, 1898, 126: 1089–1091

37 Cosserat E, Cosserat F. Sur la déformation infiniment petite d'un ellipsoid elastique soumis à des efforts donnés sur la frontiére. CR Acad Sci Paris, 1901, 133: 361–364

38 Kelvin L, Thomson W. On the reflection and refraction of light. Philos Mag, 1888, 26: 414–425

39 Zorski H. On the equations describing small deformations superposed on finite deformation. In: 1964 Second-order Effects in Elasticity, Plasticity and Fluid Dynamics (Internat. Sympos., Haifa, 1962). Jerusalem: Jerusalem Academic Press, 1964. 109–128

40 Edelstein W S, Fosdick R L. A note on non-uniqueness in linear elasticity theory. J Appl Math Phys (ZAMP), 1968, 19: 906–912

41 Cosserat E, Cosserat F. Sur la déformation infiniment petite d'un ellipsoid elastique. CR Acad Sci Paris, 1898, 127: 315–318

42 Ericksen J L, Toupin R A. Implications of Hadamard's conditions for elastic stability with respect to uniqueness theorems. Can J Math, 1956, 8: 432–436

43 Hill R. Bifurcation and uniqueness in non-linear mechanics of continua. In: Problems of Continuum Mechanics. Philadelphia: SIAM, 1961. 155–164

44 Hill R. Uniqueness in general boundary-value problems for elastic or inelastic solids. J Mech Phys Solids, 1961, 9: 114–130

45 Truesdell C, Toupin R. The classical field theories. In: Principles of Classical Mechanics and Field Theory/Prinzipien Der Klassischen Mechanik und Feldtheorie. Berlin, Heidelberg: Springer, 1960. 226–858

46 Fosdick R, Piccioni M D, Puglisi G. A note on uniqueness in linear elastostatics. J Elasticity, 2007, 88: 79–86

47 Russo R, Starita G. Uniqueness in linear elastostatics. In: Hetnarski R B, ed. Encyclopedia of Thermal Stresses. Dordrecht: Springer Netherlands, 2014. 6311–6325

48 Maremonti P, Russo R. On existence and uniqueness of classical solutions to the stationary navier-stokes equations and to the traction problem of linear elastostatics. Quad Mat, 1997, 1: 171–251

49 Russo R. On the traction problem in linear elastostatics. J Elasticity, 1992, 27: 57–68
50 Coscia V, Starita G. On the traction problem of classical elastostatics. Lith Math J, 2018, 58: 379–383
51 Truesdell C. Linear Theories of Elasticity and Thermoelasticity: Linear and Nonlinear Theories of Rods, Plates, and Shells. Berlin, Heidelberg: Springer, 2013
52 Kupradze V D, Gegelia T G, Basheleishvili M O, et al. Three-dimensional problems of the mathematical theory of elasticity and thermoelasticity. J Appl Mech, 1980, 47: 222
53 Gurtin M E, Sternberg E. A note on uniqueness in classical elastodynamics. Quart Appl Math, 1961, 19: 169–171
54 Gurtin M E, Toupin R A. A uniqueness theorem for the displacement boundary-value problem of linear elastodynamics. Quart Appl Math, 1965, 23: 79–81
55 Wheeler L T, Sternberg E. Some theorems in classical elastodynamics. Arch Rational Mech Anal, 1968, 31: 51–90
56 Wheeler L T. Some results in the linear dynamical theory of anisotropic elastic solids. Quart Appl Math, 1970, 28: 91–101
57 Yang H, He M C, Lu C S, et al. Deformation and failure processes of kaolinite under tension: Insights from molecular dynamics simulations. Sci China-Phys Mech Astron, 2019, 62: 064612
58 Sheng J Y, Guo H Y, Cao Y P, et al. Regional stretch method to measure the elastic and hyperelastic properties of soft materials. Sci China-Phys Mech Astron, 2018, 61: 024611
59 Gao Y, Liu Z L, Zhuang Z, et al. On the material constants measurement method of a fluid-saturated transversely isotropic poroelastic medium. Sci China-Phys Mech Astron, 2018, 62: 014611
60 Fichera G. Sull'esistenza e sul calcolo delle soluzioni dei problemi al contorno, relativi all'equilibrio di un corpo elastico. Ann Scuola Norm Sup Pisa, 1950, 4: 35–99
61 Gurtin M E, Sternberg E. Theorems in linear elastostatics for exterior domains. Arch Rational Mech Anal, 1961, 8: 99–119
62 Tiffen R. Uniqueness theorems of two-dimensional elasticity theory. Q J Mech Appl Math, 1952, 5: 237–252
63 Muskhelishvili N I. Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity. Dordrecht: Springer Science & Business Media, 2013
64 Tartaglione A. On existence, uniquenss and the maximum modulus theorem in plane linear elastostatics for exterior domains. Ann Univ Ferrara, 2001, 47: 89–106
65 Bramble J H, Payne L E. Some uniqueness theorems in the theory of elasticity. Arch Rational Mech Anal, 1962, 9: 319–328
66 Bramble J H, Payne L. On the uniqueness problem in the second boundary value problem in elasticity. In: Proceedings of the Fourth National Congress of Applied Mechanics, 1961
67 Hayes M. On the displacement boundary-value problem in linear elastostatics. Q J Mech Appl Math, 1966, 19: 151–155
68 Russo R, Starita G. On the traction problem in incompressible linear elasticity for unbounded domains. In: Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences. Singapore: World Scientific, 1996. 91–128
69 Crisci C. The traction problem in plane incompressible linear elastostatics in exterior domains. Math Comput Model, 1997, 25: 59–73
70 Galdi G P, Rionero S. On the well-posedness of the equilibrium problem for linear elasticity in unbounded regions. J Elasticity, 1980, 10: 333–340
71 Wilcox C H. Uniqueness theorems for displacement fields with locally finite energy in linear elastostatics. J Elasticity, 1979, 9: 221–243
72 Howell K B. Uniqueness in linear elastostatics for problems involving unbounded bodies. J Elasticity, 1980, 10: 407–427
73 Russo R, Simader C G. On the exterior two-dimensional Dirichlet problem for elliptic equations. Ricerche Mat, 2009, 58: 315–328
74 Giusti E. Direct Methods in the Calculus of Variations. Singapore: World Scientific, 2003
75 Russo A, Tartaglione A. On the contact problem of classical elasticity. J Elast, 2010, 99: 19–38
76 Russo A, Tartaglione A. Strong uniqueness theorems and the Phragmèn-Lindelöf principle in nonhomogeneous elastostatics. J Elasticity, 2011, 102: 133–149
77 Spector S J. On uniqueness in finite elasticity with general loading. J Elasticity, 1980, 10: 145–161
78 Sivaloganathan J, Spector S J. On the uniqueness of energy minimizers in finite elasticity. J Elast, 2018, 133: 73–103
79 John F. Uniqueness of non-linear elastic equilibrium for prescribed boundary displacements and sufficiently small strains. Comm Pure Appl Math, 1972, 25: 617–634
80 John F. Remarks on the non-linear theory of elasticity. Seminari 1962–1963 Di Analisi Algebra, Geometria e Topologia: Roma, 1962, 2: 474–482

