富水相环境下含水合物沉积物的本构模型。

刘林1,张旭辉1,2,鲁晓兵1,2,王淑云1

(1.中国科学院 力学研究所,北京 100190;2.中国科学院大学 工程科学学院,北京 100049)

摘要:富水相环境和富气相环境下水合物的赋存模式不同,造成在两种环境下含水合物沉积物的力学特性不同。在富水相环境下,随着水合物饱和度的增大,水合物的赋存模式会由悬浮模式逐渐向持力模式转变。为了描述水合物赋存模式的转变对沉积物力学性质的影响,本文基于有效饱和度的概念,提出了有效饱和度新的计算公式。然后,根据有效饱和度得到有效孔隙比的计算式。接着,基于粘土和砂土统一的 UH 模型(CSUH 模型),通过将有效孔隙比引入到状态参量和弹性模量中,建立了富水相环境下含水合物沉积物的弹塑性本构模型。最后,通过与富水相环境下含水合物沉积物的室内三轴试验数据进行比较验证了该模型的合理性。

关键词:水合物沉积物;本构模型;赋存模式;有效饱和度;有效孔隙比

中图分类号:TU43

文献标识码:A

文章编号:1673-0836(2019)增2-0563-06

A Constitutive Model of Hydrate-bearing Sediments in Water-rich Phase Environments

Liu Lin¹, Zhang Xuhui^{1, 2}, Lu Xiaobing^{1, 2}, Wang Shuyun¹

(1. Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, P.R. China; 2. University of Chinese Academy of Science, School of Engineering Science, Beijing 100049, P.R. China)

Abstract: Hydrate occurring habit in water-rich phase environments is different from that in methane gas-rich phase environments, and thus the mechanical properties of hydrate-bearing sediments in these two environments are different. In water-rich phase environments, hydrate occurring habit gradually transforms from suspension mode to loading mode with hydrate saturation increasing. Firstly, in order to describe the influence of these transformations on the mechanical properties of hydrate-bearing sediments in water-rich phase environments, a new expression of effective saturation is proposed based on the concept of effective saturation. And then, the expression of effective void ratio is obtained according to the new expression of effective saturation. Secondly, on the basis of the unified constative model for clays and sands (CSUH model), an elastic-plastic constitutive model of hydrate sediments in water-rich phase environment is developed by introducing the effective void ratio into the state variable and elasticity modulus. Finally, the rationality of the model is verified by comparing with the triaxial test data of hydrate sediments in water-rich environments.

Keywords: hydrate-bearing sediments; constitutive model; hydrate occurring habit; effective saturation; effective void ratio

^{*} 收稿日期:2019-09-01(修改稿)

作者简介:刘林(1985—),女,山西太原人,博士,助研,主要从事土的力学性质及本构模型的研究。

E-mail·liulin@imech.ac.cn

基金项目:国家自然科学基金(11872365;51639008);中国地质调查局项目(DD20160216);中石油-中科院战略联盟研究计划(2015A-4813);国际(地区)合作与交流重点项目(41761144077)

0 引言

由于天然气水合物具有少污染、储量大等特点,现已被视为一种替代明煤、石油等化石燃料的新型清洁性能源,世界各国已经对其开采技术进行了大量研究。然而,由于天然气水合物主要赋存于深海中的砂、黏土以及混合土中(称为含水合物沉积物),使得在开采过程中会造成一系列的工程问题,如地层塌陷或海底滑坡等。因此,研究含水合物沉积物的力学特性,建立合理的本构模型,具有重要的理论和工程意义。

现阶段,研究含水合物沉积物的力学特性主要采用室内三轴试验^[1-4]。通过已有的试验成果可知,含水合物沉积物的力学特性受沉积物的颗粒级配、围压和水合物含量的共同影响^[5-8],主要表现为:

- (1)随着水合物含量的增多,含水合物沉积物的内摩擦角和泊松比均没有明显变化。
- (2)含水合物沉积物的强度和刚度(弹性模量)会随着水合物饱和度的增加而增大。
- (3) 胶结模式下水合物对沉积物力学特性的 影响比填充模式下明显,尤其是水合物饱和度较小时,说明水合物赋存模式对沉积物力学特性具有 影响。
- (4)随着饱和度的增大,含水合物沉积物会表现出应变软化现象和剪胀特性。

