

# 大涡模拟的壁模型及其应用<sup>1)</sup>

吴霆<sup>\*,†</sup> 时北极<sup>\*,†</sup> 王士召<sup>\*,2)</sup> 张星<sup>\*,†</sup> 何国威<sup>\*,†</sup>

<sup>\*</sup>(中国科学院力学研究所非线性力学国家重点实验室, 北京 100190)

<sup>†</sup>(中国科学院大学工程科学学院, 北京 100049)

**摘要** 大涡模拟是研究湍流的非定常特性的重要方法. 但解析壁面层的大涡模拟所需的计算量与直接数值模拟相当, 是大涡模拟在高雷诺数壁湍流数值模拟中所面临的主要困难. 解析壁面层所需的网格尺度与壁面黏性长度同量级, 是引起壁湍流大涡模拟计算量增加的主要原因. 壁模型通过模化近壁流动避免了完全解析壁面层, 可以显著地降低壁湍流大涡模拟的计算量, 是克服上述困难的有效方法. 本文介绍了大涡模拟壁模型的主要类型; 详细讨论了常用的壁面应力模型, 特别是平衡层模型和双层模型的构建思路和特点; 基于近壁流动的特征讨论了应力边界条件的必要性和适用性; 指出了壁面应力模型的局限性以及考虑非平衡效应修正的各种方法; 讨论了壁面应力模型的研究历史、最新进展和发展趋势, 给出了常用的壁面应力模型的分支与发展关系图; 并基于 Werner-Wengle 模型实现了周期山状流的大涡模拟.

**关键词** 大涡模拟, 壁模型, 壁面应力模型, 双层模型, 周期山状流

中图分类号: O357 文献标识码: A doi: 10.6052/0459-1879-18-071

## WALL-MODEL FOR LARGE-EDDY SIMULATION AND ITS APPLICATIONS<sup>1)</sup>

Wu Ting<sup>\*,†</sup> Shi Beiji<sup>\*,†</sup> Wang Shizhao<sup>\*,2)</sup> Zhang Xing<sup>\*,†</sup> He Guowei<sup>\*,†</sup>

<sup>\*</sup>(LNM, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

<sup>†</sup>(School of Engineering Sciences, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

**Abstract** Large-eddy simulation (LES) is an important method to investigate unsteady turbulent flows. The cost of the wall-resolved LES is comparable to that of direct numerical simulation, which prevents the applications of the LES to wall-bounded turbulences at high Reynolds numbers. The grid length would be of the order of the viscous length to resolve the near-wall flow structures, which causes the prohibitive computational cost of the wall-resolved LES. Wall-models circumvent the flow details near the wall to avoid resolving all the flow structures near the wall, which significantly reduce the computation cost and have been successfully combined with the LES for turbulent flows. We discuss the basic idea of wall-models for LES and review the wall-stress models with implementation details. The construction and characteristics of the equilibrium models and the two-layer models are discussed in detail. The limitations of the wall-stress models and their improvements to account for the non-equilibrium effects are also discussed. We review the state of the art of the wall shear stress models and provide a hierarchical diagram for the current models. Finally, we present the applications of the Werner-Wengle model to the LES of flows over periodic hills.

2018-03-14 收稿, 2018-03-26 录用, 2018-03-31 网络版发表.

1) 国家自然科学基金(91752118, 11672305, 11232011, 11572331)、中科院战略性先导科技专项(XDB22040104)、中科院前沿科学重点研究计划(QYZDJ-SSW-SYS002)和 973 项目(2013CB834100: 非线性科学)资助.

2) 王士召, 副研究员, 主要研究方向: 湍流与流体力学. E-mail: wangsz@lnm.imech.ac.cn

**引用格式:** 吴霆, 时北极, 王士召, 张星, 何国威. 大涡模拟的壁模型及其应用. 力学学报, 2018, 50(3): 453-466

Wu Ting, Shi Beiji, Wang Shizhao, Zhang Xing, He Guowei. Wall-model for large-eddy simulation and its applications. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2018, 50(3): 453-466

**Key words** Large-eddy simulation, wall-model, wall-stress model, two-layer model, flows over periodic hills

## 引 言

大涡模拟是模拟和预测非定常湍流的有效工具,它的基本思想是数值求解大涡的运动,而采用物理模型模拟小涡对大涡的影响.比较而言,直接数值模拟虽然可以模拟非定常湍流,但其巨大的计算量导致难以用于工程实际.雷诺平均方法的计算量较小,因此常用于工程问题<sup>[1]</sup>,但它难以用于预测大涡运动的非定常特性.随着计算机的发展,大涡模拟已经越来越多地被应用于科学研究和工程设计<sup>[2-5]</sup>.当大涡模拟用于壁湍流时,由于壁面会引入正比于壁面距离的新的尺度,因此在壁面附近,大涡模拟又分为解析壁面层(wall-resolved)的大涡模拟和模化壁面层(wall-modeled)的大涡模拟<sup>[6-7]</sup>.解析壁面层的网格尺度与黏性长度同量级,模化壁面层的网格尺度与边界层厚度同量级,因此模化壁面层的大涡模拟所需的网格量远小于解析壁面层的网格量.例如,在一个计算机翼绕流的算例中,当雷诺数  $Re = 10^9$  时,模化壁面层的大涡模拟所需的网格量比解析壁面层的少 3 个量级<sup>[8]</sup>.因此,模化壁面层的大涡模拟在工程中有重要意义.

本文详细讨论了大涡模拟壁模型的特点和最新发展,内容安排如下:在第 1 节讨论了大涡模拟的壁模型.首先介绍了壁模型的基本思想和分类,然后介绍了平衡层壁模型,最后介绍了非平衡壁模型和双层模型的最新发展.在第 2 节,介绍了周期山状流的模化壁面层的大涡模拟和平衡层壁模型的应用细节,并与先前的计算和实验结果进行了比较.第 3 节对本文的内容进行了总结和展望.

## 1 壁模型

壁面附近湍流结构的特征尺度正比于其与壁面间的距离.如果完全解析近壁湍流结构,大涡模拟所需的计算量与直接数值模拟相当.解析壁面层的大涡模拟大部分的网格用于解析近壁流动. $Re > 10^6$  的平板边界层的大涡模拟中,99% 的网格用于解析边界层内层中的流动<sup>[9-10]</sup>.壁面附近的流动常满足特定的规律并趋于形成自维持过程<sup>[11-12]</sup>.近壁湍流的上述特性使得可以采用简化的方法或模型刻画近壁流动,常用的简化方案有雷诺平均与大涡模拟混合方法<sup>[13-15]</sup>和壁模型<sup>[9-10,16]</sup>.本文介绍采用壁模型简

化近壁流动的方案.

Sagaut<sup>[11]</sup> 将大涡模拟壁模型分为 4 类:高阶边界条件(high-order boundary conditions),壁面应力模型(wall-stress models),离面边界条件(off-wall boundary conditions)和确定性最小边界层单元模拟(deterministic minimal boundary-layer unit simulation),其中壁面应力模型的应用最为广泛.