81 Post K D E, Sivaloganathan J. On homotopy conditions and the existence of multiple equilibria in finite elasticity. Proc R Soc Edinburgh-Sect A Math, 1997, 127: 595–614
82 Armanni G. Sulle deformazioni finite dei soldi elastici isotropi. Nuovo Cim, 1915, 9: 427–447
83 Ericksen J L. Inversion of a perfectly elastic spherical shell. Z Angew Math Mech, 1955, 35: 382–385
84 Noll W. A general framework for problems in the-statics of finite elasticity. North-Holland Math Stud, Elsevier, 1978, 30: 363–387
85 Antman S S. The eversion of thick spherical shells. Arch Rational Mech Anal, 1979, 70: 113–123
86 Chadwick P. The existence and uniqueness of solutions to two problems in the Mooney-Rivlin theory for rubber. J Elasticity, 1972, 2: 123–128
87 Chadwick P, Haddon E W. Inflation-extension and eversion of a tube of incompressible isotropic elastic material. IMA J Appl Math, 1972, 10: 258–278
88 Wang C-C, Truesdell C. Introduction to Rational Elasticity. Amsterdam: Springer Science & Business Media, 1973
89 Adeleke S A. On the problem of eversion for incompressible elastic materials. J Elasticity, 1983, 13: 63–69
90 Almansi E. La teoria delle distorsioni e le deformazioni finite dei solidi elastici. Rend Accad Lincei (5A), 1916, 25: 191–192
91 Gurtin M E. On the nonlinear theory of elasticity. North-holland Math Stud, 1978, 30: 237–253
92 Simpson H C, Spector S J. On bifurcation in finite elasticity: Buckling of a rectangular rod. J Elasticity, 2008, 92: 277–326
93 Rivlin R S. Stability of pure homogeneous deformations of an elastic cube under dead loading. Quart Appl Math, 1974, 32: 265–271
94 Gurtin M E, Spector S J. On stability and uniqueness in finite elasticity. Arch Rational Mech Anal, 1979, 70: 153–165
95 Spector S J. On uniqueness for the traction problem in finite elasticity. J Elasticity, 1982, 12: 367–383
96 Gurtin M E. On Uniqueness in Finite Elasticity. Dordrecht: Springer Netherlands, 1982. 191–199
97 Signorini A. Sopra alcune questioni di elastostatica. Atti della Societa Italiana per il Progresso delle Scienze, 1933, 21: 143–148
98 Signorini A. Trasformazioni termoleastiche finite. Ann Matematica, 1949, 30: 1–72
99 Signorini A. Un semplice esempio di incompatibilità tra la elastostatica classica e la teoria delle deformazioni elastiche finite. Rend Accad Naz, 1950, Lincei (VIII): 276–281
100 Stoppelli F. Un teorema di esistenza e di unicita relativo alle equazioni dell'elastostatica isoterma per deformazioni finite. Ricerche Mat, 1954, 3: 247–267
101 Stoppelli F. Sulla sviluppabilità in serie di potenze di un parametro delle soluzioni delle equazioni dell'elastostatica isoterma. Ricerche Mat, 1955, 4: 58–73
102 Stoppelli F. Sull'esistenza di soluzioni delle equazioni dell'elastostatica isoterma nel caso di sollecitazioni dotate di assi di equilibrio. Ricerche Mat, 1957, 6: 241–287
103 Stoppelli F. Su un sistema di equazioni integro-differenziali interessante l'elastostatica. Ricerche Mat, 1957, 6: 11–26
104 Buren W V. On the existence and uniqueness of solutions to boundary value problems in finite elasticity. Dissertation for Doctoral Degree. Pittsburgh: Carnegie-Mellon University, 1968
105 Marsden J E, Wan Y H. Linearization stability and signorini series for the traction problem in elastostatics. Proc R Soc Edinburgh-Sect A Math, 1983, 95: 171–180
106 Grioli G. Mathematical Theory of Elastic Equilibrium: Recent Results. Berlin, Heidelberg: Springer Science & Business Media, 2012
107 Capriz G, Guidugli P P. On Signorini's perturbation method in finite elasticity. Arch Rational Mech Anal, 1974, 57: 1–30
108 Capriz G, Guidugli P P. The role of Fredholm conditions in signorin's perturbation method. Arch Rational Mech Anal, 1979, 70: 261–288
109 Capriz G, Podio-Guidugli P. Questions of uniqueness in finite elasticity. In: Trends in Applications of Pure Mathematics to Mechanics Vol. III. 1981. 76–95
110 Capriz G, Podio-Guidugli P. A generalization of signorini's perturbation method suggested by two problems of grioli. Rend Semin Mat U Pad, 1982, 68: 149–162
111 Romano A, Marasco A. Continuum Mechanics: Advanced Topics and Research Trends. Boston: Birkhäuser, 2010
112 Iaccarino G L. Signorini's method for live loads and second-order effects in elastostatics. In: Encyclopedia of Thermal Stresses. Netherlands: Springer, 2014. 4367–4380
113 Iaccarino G L, Marasco A, Romano A. Signorini's method for live loads and second-order effects. Int J Eng Sci, 2006, 44: 312–324
114 Valent T. Teoremi di esistenza e unicità in elastostatica finita. Rend Semin Mat U Pad, 1978, 60: 165–181
115 Ciarlet P G, Destuynder P. A justification of a nonlinear model in plate theory. Comput Methods Appl Mech Eng, 1979, 17-18: 227–258