为了能够合理描述以上含水合物沉积物的力 学特性,一些学者建立了含水合物沉积物的本构模 型。Kimito 等[9]通过将吸力和水合物饱和度引入 硬化参数中,建立了含水合物沉积物的弹塑性本构 模型,并利用有限元软件分析了水合物的分解过 程,但是该模型参数多达 20 个,且不易确定。Yu 等[10]通过分析三轴试验结果认为含水合物沉积物 的应力应变曲线包含两个阶段:结构性快速破坏阶 段和结构性完全破坏阶段(或屈服阶段),并且基 于此观点,在初始切线模量和极限偏应力中考虑了 温度的影响,修正了 Duncan-Chang 模型。杨期君 等[11]认为含水合物沉积物的力学响应是土体颗粒 间的摩擦和水合物胶结作用的共同结果,因此用修 正剑桥模型来描述土体骨架的应力应变关系,用弹 性损伤模型来描述水合物胶结的应力应变系,进而 建立了一个弹塑性损伤模型。然而,以上模型均没 有考虑水合物赋存模式的影响。

Uchida 等[12] 为了描述在剪切过程中水合物力

学作用的衰减,提出了力学意义上的水合物饱和度,并将该饱和度引入屈服函数,建立了天然气水合物临界状态模型(MHCS model)。当赋存模式不同时,该模型中只是改变水合物力学作用的衰减率,衰减规律相同,而衰减规律不易通过试验确定,因此有待验证。吴二林等[13]基于损伤理论,考虑了水合物含量和围压对弹性模量的影响建立了含水合物沉积物的弹性损伤本构模型,但该模型没有考虑剪切过程中的体积变形。颜容涛等[14]提出有效饱和度来考虑水合物赋存模式的不同,并基于吴二林等[13]提出的弹性损伤本构模型建立了考虑赋存模式的统计损伤模型,并且与不同赋存模式下的试验结果进行比较,说明了模型的合理性。

试验表明,富水相环境下水合物的赋存模式以填充为主,富气相环境下水合物的赋存模式以胶结为主^[7]。为了能够合理地描述富水相环境下含水合物沉积物的力学特性,拟提出有效饱和度和有效孔隙比的计算式来反映富水相环境下水合物赋存形式的变化;然后再将有效孔隙比引入到粘土和砂土统一的 UH 模型(CSUH 模型)^[15-16]中,建立富水相环境下含水合物沉积物的临界状态本构模型;最后通过与实验数据进行比较验证该模型的合理性。

1 富水相环境下水合物的有效饱和 度及有效孔隙比

对于不含水合物的沉积物,其密度不同,力学 反响截然不同。以砂土为例,松砂在剪切作用下往 往表现为应变硬化和剪缩特性,而密砂在同样作用 下可能表现为应变软化和剪胀特性。因此,在描述 沉积物的力学特性时,考虑密度的影响至关重要。试验表明,在富水相环境下,随着水合物饱和度的 增大,水合物的赋存模式不断变化^[14],变化过程大致分为三个阶段:

- (1)当水合物饱和度较低(0~5%)时,水合物几乎全部都以悬浮模式存在于沉积物的孔隙中,如图 1(a)。这种赋存模式下的水合物对沉积物的抗剪强度几乎不产生影响,即与不含水合物的沉积物具有相近的力学性质,因此虽然沉积物中增加了水合物这一固相,但沉积物有效的密度与不含水合物沉积物的密度相近。
- (2)随着水合物含量的逐渐增加,逐渐有水合物起到骨架作用,但仍然以悬浮形式为主,此时水合物沉积物的孔隙有所减小。
 - (3) 当水合物饱和度增加到 25%~40%,由于

孔隙减小,部分悬浮形式的水合物与新生成的水合物共同起到骨架作用,因此持力形式的水合物明显变多(如图 1(b)所示),悬浮形式的会明显变少。当水合物的赋存模式以持力模式为主时所对应的水合物饱和度被定义为临界水合物饱和度。一些学者通过试验结果总结得到临界水合物饱和度受赋存土体类型的影响,一般处于 25%~40%。当赋存土体为砂土时,临界水合物饱和度一般在 25% 左右。

(4)随着水合物饱和度的继续增加,水合物沉积物中孔隙越来越小,新生成的水合物几乎都要与之前生成的水合物和土颗粒接触而成为持力形式的水合物,即悬浮形式的水合物几乎全部变为持力形式,如图 1(c)所示。