壁面应力模型可以在较粗的网格上保证近壁的动量守恒,从而得到正确的速度分布.以图 1 中的不可压槽道湍流为例,控制方程为不可压缩流动的 Navier-Stokes(NS) 方程

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} \delta_{li} \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2)$$

其中,  $u_i$  为速度 ( $i = 1, 2, 3$  分别表示流向、壁面法向和展向),  $p$  和  $P$  分别为脉动和平均压强,  $\rho$  为流体密度,  $\nu$  为流体的运动学黏性系数.对方程 (1) 和方程 (2) 做滤波,可以得到大涡模拟的方程如下

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} \delta_{li} \quad (3)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (4)$$

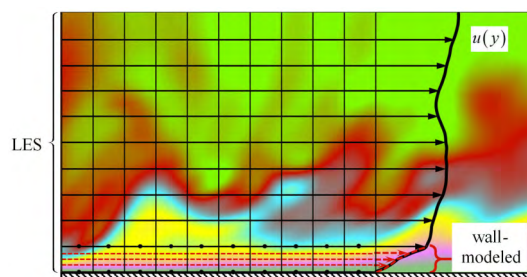


图 1 湍流大涡模拟区域与壁模型示意图.边界附近的网格不足以解析近壁流动结构时,常用的有限差分算子得到的黏性应力项并不是壁面切应力的正确值.壁模型可以在较粗的网格上保证近壁的动量守恒,从而得到正确的速度分布

(根据 Piomelli 和 Balaras<sup>[9]</sup> 的图 2 修改而来)

Fig. 1 Diagrammatic sketch of the LES region and the wall-model. If meshes near the wall is too coarse to resolve the flow structure, the viscous stress obtained by the usual finite difference operator is not correct. Wall-models can guarantee the momentum conservation on coarse meshes near the wall, obtaining correct velocity profiles (modified based on the Fig.2 of Ref.[9])

其中, 顶标 ‘—’ 表示对变量做滤波,  $\tau_{ij} = \bar{u}_i \bar{u}_j - \overline{u_i u_j}$  为亚格子应力。

为不失一般性, 以 Schumann<sup>[17]</sup> 提供的方法为例在图 2 所示的网格上离散动量方程 (3)

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + D_j (\bar{u}_i \bar{u}_j) = -D_i \left( \frac{\bar{p}}{\rho} \right) + D_j \left( \nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) + D_j \tau_{ij} - D_i \left( \frac{P}{\rho} \right) \delta_{1i} \quad (5)$$

其中,  $D$  为差分算子。当边界附近的网格不足以解析近壁流动结构时, 如果直接使用壁面速度为零的边界条件, 那么通过常用的有限差分算子得到的黏性应力项  $\nu \partial \bar{u}_1 / \partial x_2$  并不是壁面切应力的正确值, 从而无法得到正确的动量输运过程。采用壁面应力边界条件代替壁面速度边界条件可以解决这一问题。如何得到正确的应力边界条件是解决这一问题的关键, 也是壁面应力模型的核心。

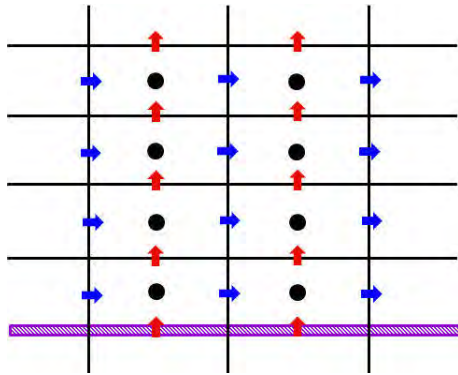


图 2 交错网格与边界示意图

Fig. 2 Schematic of the staggered mesh and the boundary

Schumann<sup>[17]</sup> 提出了一种根据壁面律计算壁面切应力的模型 (常被称为平衡层模型<sup>[6]</sup>), 该模型从已解析的流场中构造瞬时壁面应力边界条件

$$\tau_w = \frac{u_{|1}}{\langle u \rangle_{|1}} \langle \tau_w \rangle \quad (6)$$

其中,  $u_{|1}$  和  $\langle u \rangle_{|1}$  分别为距壁面第一个网格 (面) 上的切向速度和平均切向速度,  $\langle \tau_w \rangle$  为平均壁面切应力。Schumann<sup>[17]</sup> 利用恒定压力梯度槽道和管道流动的特点给出平均壁面应力  $\langle \tau_w \rangle$ , 通过近壁速度的对数律计算平均切向速度, 这要求距壁面的第一层网格位于对数律区。Schumann<sup>[17]</sup> 所给出的壁面应力模型的一个主要缺点是需要事先知道平均壁面应力。克服这一缺点的一种方案是通过近壁的速度分布反推壁面切应力<sup>[18]</sup>, 即求解如下方程

$$\frac{\langle u \rangle (y)}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln \left( \frac{y u_\tau}{\nu} \right) + C \quad (7)$$

其中,  $u_\tau = \sqrt{\langle \tau_w \rangle / \rho}$  为壁面摩擦速度,  $\kappa$  为卡门常数,  $C$  为常数, 通常取为  $C \approx 5.5$ 。通过已解析的流动可得到对数区距壁面  $y$  处的平均速度  $\langle u \rangle$ 。方程 (7) 中的唯一未知量为  $u_\tau$ , 可通过数值求解得到, 进而可得到壁面切应力  $\langle \tau_w \rangle = \rho u_\tau^2$ 。

Werner-Wengle 模型<sup>[19]</sup> (简称 WW 模型) 采用瞬时速度代替平均速度, 并采用线性律与幂律的匹配形式近似表示壁面速度分布, 得到了壁面切应力与已解析的近壁流场速度的解析表达式。与方程 (7) 相比, WW 模型有两个优点: 第一, 可以通过瞬时速度求得瞬时壁面切应力; 第二, 避免了求解含有对数函数的超越方程。WW 模型的速度剖面为

$$u^+ = \begin{cases} y^+, & y^+ \leq y_c^+ \\ A (y^+)^B, & y^+ > y_c^+ \end{cases} \quad (8)$$

其中,  $A = 8.3$ ,  $B = 1/7$  或  $1/9$ ,  $y_c^+ = A^{1/(1-B)}$ ,  $u^+ = u/u_\tau$ ,  $y^+ = y u_\tau / \nu$ 。

Inagaki 等<sup>[20]</sup> 在 WW 模型的双层速度形式基础上引入了缓冲层的影响并通过修正后的三层速度匹配形式改进了计算结果

$$u^+ = \begin{cases} y^+, & y^+ \leq y_{C1}^+ \\ A_1 (y^+)^{B_1}, & y_{C1}^+ < y^+ \leq y_{C2}^+ \\ A_2 (y^+)^{B_2}, & y^+ > y_{C2}^+ \end{cases} \quad (9)$$

其中,  $A_1 = 2.7$ ,  $A_2 = 8.6$ ,  $B_1 = 1/2$ ,  $B_2 = 1/7$ ,  $y_{C1}^+ = A_1^{1/(1-B_1)}$ ,  $y_{C2}^+ = (A_2/A_1)^{1/(B_1-B_2)}$ 。

Breuer 和 Rodi<sup>[21]</sup> 在对数律中提出三层速度匹配形式, 分段表示出线性律、缓冲层和对数律的速度剖面

$$u^+ = \begin{cases} y^+, & y^+ \leq 5 \\ A \ln (y^+) + B, & 5 < y^+ \leq 30 \\ \kappa^{-1} \ln (E y^+), & y^+ > 30 \end{cases} \quad (10)$$

其中,  $E = 9.8$ ,  $A = [\kappa^{-1} \ln (30E) - 5] / \ln 6$ ,  $B = 5 - A \ln 5$ 。