116 Marsden J E, Hughes T J. Topics in the mathematical foundations of elasticity. In: Nonlinear Analysis and Mechanics. Research Notes in Mathematics. Vol. 2. No. 27. Boston: Pitman Advanced Publishing Program, 1978. 30–285
117 Raïssouli M, Oudaani J. Local existence, uniqueness and regularity of a special solution for a mixed problem in elasticity. Ann Sci Math Quebec, 2003, 27: 191–202
118 Haidar S. Convexity conditions and uniqueness and regularity of equilibria in nonlinear elasticity. In: Integral Methods in Science and Engineering. Boston: Birkhäuser, 2008. 109–118
119 Hayes M. Uniqueness for the mixed boundary-value problem in the theory of small deformations superimposed on large. Arch Rational Mech Anal, 1964, 16: 238–242
120 Huang Z P. Fundamentals of continuum mechanics (in Chinese). Beijing: Higher Education Press, 2012 [黄筑平. 连续介质力学基础. 北京: 高等教育出版社, 2012]
121 Knops R J, Stuart C A. Quasiconvexity and uniqueness of equilibrium solutions in nonlinear elasticity. Arch Rational Mech Anal, 1984, 86: 233–249
122 Müller S, Šverák V. Convex integration for lipschitz mappings and counterexamples to regularity. Ann Math, 2003, 157: 715–742
123 Taheri A. Quasiconvexity and uniqueness of stationary points in the multi-dimensional calculus of variations. Proc Amer Math Soc, 2003, 131: 3101–3108
124 Knops R J, Trimarco C, Williams H T. Uniqueness and complementary energy in nonlinear elastostatics. Meccanica, 2003, 38: 519–534
125 Spector D E, Spector S J. Uniqueness of equilibrium with sufficiently small strains in finite elasticity. Arch Rational Mech Anal, 2019, 233: 409–449, arXiv: 1804.06971
126 Gao D Y, Neff P, Roventa I, et al. On the convexity of nonlinear elastic energies in the right cauchy-green tensor. J Elast, 2017, 127: 303–308
127 Ball J M, Schaeffer D G. Bifurcation and stability of homogeneous equilibrium configurations of an elastic body under dead-load tractions. Math Proc Camb Phil Soc, 1983, 94: 315–339
128 Zhang K. Energy minimizers in nonlinear elastostatics and the implicit function theorem. Arch Rational Mech Anal, 1991, 114: 95–117
129 Ball J M. Some open problems in elasticity. In: Geometry, Mechanics, and Dynamics. New York, NY: Springer, 2002. 3–59
130 Ball J M. Progress and puzzles in nonlinear elasticity. In: Poly-, Quasi- and Rank-One Convexity in Applied Mechanics. Vienna: Springer, 2010. 1–15
131 Ball J M, Mizel V J. One-dimensional variational problems whose minimizers do not satisfy the euler-lagrange equation. In: Analysis and thermomechanics. Berlin, Heidelberg: Springer, 1987. 285–348
132 Spadaro E N. Non-uniqueness of minimizers for strictly polyconvex functionals. Arch Rational Mech Anal, 2009, 193: 659–678
133 Ibanez W D, Kronenberg A K. Experimental deformation of shale: Mechanical properties and microstructural indicators of mechanisms. Int J Rock Mech Min Sci GeoMech Abstracts, 1993, 30: 723–734
134 Niandou H, Shao J F, Henry J P, et al. Laboratory investigation of the mechanical behaviour of tournemire shale. Int J Rock Mech Min Sci, 1997, 34: 3–16
135 Wang Q, Wang P, Xiang D G, et al. Anisotropic property of mechanical parameters of shales (in Chinese). Nat Gas Ind, 2012, 32: 62–65 [王倩, 王鹏, 项德贵, 等. 页岩力学参数各向异性研究. 天然气工业, 2012, 32: 62–65]
136 Diao H Y. Rock mechanical properties and brittleness evaluation of shale reservoir (in Chinese). Acta Petrol Sin, 2013, 29: 3300–3306 [刁海燕. 泥页岩储层岩石力学特性及脆性评价. 岩石学报, 2013, 29: 3300–3306]
137 Shen W, Zhao Y P. Quasi-static crack growth under symmetrical loads in hydraulic fracturing. J Appl Mech, 2017, 84: 081009
138 Shen W, Zhao Y P. Combined effect of pressure and shear stress on penny-shaped fluid-driven cracks. J Appl Mech, 2018, 85: 031003
139 Sun F, Shen W, Zhao Y P. Deflected trajectory of a single fluid-driven crack under anisotropic *in-situ* stress. Extreme Mech Lett, 2019, 29: 100483
140 Shen W, Yang F, Zhao Y P. Unstable crack growth in hydraulic fracturing: The combined effects of pressure and shear stress for a power-law fluid. Eng Fract Mech, 2020, 225: 106245
141 Liu C, Shen Y K, Zhang J N, et al. Production analysis in shale gas reservoirs based on fracturing-enhanced permeability areas. Sci China-Phys Mech Astron, 2019, 62: 104611
142 Gao M N, Huang X F, Zhao Y P. Formation of wavy-ring crack in drying droplet of protein solutions. Sci China Tech Sci, 2018, 61: 949–958
143 Zhao Y P. Physical Mechanics of Surfaces and Interfaces (in Chinese). Beijing: Science Press, 2012 [赵亚溥. 表面与界面物理力学. 北京: 科