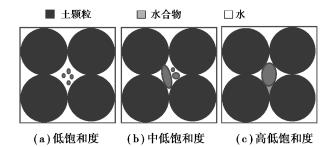


图 1 水合物在沉积物中的赋存模式示意图

Fig. 1 Occurrence habits of hydrate in sediments

针对以上过程,本文给出了水合物的有效饱和 度 S'_h 的一个计算式,

$$S'_{h} = S_{h} \left[1 - \exp\left(-\left(\frac{S_{h}}{S_{he}}\right)^{3}\right) \right] \tag{1}$$

式中: S_h 是水合物的真实饱和度; S_{he} 是水合物的临界饱和度,其与颜容涛等提出的临界饱和度意义相同,确定方法也相同。

为了描述富水相环境下不断变化的赋存模式对沉积物密度的影响,根据饱和度和孔隙比的定义,求得富水相环境下水合物沉积物的有效孔隙比,即水合物沉积物的剪切初始孔隙比 e'_{lot} :

$$e'_{h0} = \frac{e_0(1 - S'_h)}{1 + e_0 S'_h}$$
 (2)

式中 $: e_0$ 为不含水合物沉积物的初始孔隙比。

通过式(1)和式(2)可以整理得到有效孔隙比与真实饱和度的关系,如图 2 所示。图 2 中虚线表示采用真实饱和度计算得到的孔隙比(真实孔隙比)与真实饱和度之间的关系,实线表示采用式(2)计算得到的有效孔隙比与真实饱和度之间的关系。从图 2 中可以看出,当 S_h 较小时,有效孔隙

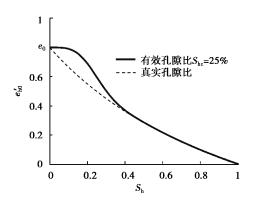


图 2 有效孔隙比/真实孔隙比与饱和度的关系

Fig. 2 Relationship between effective/real void ratio and saturation

比与不含水合物的沉积物孔隙比几乎相等,说明此时水合物处于悬浮模式。随着 S_h 的增大,有效孔隙比开始急剧减小,说明此时有水合物开始充当沉积物骨架,即持力模式开始产生。当饱和度达到一定程度,有效饱和度和真实饱和度几乎相等,说明此时所有生成的水合物都与土颗粒一起成为沉积物的骨架。

2 本构模型的建立

富水相环境下,含水合物沉积物可看作是一种由三相组成的材料,其中固相包含沉积物土颗粒和水合物。本文将富水相环境下生成的水合物视为另一种粒状材料,即含水合物沉积物等同于两种粒状材料的混合料。基体对混合料的性质起主要作用,因此,选取能够描述基体力学性质的本构模型至关重要。姚仰平等[15-16]基于临界状态土力学,通过从等向压缩特性、临界状态特性以及剪胀特性等三方面对粘土和砂土的异同性进行了分析,并将这些异同性均用相应的统一表达式进行描述,建立了粘土和砂土统一的本构模型(简称 CSUH 模型)。该模型能够合理地描述正常固结粘土、超固结粘土和砂土的力学特性,因此本文选取了 CSUH 模型作为基础模型。

2.1 等向压缩特性

试验表明,含水合物沉积物的等向压缩线在 e-lnp 空间内是曲线^[17],而正常压缩线(NCL)是等向压缩线中的一条特殊线,因此富水相环境下水合物沉积物的正常压缩线可参照的砂土的正常压缩线表示方法,被表示为,

$$e = Z - \lambda \ln \left(\frac{p + p_s}{1 + p_s} \right) \tag{3}$$

式中: λ 为正常压缩线在 e- $\ln p$ 空间内渐近线的斜

率,如图 3 所示;Z 为正常压缩线上 p=1 kPa 时所对应的孔隙比; p_s 为正常压缩线在 e- $\ln p$ 空间内曲率最小时所对应的应力。

通过式可以求得从 p_{x0} 加载到 p_x 时的含水合物沉积物的有效体积应变为:

$$\varepsilon'_{v} = \frac{\lambda}{1 + e'_{h0}} \ln \left(\frac{p_{x} + p_{s}}{p_{s0} + p_{s}} \right) \tag{4}$$

假设从 p_{x0} 加载到 p_{x} 时有效弹性体积应变为:

$$\varepsilon_{v}^{e'} = \frac{\kappa}{1 + e'_{h0}} \ln \left(\frac{p_{x} + p_{s}}{p_{x0} + p_{s}} \right)$$
 (5)

式中: κ 为回弹线在 $e^{-\ln(p+p_s)}$ 空间内的斜率(在此不考虑水合物的分解),称为弹性系数。

由式(4)和式(5)可得到含水合物沉积物的有效塑性体积应变为

$$\varepsilon_{v}^{p'} = \frac{\lambda - \kappa}{1 + e'_{b0}} \ln \left(\frac{p_{x} + p_{s}}{p_{x} + p_{s}} \right) \tag{6}$$