上述壁面应力模型均由近壁的瞬时速度确定壁面应力。这一做法的物理基础是对数律区的速度与壁面应力相关的实验现象<sup>[22]</sup>。这一物理基础隐含了上述模型中所用到的已解析的近壁流场速度位于对数律区, 即: 距壁面的第一层网格不超过对数律区。值得注意的是, 这种基于统计平均的速度分布又要求近壁流动的网格要适当的粗, 以保证单位网格区

域内包含足够数量的小尺度结构<sup>[9]</sup>。实际计算中常取距壁面的第一层网格位于对数律区或黏性子区的上层。上述壁面应力模型没有考虑边界层内的相干结构对壁面应力和速度脉动的影响,而边界层内的倾斜结构以及下扫和喷射过程都会影响壁面应力和速度脉动的关联。Piomelli 等<sup>[23]</sup>通过引入流向距离参数考虑倾斜结构引起的壁面切应力与近壁速度之间的滞后现象。

壁面应力模型的基础是近壁平均速度分布的壁面律,但普适的壁面律在具有逆压梯度的流动中并不存在<sup>[24]</sup>。尽管如此,这些模型仍被广泛地应用于建筑物绕流、风场以及大气边界层等高雷诺数复杂壁湍流的大涡模拟<sup>[9-10]</sup>,并且常可得到合理的结果,尤其是流动的平均量。Larsson 等<sup>[25]</sup>对这一现象的解释为:(1)壁面应力模型仅模化了边界层内区的部分流动(约占边界层厚度的 20%),大涡模拟可以解析 80% 边界层厚度内的非平衡效应;并且未解析的 20% 近壁流动的时间尺度远小于已解析的流动尺度(因流动的时间尺度与壁面距离成正比);(2)逆压梯度较大的流动区域往往对应于对流项较大的区域,两者对壁面应力的影响可相互抵消。但同时,也有工作表明平衡律模型难以准确计算分离流动的壁面摩擦力<sup>[10]</sup>。

Breuer 等<sup>[26]</sup>从边界层方程出发,考虑了压力梯度的非平衡效应,对 WW 模型进行了推广。该方法通过 WW 模型的幂律速度剖面构造人工黏性,并通过统计估计定义黏性子层的相对厚度,在周期山状流的数值模拟中准确计算了流动的分离与壁面摩擦力。Duprat 等<sup>[27]</sup>在近壁流动的控制方程中直接考虑了流向压力梯度的非平衡效应,同时以流向压力梯度和壁面摩擦力为特征量,引入近壁流动的混合特征速度,并以此对壁面单位进行了重新标度。进一步地,Duprat 等<sup>[27]</sup>依据此混合速度提出了一种近壁涡黏系数衰减的新形式,从而引入了压力梯度对速度剖面 and 壁面应力的影响。相比于仅考虑平衡效应的壁面模型,定义混合速度有效地克服了流动分离点附近的奇异性,并有效地反映了流向压力梯度对流动的影响。该壁模型准确模拟了周期山状流,尤其在流动的逆压区取得较好的预测结果,数值结果表明在非平衡壁模型中同时考虑了压力梯度和雷诺应力具有重要意义。

Yang 等<sup>[28]</sup>同时考虑了近壁流动的压力梯度效应以及局部加速度和对流效应,并提出积分型壁

模型。该模型首先假设近壁速度剖面由线性过渡为对数函数的多参数形式,并引入线性扰动对平衡层壁面律进行了推广;然后通过匹配条件以及积分边界层方程的物理约束,重构壁面流动的速度分布形式,并由此确定壁面摩擦力。相比于平衡层模型,该模型同时考虑了控制方程中各非平衡项;相比于双层模型(下文将详述),该模型避免了直接求解边界层方程,因此该模型具有多物理和实现简单的优点,迅速引起了广泛关注。

Nicoud 等<sup>[29]</sup>提出了通过最优控制理论来确定壁面切应力的方法。该方法将计算出的平均速度剖面与目标平均速度剖面的偏差作为优化目标,采用一个时间步长内的次优控制策略可以在较粗的网格上得到较为准确的壁面切应力,并以此约束外区大涡模拟达到最优解。但是该方法在每个时间步都需要大量的迭代来完成优化过程,因此它的成本比在相同的网格上使用显式壁面应力模型大 20 倍。此外,该方法还必须提供目标平均速度剖面用来确定目标函数。为了克服这些缺点,Nicoud 等<sup>[29]</sup>提出了线性随机估计形式的壁面应力模型,该模型可以通过局部速度场显式预测壁面切应力,其中的模型系数通过次优控制策略得到的数据确定。槽道湍流数值模拟的结果表明由该方法推导出的壁模型可以在较粗的网格上准确预测高雷诺数流动的平均速度剖面。最近,Bae 等<sup>[30-33]</sup>提出了滑移边界条件修正壁面应力边界条件可能引起的对数区速度匹配问题。

另外一种提供壁面应力边界条件的模型是双层模型(two-layer model)。这种模型通过在壁面附近嵌入一套细网格并在细网格上求解简化的流动方程为大涡模拟提供应力边界条件<sup>[34]</sup>,近壁流动的简化方程常取为雷诺平均后的边界层方程

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[ (\nu + \nu_t) \frac{\partial u_i}{\partial x_2} \right], \quad i = 1, 3 \quad (11)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_2} = -\frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \quad (12)$$

其中压力项通过外流得到,湍流涡黏 $\nu_t$ 由带近壁阻尼函数的混合长度理论得到

$$\frac{\nu_t}{\nu} = \kappa y^+ \left( 1 - e^{-y^+/A} \right)^2 \quad (13)$$

其中 $A = 19$ 。

双层模型<sup>[34]</sup>用于近壁平衡的流动时 Karman 系数 $\kappa$ 设为常数(0.41),这在有分离和再附的复杂流动中有局限性。Wang 和 Moin<sup>[35]</sup>提出了动态 Karman 系

数的修正方法, 使得第一层大涡模拟网格上的湍流黏  $\nu_t$  等于亚格子 (SGS) 黏  $\nu_{SGS}$ , 从而得到的动态 Karman 系数为

$$\hat{\kappa} = \frac{\langle \nu_{SGS} \rangle}{\nu \langle y_w^+ (1 - e^{-y_w^+/A})^2 \rangle} \quad (14)$$

其中,  $y_w^+$  为第一层大涡模拟网格到壁面的无量纲距离. Wang 和 Moin<sup>[35]</sup> 将该方法用于机翼绕流中, 准确预测了流动分离和再附区. Kawai 和 Larsson<sup>[36]</sup> 认为, Karman 系数  $\kappa$  在近壁区不是常数, 其既不是常数 0.41, 也不是方程 (14) 中的常数  $\hat{\kappa}$ , 而是从壁面上的 0.41 变化到第一层大涡模拟网格上的  $\hat{\kappa}$ . Kawai 和 Larsson<sup>[36]</sup> 假设 Karman 系数  $\kappa$  在壁面法向是线性变化的. Park 和 Moin<sup>[37]</sup> 根据需要被模化的雷诺应力加上可解应力的和为通过 Karman 系数标准值 0.41 得

到的总应力, 也得到了随壁面法向变化的动态 Karman 系数  $\kappa$ .

由上可以看到, 双层模型比基于壁面律的壁面应力模型更易考虑非平衡效应, 但其应用过程也相应比较复杂. 与双层模型相关的综述或介绍可参见文献 [9,38-40].