学出版社, 2012]
144 Zhao Y P. Nano and Mesoscopic Mechanics (in Chinese). Beijing: Science Press, 2014 [赵亚溥. 纳米与介观力学. 北京: 科学出版社, 2014]
145 Wang Z, Zhao Y. Self-instability and bending behaviors of nano plates. Acta Mech Solid Sin, 2009, 22: 630–643
146 Wang Z Q, Zhao Y P, Huang Z P. The effects of surface tension on the elastic properties of nano structures. Int J Eng Sci, 2010, 48: 140–150
147 Fung Y C. Wu Y P, et al. translated. A First Course in Continuum Mechanics (in Chinese). 3nd ed. Chongqing: Chongqing University Press, 1997 [冯元桢. 吴云鹏, 等译. 连续介质力学导论. 第3版. 重庆: 重庆大学出版社, 1997]
148 Cauchy A-L. Sur l'équilibre et le mouvement intérieur des corps considérés comme des masses continues. Ex de Math, 1829, 4: 293–319
149 Hoger A. On the determination of residual stress in an elastic body. J Elasticity, 1986, 16: 303–324
150 Hoger A. On the residual stress possible in an elastic body with material symmetry. Arch Rational Mech Anal, 1985, 88: 271–289
151 Hoger A. Residual stress in an elastic body: A theory for small strains and arbitrary rotations. J Elasticity, 1993, 31: 1–24
152 Merodio J, Ogden R W. Extension, inflation and torsion of a residually stressed circular cylindrical tube. Continuum Mech Thermodyn, 2016, 28: 157–174
153 Merodio J, Ogden R W, Rodríguez J. The influence of residual stress on finite deformation elastic response. Int J Non-Linear Mech, 2013, 56: 43–49
154 Shams M, Destrade M, Ogden R W. Initial stresses in elastic solids: Constitutive laws and acoustoelasticity. Wave Motion, 2011, 48: 552–567
155 Wang H M, Luo X Y, Gao H, et al. A modified holzapfel-ogden law for a residually stressed finite strain model of the human left ventricle in diastole. Biomech Model Mechanobiol, 2014, 13: 99–113
156 Zhu J, Ru C, Chen W. On the non-uniqueness of solution in surface elasticity theory. Math Mech Solids, 2012, 17: 329–337
157 Zhao Y P. A Course in Rational Mechanics (in Chinese). Beijing: Science Press, 2020 [赵亚溥. 理性力学教程. 北京: 科学出版社, 2020]
158 Biot M A. Mechanics of Incremental Deformations. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1965
159 Carlson D E, Man C-S. On the traction problem in linear elasticity with initial stress, In: Characterization of Mechanical Properties of Materials. New York: American Society of Mechanical Engineers, 1992. 83–92
160 Man C S, Carlson D E. On the traction problem of dead loading in linear elasticity with initial stress. Arch Rational Mech Anal, 1994, 128: 223–247
161 Hoger A. Positive definiteness of the elasticity tensor of a residually stressed material. J Elasticity, 1995, 36: 201–226

附录A

A1 Da Silva定理

平衡问题要求变形后, 即在当前构形下, 合力与合力矩为零:

$$\begin{aligned}&\int_{\partial\Omega}\mathbf{t}\mathrm{d}s+\int_{\Omega}\rho\mathbf{b}\,\mathrm{d}v=\mathbf{0},\\&\int_{\partial\Omega}\mathbf{r}\times\mathbf{t}\mathrm{d}s+\int_{\Omega}\rho\mathbf{r}\times\mathbf{b}\,\mathrm{d}v=\mathbf{0},\end{aligned}\tag{a1}$$

其中距离固定点$\mathbf{o}$的位置矢量为$\mathbf{r}=\mathbf{x}-\mathbf{o}$. 将式(a1)转化为参考构形下的变量并积分得到

$$\begin{aligned}&\int_{\partial\Omega_0}\mathbf{t}_0\mathrm{d}S+\int_{\Omega_0}\rho_0\mathbf{b}\,\mathrm{d}V=\mathbf{0},\\&\int_{\partial\Omega_0}\mathbf{r}\times\mathbf{t}_0\mathrm{d}S+\int_{\Omega_0}\rho_0\mathbf{r}\times\mathbf{b}\,\mathrm{d}V=\mathbf{0},\end{aligned}\tag{a2}$$

其中, $\mathbf{r}$包含变形后的位置, 无法直接在参考构形中表示. 对任意矢量$\mathbf{v}_1$和$\mathbf{v}_2$, 根据叉积运算和置换张量$\boldsymbol{\mathcal{E}}$的性质:

$$\mathbf{v}_1\times\mathbf{v}_2=\mathbf{v}_1\otimes\mathbf{v}_2:\boldsymbol{\mathcal{E}}=\boldsymbol{\mathcal{E}}:\mathbf{v}_1\otimes\mathbf{v}_2=-\boldsymbol{\mathcal{E}}:\mathbf{v}_2\otimes\mathbf{v}_1.\tag{a3}$$

则张量$\mathbf{v}_1\otimes\mathbf{v}_2$的对称性等价于$\boldsymbol{\mathcal{E}}:\mathbf{v}_1\otimes\mathbf{v}_2=\mathbf{0}$. 根据Signorini引入的张量:

$$\mathbf{A}=\int_{\partial\Omega_0}\mathbf{r}\otimes\mathbf{t}_0\mathrm{d}S+\int_{\Omega_0}\rho_0\mathbf{r}\otimes\mathbf{b}\mathrm{d}V.\tag{a4}$$

因此合力矩为零的式(a2)成立的必要条件为: 张量$\mathbf{A}$为对称张量.

Da Silva在1851年提出的定理: 施加载荷引起的合力矩可以通过物体绕原点一定角度旋转消失, 即将式(a2)描述在参考构形上.

假设一个合适的均匀旋转张量$\mathbf{Q}$使得位置矢量变为$\mathbf{Qr}$, 因此旋转后的合力矩表示为

$$\mathbf{QA}=\int_{\partial\Omega_0}\mathbf{Qr}\otimes\mathbf{t}_0\mathrm{d}S+\int_{\Omega_0}\rho_0\mathbf{Qr}\otimes\mathbf{b}\mathrm{d}V.\tag{a5}$$

此时合力矩为零的条件是$\mathbf{QA}$为对称张量: $\mathbf{QA}-\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}=\mathbf{0}$. 通过极分解$\mathbf{A}=\mathbf{PS}$而找到合适的旋转$\mathbf{Q}=\mathbf{P}^{\mathrm{T}}$或者$-\mathbf{P}^{\mathrm{T}}$使得旋转后的合力矩为零. 因此存在合适旋转, 不改变其重要性质, 使得在参考构形下满足

$$\begin{aligned}&\int_{\partial\Omega_0}\mathbf{t}_0\mathrm{d}S+\int_{\Omega_0}\rho_0\mathbf{b}\mathrm{d}V=\mathbf{0},\\&\int_{\partial\Omega_0}\mathbf{r}_0\times\mathbf{t}_0\mathrm{d}S+\int_{\Omega_0}\rho_0\mathbf{r}_0\times\mathbf{b}\,\mathrm{d}V=\mathbf{0},\end{aligned}\tag{a6}$$

其中, $\mathbf{r}_0=\mathbf{X}-\mathbf{O}$, 即参考构形上合力与合力矩为零.

A2 Signorini问题中的作用力相容性条件

在Signorini唯一性问题中, 每个$\mathbf{u}_n$对应的方程均需满足Signorini相容性的要求, 即每个方程不产生合外力, 也不产生合外力矩.