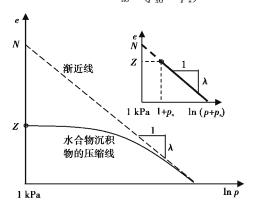


图 3 水合物沉积物的压缩线示意图

Fig. 3 Compression line of hydrate-bearing sediments

2.2 屈服函数

粒状材料易发生破碎,尤其是在剪应力作用下。

颗粒破碎的作用使得粒状材料在应力比越大时屈服越快,因此许多研究者认为粒状材料的屈服面并非椭圆形。本文采用姚仰平等[15-16,18-19]提出的屈服函数

$$f = \frac{(1+\chi)q^2}{M^2p^2 - \chi q^2} + 1 - \frac{p_x}{p} = 0$$
 (7)

式中: M 为临界状态应力比; X 为临界状态参数, 反映了材料破碎的难易程度。当材料易被剪碎时, 达到临界状态时产生的变形较大, 对应正常压缩线与临界状态线(CSL)之间的距离较大, 如图 4 所示。此时屈服面在应力比较大时就更加扁平, 如图 5 所示。本文假设水合物的破碎难易程度与所赋存的粒状土相近。

 p_x 为屈服面与 p 轴的交点所对应平均正应力,

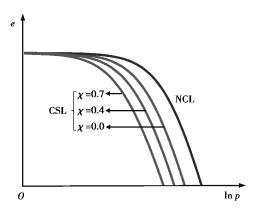


图 4 CSL 随参数 χ 的变化规律

Fig. 4 Variation of CSL with parameter χ

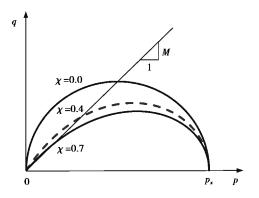


图 5 屈服面随参数 χ 的变化

Fig. 5 Variation of yield surface with parameter X 可通过式(6) 求出。将 p_x 带入到式(7),并用硬化 参数 H 代替有效塑性体积应变可得到

$$f = \ln \left[\left(1 + \frac{(1 + \chi) q^2}{M^2 p^2 - \chi q^2} \right) p + p_s \right] - \ln(p_{x0} + p_s) - \frac{H}{c_p} = 0$$
 (8)

式中: $c_p = (\lambda - \kappa) / (1 + e'_{h0})$; H 为硬化参数, 参照姚仰平等^[16]所提出的统一硬化参数, 可表示为

$$dH = \frac{M_{\rm f}^4 - \eta^4}{M_{\rm f}^4 - \eta^4} d\varepsilon_{\rm v}^{\rm p} \,' \tag{9}$$

式中 $:M_{i}$ 为含水合物沉积物的潜在破坏应力比:可表示为

$$M_{\rm f} = 6 \left[\sqrt{\frac{12(3-M)}{M^2}} \exp\left(-\frac{\xi}{\lambda - \kappa}\right) + 1 + 1 \right] - 1$$

$$\tag{10}$$

式中:M。为特征状态应力比,可表示为

$$M_c = M \cdot \exp(-m \cdot \xi) \tag{11}$$

式中 $.\xi$ 为状态参数,计算式为.

$$\xi = e_{\eta} - e'_{h} \tag{12}$$

式中 $:e'_h$ 为水合物沉积物的当前有效孔隙比, 可表示为

$$e'_{h} = e'_{h0} + \int de'_{h}$$
 (13)

 e_{η} 的概念详见文献[15],其表达式为

$$e_{\eta} = Z - \lambda \ln \left(\frac{p + p_{s}}{1 + p_{s}} \right) - \left(\lambda - \kappa \right) \ln \left[\frac{M^{2} + \eta^{2}}{M^{2} - \chi \eta^{2}} p + p_{s} \right]$$
(14)

2.3 剪胀方程

采用与砂土的 UH 模型相同的剪胀方程,

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon_{\mathrm{v}}^{\mathrm{p}}}{\mathrm{d}\varepsilon_{\mathrm{e}}^{\mathrm{p}}}' = \frac{M_{\mathrm{c}}^{2} - \eta^{2}}{2\eta} \tag{15}$$