本节内容所提到的大涡模拟壁模型关系如图 3 所示. 本文主要介绍了壁面应力模型中的平衡层模型和双层模型. 平衡层模型假设速度剖面的形式 (例如对数律或 WW 模型中的幂律), 从而可以通过瞬时近壁速度求得瞬时壁面切应力. 在此基础上, 出现了多种考虑非平衡效应的修正方法. 双层模型通过在近壁细网格上求解简化的流动方程得到壁面切应力, 并通过动态方法调整湍流黏中的 Karman 系数来考虑非平衡效应.

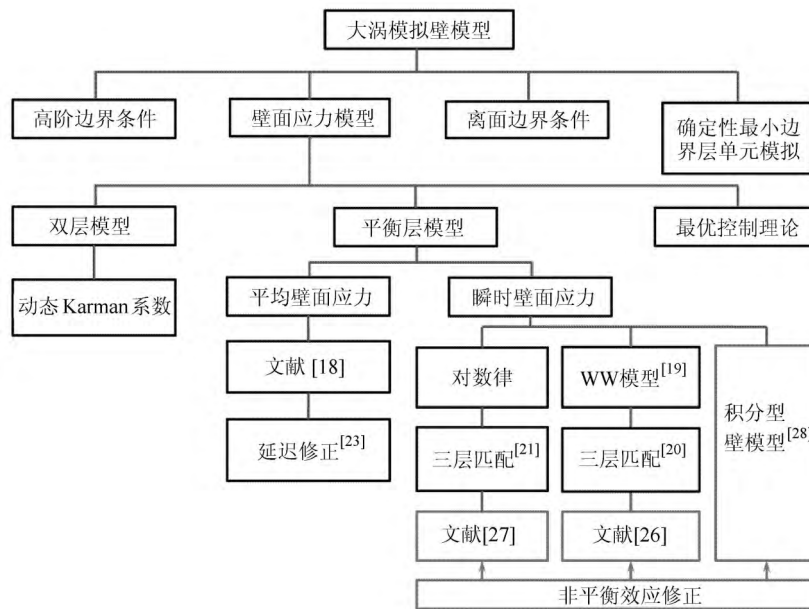


图 3 本文介绍的大涡模拟中的壁模型, 其中壁面应力模型的应用最为广泛. 它主要包括平衡层模型和双层模型. 平衡层模型可以通过近壁速度求得壁面切应力, 双层模型通过在近壁细网格上求解简化的流动方程得到壁面切应力. 在平衡层模型的基础上, 考虑非平衡效应的修正方法可以用于非平衡湍流

Fig. 3 Wall-models for LES of wall-bounded turbulence. Wall-stress models are widely used in LES. The equilibrium models and the two-layer models are the two main branches of the wall-stress models. The equilibrium models compute the wall-stress based on the equilibrium boundary layer near the wall. The two-layer models compute the wall-stress by solving the simplified equations near the wall. The improved versions of the equilibrium models have the capability of accounting for the non-equilibrium effects

## 2 周期山状流的模化壁面层的大涡模拟

### 2.1 周期山状流的大涡模拟方程

周期山状流是 ERCOFTAC/IAHR(欧洲湍流与燃烧研究机构) 设计的 LES 的测试算例, 被广泛用于数值方法和湍流模型的研究<sup>[41-44]</sup>. 该算例所用的工况为槽道中周期性放置山状障碍, 其中山的高度为

$h$ , 山状障碍的间距为  $9h$ , 槽道高度为  $3.035h$ , 槽道的展向长度为  $4.5h$ . 雷诺数 ( $Re = U_b h/\nu$ ) 为 10595, 其中  $U_b$  为山顶上的平均速度. 本文取  $h$  以及  $U_b$  作为特征量用于流动方程的无量纲化. 图 4 给出了周期山状流平均速度的流线以及不同流向位置处的平均流向速度剖面.

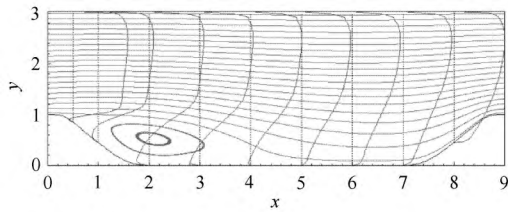


图 4 周期山状流平均速度的流线以及不同流向位置处的平均流向速度剖面

Fig. 4 The streamlines and the profiles of the mean streamwise velocities at different streamwise locations

为封闭大涡模拟方程中的亚格子应力项，通常使用不可压缩湍流的涡黏假设

$$\tau_{ij} = 2\nu_{SGS}\bar{S}_{ij} + \frac{1}{3}\delta_{ij}\tau_{kk} \quad (15)$$

其中， $\bar{S}_{ij} = (\partial\bar{u}_i/\partial x_j + \partial\bar{u}_j/\partial x_i)/2$  为滤波后的应变率张量， $\nu_{SGS}$  为亚格子涡黏系数。

在采用了上面的涡黏假设后，大涡模拟的动量方程如下

$$\begin{aligned} \frac{\partial\bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial\bar{u}_i\bar{u}_j}{\partial x_j} = & -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\nu + \nu_{SGS}) \cdot \right. \\ & \left. \left( \frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right] - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_i}\delta_{li} \end{aligned} \quad (16)$$

需要得到涡黏系数的模型才能求解方程 (16)。Smagorinsky 涡黏模型<sup>[45]</sup> 是大涡模拟中常用的模型之一，它的涡黏系数为

$$\nu_{SGS} = C_s^2\bar{\Delta}^2|\bar{S}| \quad (17)$$

其中， $|\bar{S}| = \sqrt{2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij}}$ ， $\bar{\Delta}$  为滤波宽度。在 Smagorinsky 模型中，模型系数  $C_s^2$  在计算之前需要指定其值。当计算区域复杂的时候，无法在计算之前给出  $C_s^2$  的表达式。

为了解决这个问题，Germano 等<sup>[46]</sup> 发展了确定系数  $C_s^2$  的动态方法。他们的思路是引入二次滤波（用尖帽号“ $\hat{\cdot}$ ”表示），并采用 Germano 恒等式进行动态调整。在程序中，可以采用网格单元体积的立方根作为一次滤波宽度  $\bar{\Delta}$ ，而采用此单元与相邻单元体积之和的立方根作为二次滤波宽度  $\hat{\Delta}$ 。同时采用该单元与相邻单元内物理量的简单平均得到二次滤波以后的量。在使用滤波宽度  $\bar{\Delta}$  进行一次滤波时，亚格子应力被  $\tau_{ij}$  模化。在使用滤波宽度  $\hat{\Delta}$  进行二次滤波时，亚格子应力被  $T_{ij}$  模化。 $\tau_{ij}$  和  $T_{ij}$  的表达式分别为

$$\tau_{ij} = \bar{u}_i\bar{u}_j - \overline{u_i u_j} \quad (18)$$

$$T_{ij} = \hat{\bar{u}}_i\hat{\bar{u}}_j - \widehat{\bar{u}_i\bar{u}_j} \quad (19)$$

从而可以得到 Germano 恒等式

$$L_{ij} = \hat{\bar{u}}_i\hat{\bar{u}}_j - \widehat{\bar{u}_i\bar{u}_j} = T_{ij} - \hat{\tau}_{ij} \quad (20)$$

其中， $\hat{\bar{u}}_i\hat{\bar{u}}_j - \widehat{\bar{u}_i\bar{u}_j}$  可以用可解尺度计算出来。