首先不妨根据式(a2)和(a6), 将相容性条件表示为

$$\int_{\partial\Omega_0}\mathbf{u}\times\mathbf{t}_0\mathrm{d}S+\int_{\Omega_0}\rho_0\mathbf{u}\times\mathbf{b}\mathrm{d}V=\mathbf{0},\tag{a7}$$

其中$\mathbf{u}=\mathbf{r}-\mathbf{r}_0$满足力矩方程. 将体力密度$\mathbf{b}=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n\mathbf{b}_n$和面力密度$\mathbf{t}_0=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n\mathbf{t}_{0n}$代入式(a6), 得到

$$\begin{aligned}&\int_{\partial\Omega_0}\mathbf{t}_{0n}\mathrm{d}S+\int_{\Omega_0}\rho_0\mathbf{b}_n\mathrm{d}V=\mathbf{0},\\&\int_{\partial\Omega_0}\mathbf{r}_0\times\mathbf{t}_{0n}\mathrm{d}S+\int_{\Omega_0}\rho_0\mathbf{r}_0\times\mathbf{b}_n\mathrm{d}V=\mathbf{0}.\end{aligned}\tag{a8}$$

由$\mathbf{u}_n$所对应的方程:

$$\begin{aligned}&\mathrm{Div}\mathbf{L}(\widetilde{\mathbf{E}}_n)+\rho_0\mathbf{b}_n^*=\mathbf{0},\\&\mathbf{L}(\widetilde{\mathbf{E}}_n)\cdot\mathbf{N}=\mathbf{t}_{0n}^*,\ \text{在}\,\partial\Omega_0\text{上},\end{aligned}\tag{a9}$$

其中有效载荷为

$$\begin{aligned}&\rho_0\mathbf{b}_n^*=\rho_0\mathbf{b}_n+\mathrm{Div}\mathbf{Q}_n(\mathbf{H}_1,\mathbf{H}_2,\ldots,\mathbf{H}_{n-1}),\\&\mathbf{t}_{0n}^*=\mathbf{t}_{0n}-\mathbf{Q}_n(\mathbf{H}_1,\mathbf{H}_2,\ldots,\mathbf{H}_{n-1})\cdot\mathbf{N},\\&n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots.\end{aligned}\tag{a10}$$

易得到有效载荷$\mathbf{b}_n^*$, $\mathbf{t}_{0n}^*$需满足

$$\begin{aligned}&\int_{\partial\Omega_0}\mathbf{t}_{0n}^*\mathrm{d}S+\int_{\Omega_0}\rho_0\mathbf{b}_n^*\mathrm{d}V=\mathbf{0},\\&\int_{\partial\Omega_0}\mathbf{r}_0\times\mathbf{t}_{0n}^*\mathrm{d}S+\int_{\Omega_0}\rho_0\mathbf{r}_0\times\mathbf{b}_n^*\mathrm{d}V=\mathbf{0}.\end{aligned}\tag{a11}$$

由式(a10), 有效载荷与$\mathbf{Q}_n$关系式:

$$\begin{aligned}&-\mathbf{Q}_n\cdot\mathbf{N}=\mathbf{t}_{0n}^*-\mathbf{t}_{0n},\\&\mathrm{Div}\mathbf{Q}_n=\rho_0(\mathbf{b}_n^*-\mathbf{b}_n).\end{aligned}\tag{a12}$$

为得到式(a11)成立的条件, 将式(a12)代入式(a8)和(a11), 得到

$$\begin{aligned}&\int_{\partial\Omega_0}(\mathbf{t}_{0n}-\mathbf{t}_{0n}^*)\mathrm{d}S+\int_{\Omega_0}\rho_0(\mathbf{b}_n-\mathbf{b}_n^*)\mathrm{d}V=\mathbf{0},\\&\int_{\partial\Omega_0}\mathbf{Q}_n\cdot\mathbf{N}\mathrm{d}S=\int_{\Omega_0}\mathrm{Div}\mathbf{Q}_n\mathrm{d}V,\end{aligned}\tag{a13a}$$

$$\begin{aligned}&\int_{\partial\Omega_0}\mathbf{r}_0\times(\mathbf{t}_{0n}-\mathbf{t}_{0n}^*)\mathrm{d}S+\int_{\Omega_0}\rho_0\mathbf{r}_0\times(\mathbf{b}_n-\mathbf{b}_n^*)\mathrm{d}V=0,\\&\int_{\partial\Omega_0}\mathbf{r}_0\times\mathbf{Q}_n\cdot\mathbf{N}\mathrm{d}S=\int_{\Omega_0}\mathbf{r}_0\times\mathrm{Div}\mathbf{Q}_n\mathrm{d}V.\end{aligned}\tag{a13b}$$

其中式(a13a)根据散度定理自然满足. 对任意矢量$\mathbf{r}_0$和张量$\mathbf{Q}_n$, 利用运算:

$$(\mathbf{r}_0\otimes\mathbf{Q}_n)\cdot\nabla=(\mathbf{r}_0\otimes\nabla)\cdot\mathbf{Q}_n^{\mathrm{T}}+\mathbf{r}_0\otimes(\mathbf{Q}_n\cdot\nabla),\tag{a14}$$

由于$\mathbf{r}_0\otimes\nabla=\mathbf{I}$, 根据散度定理对式(a14)积分得到

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega_0}\left[(\mathbf{r}_0\otimes\mathbf{Q}_n)\cdot\mathbf{N}\right]\mathrm{d}S&=\int_{\Omega_0}\left[(\mathbf{r}_0\otimes\mathbf{Q}_n)\cdot\nabla\right]\mathrm{d}V\\&=\int_{\Omega_0}\left[\mathbf{Q}_n^{\mathrm{T}}+\mathbf{r}_0\otimes\mathrm{Div}\mathbf{Q}_n\right]\mathrm{d}V.\end{aligned}\tag{a15}$$

根据置换张量的性质式(a3), 则式(a13b)和(a15)成立的要求等价于:

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}:\int_{\Omega_0}\mathbf{Q}_n^{\mathrm{T}}\mathrm{d}V=\mathbf{0},\tag{a16}$$

即$\mathbf{u}_n$对应的有效载荷满足合力与合力矩为零, 即式(a11)成立要求$\int_{\Omega_0}\mathbf{Q}_n^{\mathrm{T}}\mathrm{d}V$为对称张量.