式中: $\mathrm{d}\varepsilon^{\mathrm{p}}_{\mathrm{s}}$ /为有效塑性偏应变增量。

2.4 应力应变关系

2.4.1 弹性应变增量

根据 Hooke 定律可求得弹性应变增量为:

$$\mathrm{d}\varepsilon_{v}^{e'} = \frac{3(1-2\nu)}{\mathrm{d}p}$$
 (16)

$$\mathrm{d}\varepsilon_{\mathrm{s}}^{e'} = \frac{2(1+\nu)}{3E'}\mathrm{d}q \tag{17}$$

式中: $\mathrm{d} \varepsilon_{v}^{\epsilon}$ '为有效弹性体应变增量; $\mathrm{d} \varepsilon_{s}^{\epsilon}$ '为有效弹性偏应变增量;v 为泊松比;E'为有效弹性模量,可表示为

$$E' = \frac{3(1 - 2\nu) (1 + e'_{h0})}{\kappa} (p + p_s)$$
 (18)

2.4.2 弹塑性应力应变关系

水合物沉积物的应力应变关系满足弹塑性应力-应变关系:

$$d\sigma = \lceil \boldsymbol{D} \rceil \operatorname{epd} \boldsymbol{\varepsilon} \tag{19}$$

式中:弹塑性刚度矩阵[D]ep可表示为,

$$[\mathbf{D}] \operatorname{ep} = [\mathbf{D}]^{e} - \left[\mathbf{D}\right]^{e} \left\{\frac{\partial g}{\partial \sigma}\right\} \left\{\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right\}^{\mathrm{T}} [\mathbf{D}]^{e}$$

$$\left\{\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right\}^{\mathrm{T}} [\mathbf{D}]^{e} \left\{\frac{\partial g}{\partial \sigma}\right\} - \left\{\frac{\partial f}{\partial H}\right\} \left\{\frac{\partial H}{\partial \varepsilon_{v}^{p}}\right\} \left\{\delta\right\}^{\mathrm{T}} \left\{\frac{\partial g}{\partial \sigma}\right\}$$

$$(20)$$

式中 $\cdot [D]^{\circ}$ 为弹性刚度矩阵。

3 模型验证

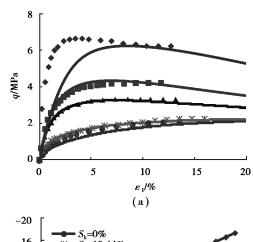
饱和试样气体扩散制样法(简称 SD 法)是将 土体先进行注水饱和,然后施加反应气体和围压, 属于富水相环境。为了验证本文提出的富水相环 境下水合物沉积物的弹塑性本构模型,利用文献 [7]中 SD 法的试验数据与本模型的预测结果进行 比较。模型采用参数见表 1。对于不同的水合物 饱和度,本模型采用同一组参数。

表 1 模型所需参数

Table 1 Parameters in the mathematic model

M	λ	κ	υ	p_{s}	χ	m	Z	$S_{ m hc}$
1.3	0.095	0.01	0.3	550	0.35	2.5	0.9	0.25

图 6(a) 展示了试验所得水合物沉积物的应力 应变系以及模型计算结果。从图中可以看出,水合 物饱和度从0%~32%,计算结果和试验数据都拟 合非常好。饱和度为19.44%时,沉积物的抗剪强 度比饱和度为0%时的几乎相等,说明此时水合物 对沉积物抗剪强度没有影响。结合前文的分析,可 判断饱和度为 19.44% 时水合物以悬浮模式赋存在 砂土中。从图 1 中可以看出, 当真实饱和度为 19.44%时,有效孔隙比近似等于不含水合物的砂 土孔隙比,说明了本文提出的有效饱和度是合理 的。此外,图中显示饱和度为53.3%时计算结果和 试验结果稍微有所偏差,主要原因是当饱和度达到 较大时,生成的水合物会产生少量胶结作用,从而 使得沉积物有一定的结构性,但是这种结构性在剪 应力的作用下很快会破坏。所以高饱和度下,在应 变较小时就达到峰值,随着结构性的破坏和砂颗粒 及水合物的破碎,出现明显的应变软化现象。



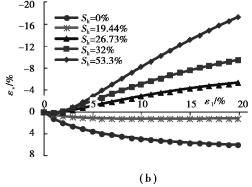


图 6 模型计算结果与实验数据对比[7]

Fig. 6 Comparisons of calculated and test results^[7]

图 6(b)展示了不同饱和度下水合物沉积物体变的模型计算结果。从图中可以看出,该模型能够描述水合物沉积物的剪胀和剪缩现象,且随着水合物的增多,水合物沉积物更容易发生剪胀,这个体变规律复合试验结果很明显,并且水合物含量越多,越容易发生剪胀现象。