根据 Smagorinsky 模型，滤波宽度  $\bar{\Delta}$  时的亚格子应力为

$$\tau_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\tau_{kk} = 2C_s^2\bar{\Delta}^2|\bar{S}|\bar{S}_{ij} \quad (21)$$

同样地，滤波宽度  $\hat{\Delta}$  时的亚格子应力为

$$T_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}T_{kk} = 2C_s^2\hat{\Delta}^2\left|\hat{S}\right|\hat{S}_{ij} \quad (22)$$

代入 Germano 恒等式，并令

$$M_{ij} = \left(\frac{\hat{\Delta}^2}{\bar{\Delta}^2}\right)\left|\hat{S}\right|\hat{S}_{ij} - |\bar{S}|\bar{S}_{ij} \quad (23)$$

可以得到

$$L_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}L_{kk} = 2C_s^2\bar{\Delta}^2M_{ij} \quad (24)$$

上式是超定方程，可以采用最小二乘法求解<sup>[47]</sup>

$$C_s^2\bar{\Delta}^2 = \frac{1}{2}\frac{L_{ij}M_{ij}}{M_{kl}M_{kl}} \quad (25)$$

需要注意的是，根据上式计算得到的系数  $C_s^2$  可能小于 0，为了克服这个问题，当计算得到的系数小于 0 时就将其置于 0。同时，对于展向统计均匀的湍流，可以通过在展向取平均消除系数脉动的做法来减小系数小于 0 的几率

$$C_s^2\bar{\Delta}^2 = \frac{1}{2}\frac{\langle L_{ij}M_{ij} \rangle_z}{\langle M_{kl}M_{kl} \rangle_z} \quad (26)$$

其中， $\langle \cdot \rangle_z$  表示展向平均。本文的算例周期山状流是展向统计均匀的湍流，因此通过方程 (26) 进行展向平均来减小系数小于 0 的几率。

在数值模拟中，下壁面设置为无滑移边界条件，流向与展向设置为周期边界条件，上壁面的切应力边界条件由壁模型提供。时间推进采用分步法，对流项的时间推进采用显式的两步 Adams-Bashforth 格式，黏性项采用 Crank-Nicholson 格式。流场采用非结构网格离散，方程中的空间导数采用有限体积方法离散。非结构网格可以采用任意形状的单元，因此能够很好地模拟复杂几何边界。尤其是在非结构网格上结合有限体积方法，可以使计算程序具有很强

的通用性. 为了保持数值计算的精度和稳定性, 使用了基于离散动能守恒原理的非结构网格上的离散方法<sup>[48]</sup>. 该方法在计算区域中不产生非物理的能量源, 从而可以保持大涡模拟的精度和预测能力. 压力 Poisson 方程采用代数多重网格方法求解, 代数多重网格的求解器为 Hypre 软件包中的 BoomerAMG.

### 2.2 周期山状流大涡模拟的壁模型

本节阐述在计算中采用 WW 模型 (式 (8)) 的主要思路, 即如何由近壁速度确定壁面切应力.

采用与 ERCOFTAC 数据库中文献 [49-50] 相同的计算网格: 其中流向、法向和展向的网格数目分别为 197, 129 和 186. 需要注意的是, 文献 [49-50] 使用基于结构网格的流场求解器, 而本文使用基于非结构网格的流场求解器, 因此该网格预先被处理成非结构网格的形式. 图 5 画出了垂直于展向的某一截面上的网格分布, 下壁面近壁网格的特征尺度满足

$$y_1^+ < 2 \quad (27)$$

其中, 上标 “+” 表示用黏性长度做无量纲化,  $y_1$  表示近壁面的第一层网格到壁面的法向距离. 可以看到下壁面附近网格尺度是能够解析壁面层的. 上壁面近壁网格的特征尺度满足

$$y_1^+ \in [12, 17] \quad (28)$$

可以看到上壁面附近网格尺度不能够解析壁面层, 因此需要在上壁面使用壁模型.

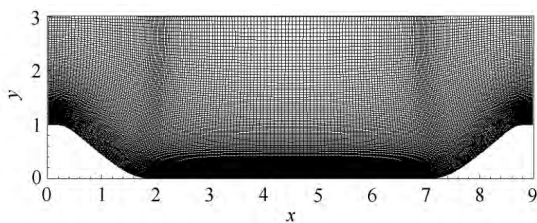


图 5 周期山状流的大涡模拟所用的网格截面

Fig. 5 A two-dimensional slice of the grid used for LES of the flows over periodic hills

本文使用的壁模型是 WW 模型 (式 (8)). 在应用中通常采用单元积分的形式, 即

$$\frac{U_p}{u_\tau} = \frac{1}{\Delta y^+} \int_0^{\Delta y^+} u^+(y^+) dy^+ \quad (29)$$

其中,  $U_p$  为近壁第一层单元中心的速度,  $\Delta y^+ = \Delta y u_\tau / \nu$ ,  $\Delta y$  为第一层单元的大小. 式 (29) 表示单元

中心的速度是整个单元内速度的平均值. 把 WW 模型的速度剖面形式代入上式, 便可以得到关于摩擦速度  $u_\tau$  的代数方程. 根据该方程可以解析求解摩擦速度, 从而确定壁面切应力.

根据 WW 模型 (式 (8)), 如果近壁速度满足

$$|U_p| \leq \frac{\nu}{2\Delta y} A^{\frac{2}{1-B}} \quad (30)$$

则第一层网格全部在线性底层. 此时, 壁面切应力可以表示为

$$|\tau_w| = \rho \frac{2\nu |U_p|}{\Delta y} \quad (31)$$

如果近壁速度满足

$$|U_p| > \frac{\nu}{2\Delta y} A^{\frac{2}{1-B}} \quad (32)$$

则第一层网格单元内的速度部分在线性层部分在幂律层. 此时, 壁面切应力可以表示为

$$|\tau_w| = \rho \left[ \frac{1-B}{2} A^{\frac{1+B}{1-B}} \left( \frac{\nu}{\Delta y} \right)^{1+B} + \frac{1+B}{A} \left( \frac{\nu}{\Delta y} \right)^B |U_p| \right]^{\frac{2}{1+B}} \quad (33)$$

由此, 根据 WW 模型得到了壁面切应力与近壁速度间的解析关系. 根据 Schumann<sup>[17]</sup> 的假设, 近壁附近的瞬时切向速度和壁面切应力同向. 由此在计算中, 上述表达式中壁面切应力  $\tau_w$  的方向与  $U_p$  保持一致.

### 2.3 计算结果

本文采用动态 Smagorinsky 模型 (以下简称为 DSM) 作为大涡模拟的亚格子模型, 并且在上壁面使用 WW 模型. 当流动达到统计定常的状态后统计时长为  $500h/U_b$ .

图 4 画出了平均流场的流线, 从中可以看出流动分离、再附和回流区等分离流的物理特征. 流动分离点在  $x = 0.2$  附近, 流动再附点在  $x = 4.6$  附近, 这些结果与文献 [49-50] 的结果吻合.