由于应力展开式:

$$\mathbf{P}=\sum_{s=1}^{\infty}\widetilde{\mathbf{P}}_s\left(\sum_{r=1}^{\infty}\varepsilon^r\mathbf{H}_r\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n\mathbf{P}_n(\mathbf{H}_1,\mathbf{H}_2,\ldots,\mathbf{H}_n),\tag{a17}$$

展开项为

$$\mathbf{P}_n=\mathbf{L}(\widetilde{\mathbf{E}}_n)+\mathbf{Q}_n(\mathbf{H}_1,\mathbf{H}_2,\ldots,\mathbf{H}_{n-1}),\tag{a18}$$

其中$\mathbf{L}(\mathbf{E})$为$\mathbf{E}$的线性关系, $\widetilde{\mathbf{E}}_n=(\mathbf{H}_n+\mathbf{H}_n^{\mathrm{T}})/2$为小应变; $\widetilde{\mathbf{P}}_s(\mathbf{H})$表示为

$$\widetilde{\mathbf{P}}_1(\mathbf{H}) = \mathbf{L}(\widetilde{\mathbf{E}}),$$
$$\widetilde{\mathbf{P}}_2(\mathbf{H}) = \mathbf{L}\left(\frac{1}{2}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}\right) + \mathbf{L}_2(\widetilde{\mathbf{E}}) + \mathbf{H}\mathbf{L}(\widetilde{\mathbf{E}}). \tag{a19}$$

同时位移梯度展开式:

$$\mathbf{H} = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \mathbf{H}_n. \tag{a20}$$

根据Cauchy应力与PK1应力的关系:

$$J\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{P}\mathbf{F}^{\mathrm{T}} = \mathbf{P}(\mathbf{I}+\mathbf{H})^{\mathrm{T}}, \tag{a21}$$

将式(a17), (a18)和(a20)代入式(a21), 由于Cauchy应力的对称性, 则对于ε^n, 有$\mathbf{P}_n + \sum_{m=1}^{n-1} \mathbf{P}_m \mathbf{H}_{n-m}^{\mathrm{T}}$为对称张量. 根据式(a18)和$\mathbf{L}(\widetilde{\mathbf{E}}_n)$的对称性, 显然$\int_{\Omega_0} \mathbf{Q}_n^{\mathrm{T}} \mathrm{d}V$为对称张量等价于$\sum_{m=1}^{n-1} \int_{\Omega_0} \mathbf{H}_{n-m} \mathbf{P}_m^{\mathrm{T}} \mathrm{d}V$为对称张量.

根据$\mathbf{u}_{n-m} \otimes \nabla = \mathbf{H}_{n-m}$以及运算:

$$(\mathbf{u}_{n-m} \otimes \mathbf{P}_m) \cdot \nabla$$
$$= (\mathbf{u}_{n-m} \otimes \nabla) \cdot \mathbf{P}_m^{\mathrm{T}} + \mathbf{u}_{n-m} \otimes (\mathbf{P}_m \cdot \nabla), \tag{a22}$$

则有积分:

$$\sum_{m=1}^{n-1} \int_{\Omega_0} \mathbf{H}_{n-m} \mathbf{P}_m^{\mathrm{T}} \mathrm{d}V = \sum_{m=1}^{n-1} \int_{\Omega_0} \left(\mathbf{u}_{n-m} \otimes \mathbf{P}_m\right) \cdot \mathbf{N} \mathrm{d}S - \sum_{m=1}^{n-1} \int_{\Omega_0} \mathbf{u}_{n-m} \otimes (\mathbf{P}_m \cdot \nabla) \mathrm{d}V, \tag{a23}$$

式(a23)为对称性张量是$\mathbf{u}_n$对应方程作用力的相容性条件. 根据控制方程和边界条件, 这一条件等价于:

$$\sum_{m=1}^{n-1} \left(\int_{\Omega_0} \mathbf{u}_{n-m} \times \mathbf{t}_{0m} \mathrm{d}S + \int_{\Omega_0} \mathbf{u}_{n-m} \times \rho_0 \mathbf{b}_m \mathrm{d}V \right) = \mathbf{0}. \tag{a24}$$

A3　作用力无平衡轴条件

定义一阶展开式对应的张量:

$$\mathbf{A}_1 = \int_{\partial\Omega_0} \mathbf{r}_0 \otimes \mathbf{t}_{01} \mathrm{d}S + \int_{\Omega_R} \rho_0 \mathbf{r}_0 \otimes \mathbf{b}_1 \mathrm{d}V. \tag{a25}$$

相容性条件要求该张量对称. 作用力经过旋转张量$\mathbf{Q}$旋转后为$\mathbf{Q}\mathbf{t}_{01}$和$\mathbf{Q}\mathbf{b}_1$, 在其他条件均不改变的情况下, 讨论其相容性, 即$\mathbf{A}_1\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}$的对称性. 不妨构造反对称张量$\mathbf{M}$:

$$\mathbf{M} = \varepsilon \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{Q}) = \varepsilon(\mathbf{A}_1\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} - \mathbf{Q}\mathbf{A}_1)$$
$$\equiv \int_{\Omega_0} [\widehat{\mathbf{P}}(\mathbf{F})^{\mathrm{T}} - \widehat{\mathbf{P}}(\mathbf{F})] \mathrm{d}V. \tag{a26}$$

为证明式(a26)中的恒等式成立, 首先根据置换张量性质不难有

$$\int_{\partial\Omega_0} \mathbf{r}_0 \times \mathbf{Q}\mathbf{t}_{01} \mathrm{d}S + \int_{\Omega_0} \mathbf{r}_0 \times \rho_0 \mathbf{Q}\mathbf{b}_1 \mathrm{d}V = \boldsymbol{\mathcal{E}} : \varepsilon \mathbf{A}_1 \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}. \tag{a27}$$

同样, 矢径$\mathbf{r}_0$与PK1应力响应函数$\widehat{\mathbf{P}}(\mathbf{F})$的叉积表示为$\mathbf{r}_0 \times \widehat{\mathbf{P}}(\mathbf{F}) = \boldsymbol{\mathcal{E}} : \mathbf{r}_0 \otimes \widehat{\mathbf{P}}(\mathbf{F})$, 则其散度为

$$\mathrm{Div}[\mathbf{r}_0 \times \widehat{\mathbf{P}}(\mathbf{F})] = \mathrm{Div}[\boldsymbol{\mathcal{E}} : \mathbf{r}_0 \otimes \widehat{\mathbf{P}}(\mathbf{F})]$$
$$= \boldsymbol{\mathcal{E}} : \mathrm{Div}[\mathbf{r}_0 \otimes \widehat{\mathbf{P}}(\mathbf{F})]. \tag{a28}$$