通过以上分析,说明了本文所提模型能够合理 描述富水相环境下含水合物沉积物的力学特性。

4 结论

- (1)本文提出的有效饱和度表达式能够合理 反映富水相环境下水合物赋存模式的变化。
- (2)本文建立的新模型能够描述含水合物沉积物的应变硬化/软化和体积剪缩/剪胀。
- (3)新模型能够反映水合物的赋存模式,水合物含量,试验围压以及沉积土密度的影响。
- (4)新模型只需 8 个参数,并且对于完全没有 胶结作用的含水合物沉积物,采用一组参数即可描述不同含量不同围压的含水合物沉积物力学特性。

参考文献(References)

- [1] Miyazaki K, Masui A, Sakamoto Y, et al. Triaxial compressive properties of artificial methane hydrate bearing sediment [J]. Journal of Geophysical Research, 2011, 116(B6):15-20.
- [2] Lu X B, Wang L, Wang S Y, et al. Study on the mechanical properties of the tetrahydrofuran hydrate deposit[A]//18th Int. Offshore and Polar Engineering Conference. Vancouver: The International Society of Offshore and Polar Engineers[C]. 2008: 57-60.
- [3] 张旭辉,王淑云,李清平,等.天然气水合物沉积物力学性质的试验研究[J].岩土力学,2010,31 (10):3069-3074.
- [4] 刘芳, 寇晓勇, 蒋明镜, 等. 含水合物沉积物强度特性的三轴试验研究[J]. 岩土工程学报, 2013, 35 (8): 1565-1572.
- [5] Yun T S, Santamarina J C, Ruppel C. Mechanical properties of sand, silt, and clay containing tetrahydrofuran hydrate [J]. Journal of Geophysical Research, 2007, 112(B4); B04106.
- [6] Zhang X H, Lu X B, Shi Y H, et al. Study on the mechanical properties of hydrate-bearing silty clay[J].

- Marine and Petroleum Geology, 2015, 67: 72-80.
- [7] 颜荣涛, 韦昌富, 傅鑫辉, 等. 水合物赋存模式对 含水合物土力学特性的影响[J]. 岩石力学与工程 学报, 2013, 32(增2): 4115-4122.
- [8] Zhang X H, Lu X B, Zhang L M, et al. Experimental study on mechanical properties of methane hydrate-bearing sediments [J]. Acta Mechanica Sinica, 2012, 28(5): 1356-1366.
- [9] Kimoto S, Oka F, Masaya F. A chemo thermomechanically coupled numerical simulation of the subsurface ground deformations due to methane hydrates dissociation [J]. Computers and Geotechnics, 2007, 34(7): 216-228.
- [10] Yu F, Song Y C, Liu W G, et al. Analyses of stress strain behavior and constitutive model of artificial methane hydrate [J]. Journal of Petroleum Science and Engineering, 2011, 77(2): 183-188.
- [11] 杨期君, 赵春风. 含气水合物沉积物弹塑性损伤本构模型探讨[J]. 岩土力学, 2014, 35(4): 991-997.
- [12] Uchida U, Soga K, Yamamoto K. Critical state soil constitutive model for methane hydrate soil[J]. Journal of Geophysical Research, 2012, 117:3209-3221.
- [13] 吴二林,魏厚振,颜荣涛,等.考虑损伤的含天然 气水合物沉积物本构模型[J].岩石力学与工程学报,2012,31(增1):3045-3050.
- [14] 颜荣涛,梁维云,韦昌富,等.考虑赋存模式影响的含水合物沉积物的本构模型研究[J].岩土力学,2017,38(1):10-18.
- [15] 姚仰平,刘林,罗汀.砂土的 UH 模型[J].岩土工程学报,2016,38(12):2147-2153.
- [16] Yao Y P, Liu L, Luo T, et al. Unified hardening (UH) model for clays and sands[J]. Computers and Geotechnics, 2019,110: 326-343.
- [17] Soga K, Lee S, Ng M, et al. Characterization and engineering properties of methane hydrate soils [M]. Characterization and Engineering Properties of Natural Soils. London: Taylor and Francis, 2006.
- [18] Yao Y P, Liu L, Luo T. A constitutive model for granular soils [J]. Science China Technological Sciences, 2018.
- [19] 罗汀,刘林,姚仰平. 考虑颗粒破碎的砂土临界状态特性描述[J]. 岩土工程学报,2017,39(4):592-600.