本文在 4 个截面处比较了计算的平均速度与文献 [49-50] 的计算结果以及文献 [51] 的实验结果, 这 4 个截面分别是位于流动分离点附近的  $x = 0.5$ 、位于回流区中部的  $x = 2.0$ 、位于再附点附近的  $x = 4.0$  以及位于再附点之后流动恢复处的  $x = 6.0$ . 图 6 对比了平均流向速度  $U$ , 图 7 对比了平均法向速度  $V$ , 本文的计算结果与文献 [49-50] 的计算结果以及文献 [51] 的实验结果吻合很好.  $x = 0.5$  处存在微弱的回流, 如图 6(a) 所示. 此外, 流速在山顶高度附近快速增加,

这说明存在流动分离形成的强剪切层.  $x = 2.0$  处下壁面附近存在明显的回流, 此处的平均剪切明显比  $x = 0.5$  处的小, 如图 6(b) 所示.  $x = 4.0$  处虽然还在回流区内, 但由于已经接近再附点位置, 因此只有微弱的回流现象, 如图 6(c) 所示.  $x = 6.0$  处流动恢复, 平均流向速度都是正值, 如图 6(d) 所示. 此外, 图 7(c) 和图 7(d) 表明  $x = 4.0$  和  $x = 6.0$  处整个截面上平均法向速度都是负值, 这表明回流区之外的流动由于扩张所引起的向下的速度.

进一步地比较  $x = 0.5$ ,  $x = 2.0$ ,  $x = 6.0$  这 3 个截面上二阶脉动统计量的结果. 图 8 比较了流向脉动速度的二阶统计量  $\langle u'u' \rangle$ , 图 9 比较了法向脉动速度的二阶统计量  $\langle v'v' \rangle$ , 图 10 比较了雷诺应力  $\langle u'v' \rangle$ . 本文

的结果与文献 [49-50] 的计算结果以及文献 [51] 的实验结果吻合很好.  $x = 0.5$  处由于在山顶高度附近存在强剪切层, 雷诺应力在剪切层内存在一个强烈的峰值. 同时, 由于强剪切和雷诺应力对流向脉动方差的生成作用, 流向脉动方差在剪切层内也有一个强烈的峰值, 如图 8(a) 和图 10(a) 所示. 从图 8(b)、图 9(b) 以及图 10(b) 可以看出, 由于存在剪切,  $x = 2.0$  处剪切层中的雷诺应力为负, 且流向速度脉动方差、法向速度脉动方差以及雷诺应力的峰值所在的壁面法向位置相近. 图 6(d) 表明  $x = 6.0$  处也存在剪切, 从而通过图 8(c), 图 9(c) 以及图 10(c) 可以看出,  $x = 6.0$  处脉动速度的二阶统计量的性质与  $x = 2.0$  处类似.