根据散度公式

$$\mathrm{Div}[\mathbf{r}_0 \otimes \widehat{\mathbf{P}}(\mathbf{F})] = \mathbf{r}_0 \otimes \mathrm{Div}\widehat{\mathbf{P}}(\mathbf{F}) + \widehat{\mathbf{P}}(\mathbf{F})^{\mathrm{T}},$$

则有

$$\mathrm{Div}[\mathbf{r}_0 \times \widehat{\mathbf{P}}(\mathbf{F})] = \boldsymbol{\mathcal{E}} : [\mathbf{r}_0 \otimes \mathrm{Div}\widehat{\mathbf{P}}(\mathbf{F})] + \boldsymbol{\mathcal{E}} : \widehat{\mathbf{P}}(\mathbf{F})^{\mathrm{T}}$$
$$= \mathbf{r}_0 \times \mathrm{Div}\widehat{\mathbf{P}}(\mathbf{F}) + \boldsymbol{\mathcal{E}} : \widehat{\mathbf{P}}(\mathbf{F})^{\mathrm{T}}. \tag{a29}$$

根据张量的散度定理, 有

$$\int_{\partial\Omega_0} \mathbf{r}_0 \times [\widehat{\mathbf{P}}(\mathbf{F})\mathbf{N}] \mathrm{d}S = \int_{\Omega_0} \mathrm{Div}[\mathbf{r}_0 \times \widehat{\mathbf{P}}(\mathbf{F})] \mathrm{d}V$$
$$= \int_{\Omega_0} [\mathbf{r}_0 \times \mathrm{Div}\widehat{\mathbf{P}}(\mathbf{F}) + \boldsymbol{\mathcal{E}} : \widehat{\mathbf{P}}(\mathbf{F})^{\mathrm{T}}] \mathrm{d}V$$
$$= \int_{\Omega_0} \mathbf{r}_0 \times \mathrm{Div}\widehat{\mathbf{P}}(\mathbf{F}) - \boldsymbol{\mathcal{E}} : \widehat{\mathbf{P}}(\mathbf{F}) \mathrm{d}V. \tag{a30}$$

将控制方程和力边界条件代入式(a30), 并结合式(a27)得到

$$-\int_{\Omega_R} \boldsymbol{\mathcal{E}} : \widehat{\mathbf{P}}(\mathbf{F})^{\mathrm{T}} \mathrm{d}V + \boldsymbol{\mathcal{E}} : \varepsilon \mathbf{A}_1 \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} = \mathbf{0}, \tag{a31}$$

即得到关系:

$$\varepsilon \mathbf{A}_1 \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} = \int_{\Omega_0} \widehat{\mathbf{P}}(\mathbf{F})^{\mathrm{T}} \mathrm{d}V. \tag{a32}$$

通过式(a32)的转置, 式(a26)中的恒等式得证.

对式(a26)中的映射$\boldsymbol{\Phi} : \mathbb{O}^3 \to \mathbb{W}$, 在$\mathbf{Q}$=$\mathbf{I}$处显然有$\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{I})$=0. 正交张量空间$\mathbb{O}^3$在此处的切空间(Tangent Space)为反对称张量空间$\mathbb{W}$, 此时$\mathbf{Q}$=$\mathbf{I}$邻近有$\delta\mathbf{Q}$=$\mathbf{W} \in \mathbb{W}$和微分

$$\delta\mathbf{\Phi}(\mathbf{I})[\mathbf{W}] = \mathbf{A}_1\mathbf{W}^{\mathrm{T}} - \mathbf{W}\mathbf{A}_1 = -(\mathbf{A}_1\mathbf{W} + \mathbf{W}\mathbf{A}_1). \tag{a34}$$

根据反函数定理(Inverse Function Theorem), 函数$\mathbf{\Phi}(\mathbf{Q})$存在反函数的充分条件为全微分式(a34)在$\mathbf{Q}=\mathbf{I}$处可逆. 这一条件等价于$\mathbf{A}_1\mathbf{W}+\mathbf{A}_1\mathbf{W}=\mathbf{0}$在空间$\mathbb{W}$中只有唯一零解$\mathbf{W}=\mathbf{0}$. $\mathbf{W}$的反偶矢量$\boldsymbol{\omega}$满足齐次线性方程$(\mathbf{A}_1-\mathbf{I}\mathrm{tr}\mathbf{A}_1)\boldsymbol{\omega}=\mathbf{0}$, 即微分$\delta\mathbf{\Phi}$在$\mathbf{Q}=\mathbf{I}$处可逆等价于

$$\det(\mathbf{A}_1 - I\,\mathrm{tr}\mathbf{A}_1) \neq 0. \tag{a35}$$

相反, $\det(\mathbf{A}_1-\mathbf{I}\mathrm{tr}\mathbf{A}_1)=0$说明作用力$\mathbf{t}_{01}$, $\mathbf{b}_1$存在一个(平衡)轴, 使得围绕该轴的任意旋转不改变外加载荷, 从而旋转不改变该载荷下的平衡状态, $\mathbf{A}_1\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}$为对称张量. 此状态称为该参考构形下载荷的平衡轴.

附录B

表a1 通用表示法

Table a1 General scheme of notation

符号	释义
$A, a\ldots$	斜体字母(除去X, Z), 表示标量(场)或者指标
$\mathbf{a}, \mathbf{b}\ldots$	正体粗体小写字母, 表示矢量(场)
$\mathbf{A}, \mathbf{B}\ldots$	正体粗体大写字母(除去$\mathbf{X}$, $\mathbf{Z}$), 二阶张量(场)
$\mathcal{A}, \mathcal{B}\ldots$	花体字母, 三阶张量(场)
${}^*\mathbb{A}, {}^*\mathbb{B}, \ldots$	正体星标字母, 四阶张量(场)
$\mathbb{A}, \mathbb{B}, \ldots$	正体的字母, 表示空间或集合
$\alpha, \beta\ldots$	斜体希腊字母, 表示参数
X, Z ($\mathbf{X}, \mathbf{Z}, \mathbf{x}, \mathbf{z}$)	物质点
$\widetilde{(\cdot)}, \widehat{(\cdot)}$	表示响应函数

表a2 常用符号索引

Table a2 Index of frequently used symbols

符号	释义	符号	释义
$[a, b]$	闭线段$\{\varepsilon a + (1-\varepsilon)b;\ 0 \le \varepsilon \le 1\}$	${}^*\mathbb{M}^n, {}^*\mathbb{M}^n_+$	n阶实矩阵、正实矩阵的集合
${}^*\mathbb{A}$	PK1应力对应的弹性张量(${}^*\mathbb{A}^0$)	$\mathbf{n}, \mathbf{N}$	参考构形, 当前构形面积元的外法向单位矢量
$\mathbf{b}$	单位质量体力密度	$o(\phi(\mathbf{x}))$	若$f(\mathbf{x}) = o(\phi(\mathbf{x}))$, 有$\lim\limits_{\lvert x\rvert\to\infty} f(\mathbf{x})/\phi(\mathbf{x}) = 0$
$B, \widehat{B}$	体力泛函, 体力势	$o(1)$	若$f(\mathbf{x})=o(1)$, 有$\lim\limits_{\lvert x\rvert\to\infty} f(\mathbf{x}) = 0$
$\mathcal{B}$	物质流形	$O(\phi(\mathbf{x}))$	若$f(\mathbf{x})=O(\phi(\mathbf{x}))$, 有$\lvert f(\mathbf{x})\rvert \le c\,\lvert\phi(\mathbf{x})\rvert$
$\mathbf{C}$	右柯西-格林变形张量	$\mathbb{O}^n, \mathbb{O}^n_+$	n阶正交矩阵、正常正交矩阵的集合
$C^k(\Omega)$, $k=\mathbb{N}_0$	k阶连续可微(实)函数集合	$\mathbf{P}, \mathbf{P}^0$	PK1应力张量, 初始PK1应力张量
$\mathrm{Cof}(\cdot)$	余子式$\mathrm{Cof}(\cdot) = (\cdot)^{-\mathrm{T}}\det(\cdot)$	$\mathbf{Q}$	正交张量
$\mathrm{d}s, \mathrm{d}v$	当前构形的面元与体积元	$\mathbb{R}, \mathbb{R}^n$	实数集合, n 维欧氏空间
$\mathrm{d}S, \mathrm{d}V$	参考构形的面元与体积元	$\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n_+$	n阶对称矩阵的集合, n阶正定、对称矩阵的集合
$D^{1,2}(\Omega)$	只定义了一阶微分的均匀索伯列夫线性空间	$\mathbf{t}$	面力密度
	$D^{1,2}(\Omega) = \{\varphi \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) : \varphi\otimes\nabla \in L^2(\Omega)\}$	$T, \widehat{T}$	面力泛函, 面力势
$\mathbb{D}(\Omega)$	连续可微函数的空间$\mathbf{p} \in C^\infty$ 且其支撑集supp $\mathbf{p}$是紧集	$\mathbf{T}$	PK2应力张量
		$\mathbf{u}$	位移矢量
$\det(\cdot)$	行列式	$\mathbb{W}$	反对称张量空间
$\mathrm{diag}(\cdot)$	对角矩阵形式	$W^{1/2,2}(\partial\Omega)$	$W^{1,2}(\Omega)$的迹空间
E	杨氏模量	$W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$	局部可积的索伯列夫空间
$\mathbf{E}$	格林应变张量		$W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)=\{\varphi\in L^2(\mathcal{B}) : \varphi\otimes\nabla\in L^2(\mathcal{B}), \forall\mathcal{B}\subset\overline{\Omega}\}$
$\widetilde{\mathbf{E}}$	无限小变形下的应变张量	$W^{1,2}(\Omega)=H^1(\Omega)$	$W^{1,2}(\Omega) = \{\varphi \in L^2(\Omega) : \varphi\otimes\nabla \in L^2(\Omega)\}$
${}^*\mathbb{E}$	经典线弹性的四阶弹性张量${}^*\mathbb{E}=\mu({}^*\mathbb{I} + {}^*\mathbb{I}^{\mathrm{T}}) + \lambda(\mathbf{I}\otimes\mathbf{I})$	$W^{1,2}_0(\Omega)=H^1_0(\Omega)$	$W^{1,2}_0(\Omega) = \{\varphi \in W^{1,2}(\Omega) : \mathrm{tr}\varphi = \varphi\rvert_{\partial\Omega} = 0\}$
F^p, U^p, V^p	赋范向量空间	$W, \widehat{W}$	应变能, 应变能函数
$\mathbf{F}$	变形梯度张量	λ, μ	Lamé 常数
$\mathbf{H}$	位移梯度张量	ν	泊松比
I	总能量(总势能)	$\Omega_0, \partial\Omega_0, \overline{\Omega}_0$	弹性体的参考构形所占开区域、边界面和闭包
$\mathbf{I}, {}^*\mathbb{I}$	二阶, 四阶单位张量	$\Omega, \partial\Omega, \overline{\Omega}$	弹性体的当前构形所占开区域、边界面和闭包
J	雅可比行列式det$\mathbf{F}$	ρ_0, ρ	参考构形和当前构形上的密度
$\mathbf{K}$	曲面的第二基本型, Weingarten张量	$\boldsymbol{\sigma}$	柯西应力张量
L^p	可测标量场、矢量场、张量场的勒贝格空间	$\boldsymbol{\chi}$	变形映射
${}^*\mathbb{L}$	一般线弹性的四阶弹性张量		

Some uniqueness theorems of solutions for the problems of elasticity

GAO MengNi[1,2] & ZHAO YaPu[1,2*]

[1] *State Key Laboratory of Nonlinear Mechanics, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China;*
[2] *College of Engineering Science, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China*

In order to construct the well-posed mathematical models of the elastic problems, it is necessary to study the mathematical properties of solutions, including existence, uniqueness, and stability (the continuous dependence on boundary conditions). The uniqueness theorem of solutions provides the methods for solving the problem. The uniqueness of the solutions is one of the most basic and important issues of elasticity theory. In the three-dimensional elasticity theory, unconditional uniqueness is not expected. Therefore, the uniqueness theorem of solutions is established under certain conditions, such as the restrictions on the elasticity tensor, the strain energy function and elastic deformation range. This study reviews the background and history of the uniqueness theorem in elasticity. The focuses are on the uniqueness theorems of solutions in the boundary-value problems of the linear elasticity theory, nonlinear elasticity theory of finite deformation, and elasticity theory with initial stress field. The classical proofs of uniqueness theorems are also given. We also present some unsolved problems on the solution uniqueness in elasticity.

elasticity theory, boundary-value problem, uniqueness theorem, constitutive laws, strain energy function, convexity

PACS: 46.05.+b, 02.60.Lj, 04.20.Ex, 46.25.Cc, 46.25.-y

doi: 10.1360/SSPMA-2020-0042