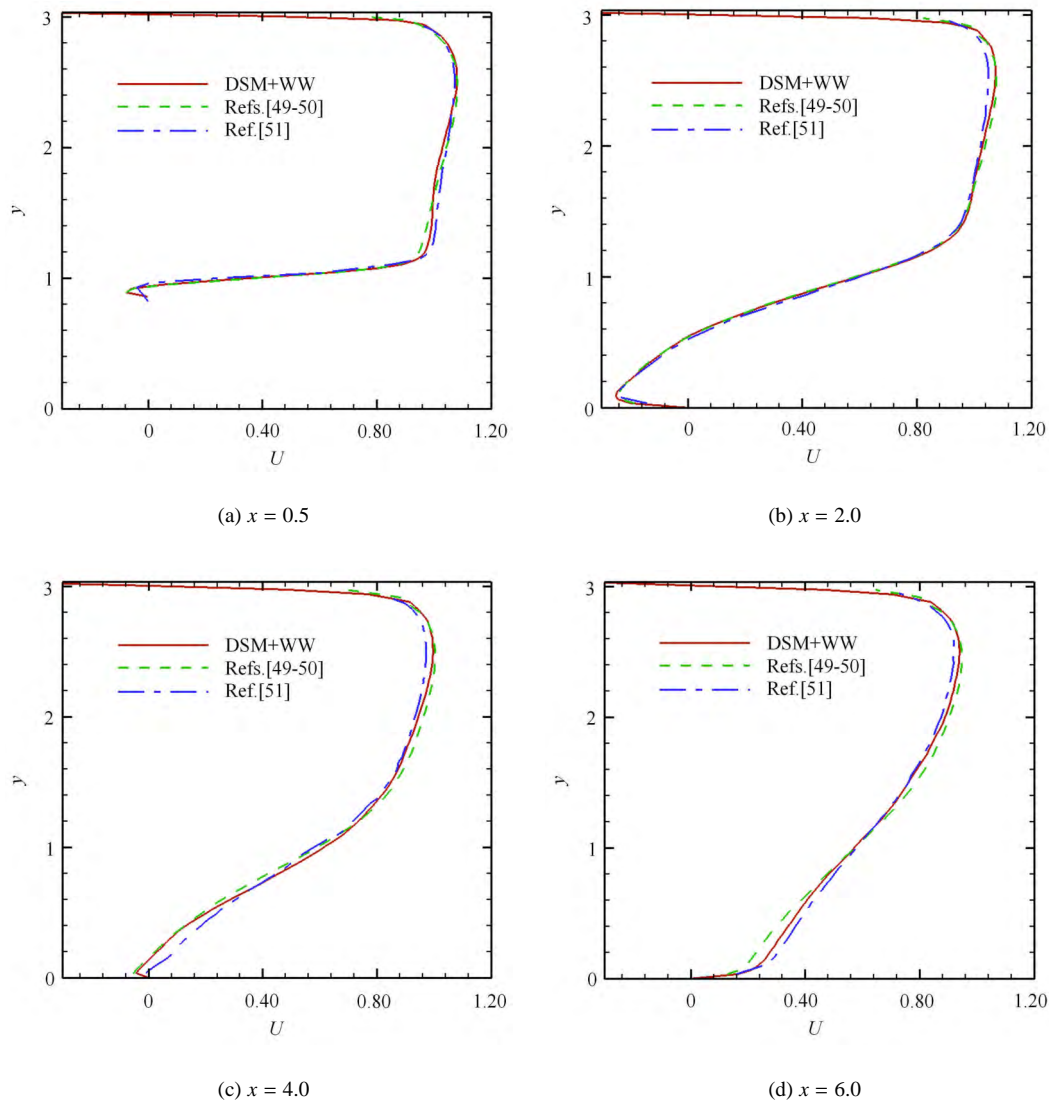


图 6 周期山状流的流向平均速度剖面的比较

Fig. 6 The profiles of the mean streamwise velocities



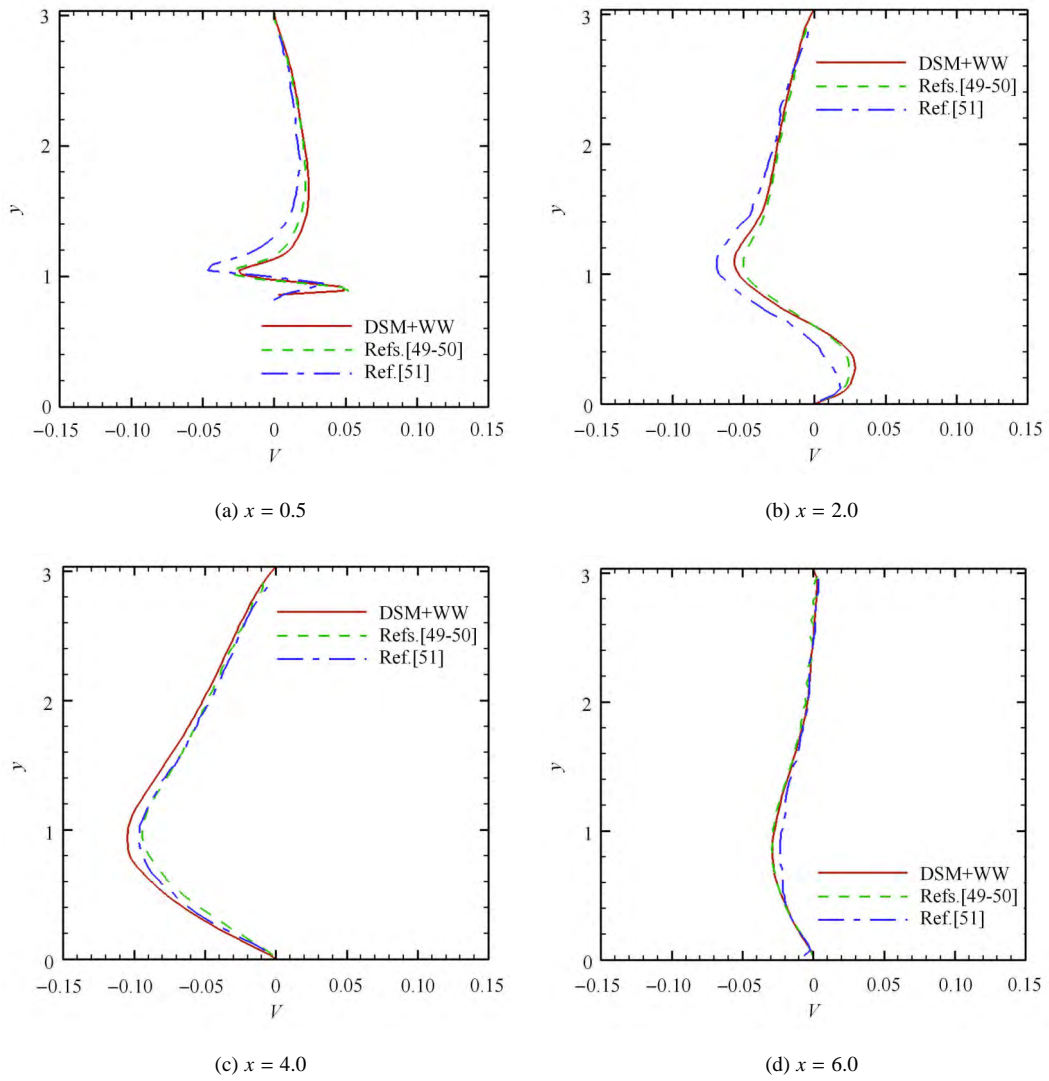


图 7 周期山状流的法向平均速度剖面的比较

Fig. 7 The profiles of the mean wall-normal velocities

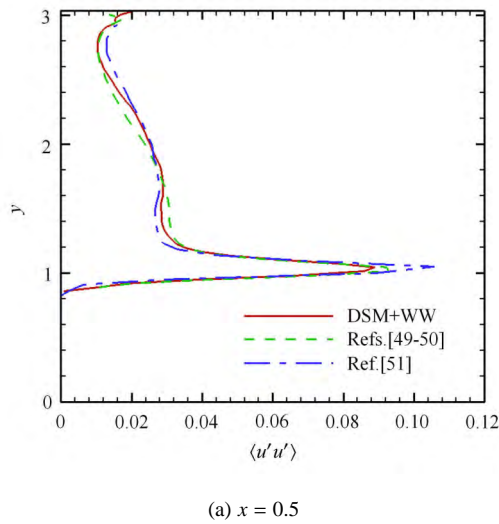


图 8 周期山状流的流向速度脉动方差的比较

Fig. 8 The variance of streamwise velocities

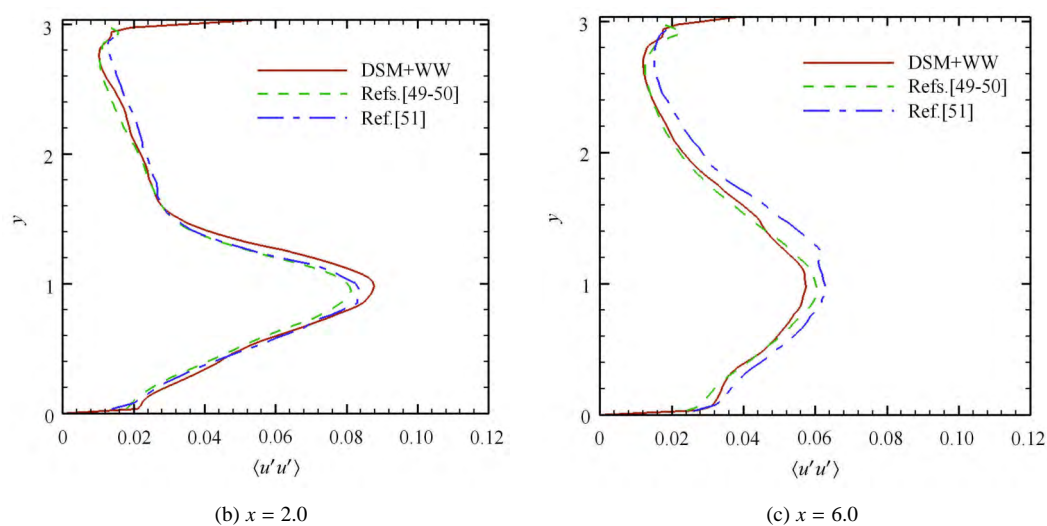


图 8 周期山状流的流向速度脉动方差的比较 (续)

Fig. 8 The variance of streamwise velocities (continued)

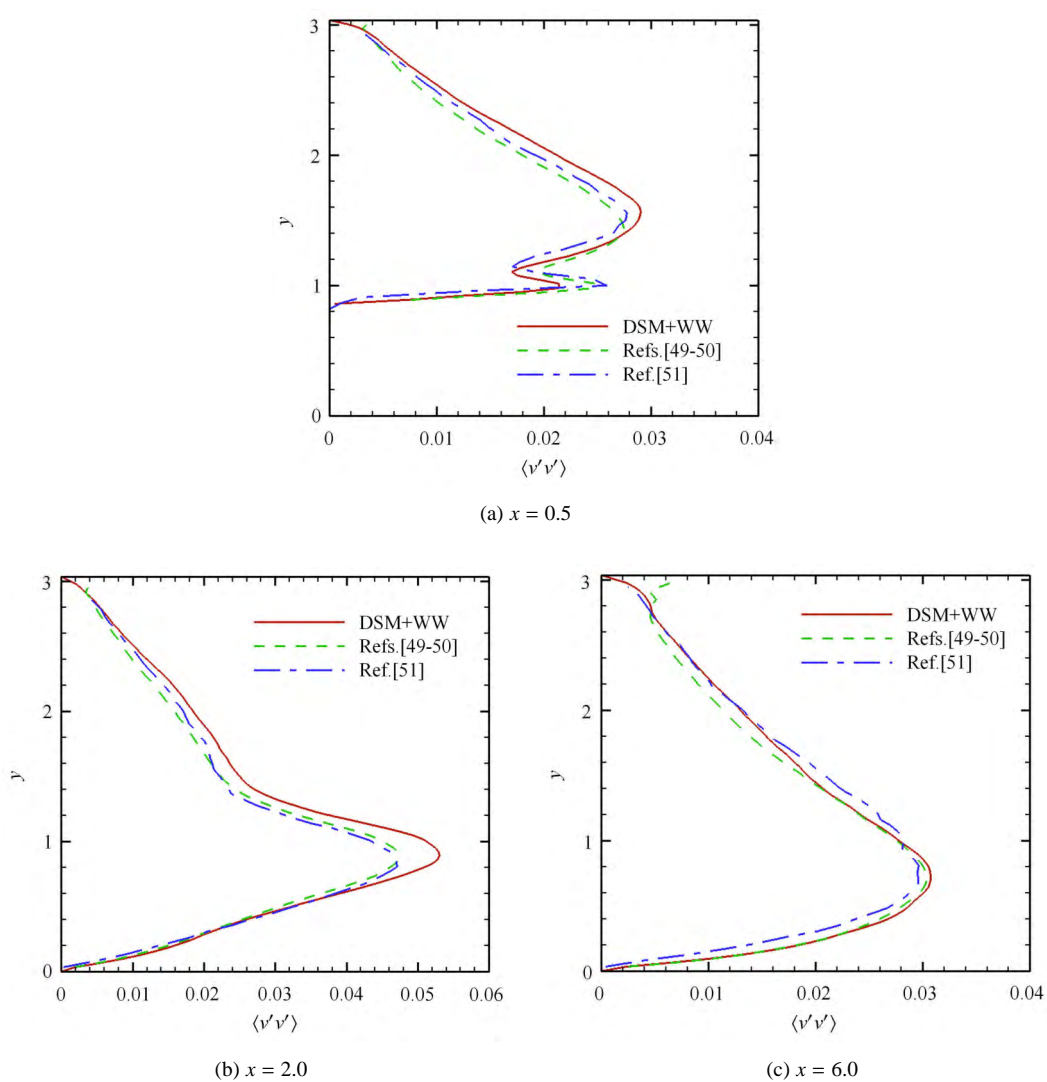


图 9 周期山状流的法向速度脉动方差的比较

Fig. 9 The variance of wall-normal velocities

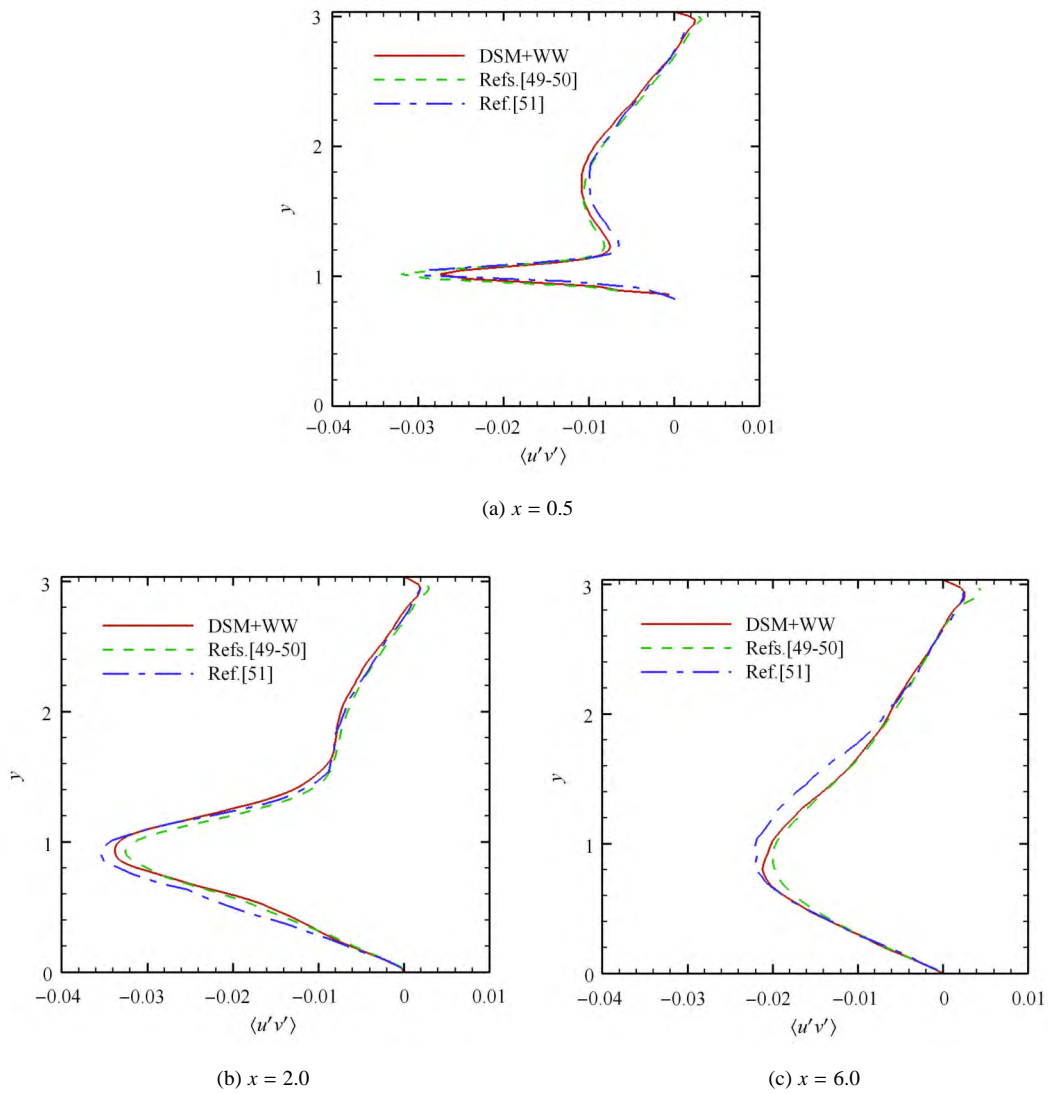


图 10 周期山状流的雷诺应力的比较  
Fig. 10 The profiles of Reynolds stresses

本文所得到的下壁面摩擦系数的结果与文献 [49-50] 的结果一致, 如图 11(a) 所示. 下壁面摩擦系数在流动分离点 ( $x = 0.2$  附近) 以及流动再附点 ( $x = 4.6$  附近) 这两个位置处穿过零点. 在  $x = 2.6$  附近摩擦系数最小, 说明此处回流速度最大. 流体流向山状物体的迎风面时由于截面收缩而加速, 导致摩擦系数急剧上升, 在  $x = 8.6$  附近达到最大.

图 11(b) 比较了下壁面的压力系数  $C_p$ , 可以看到, 本文压力系数的结果与文献 [49-50] 的结果吻合较好, 在流动恢复段有约 5% 的差别. 从图 11(b) 可以看出, 压力系数在山顶后陡升, 形成逆压梯度而引起分离, 接着压力系数在回流区的前半部分 ( $x = 0.5$  到  $x = 2.0$  之间) 几乎是恒定的. 此后由于外部流体扩

张导致减速, 从而引起逆压梯度, 当  $x = 7.6$  附近压力系数达到最大值. 当流体流向山状物体的迎风面时会加速, 这导致压力减小, 甚至出现负压, 在  $x = 8.7$  附近达到最小值. 可以看到, 由于流体的加速也导致摩擦系数上升, 压力极小值位置在摩擦系数最大值位置附近.

### 3 结论

本文根据湍流近壁流动的特征讨论了用于大涡模拟的壁模型, 其中主要讨论了壁面应力模型. 壁面应力模型中已经被广泛研究和使用的是平衡层模型, 该类模型通过假定速度剖面 (对数律或幂律) 可以给出壁面切应力与近壁速度之间的联系. 但是如

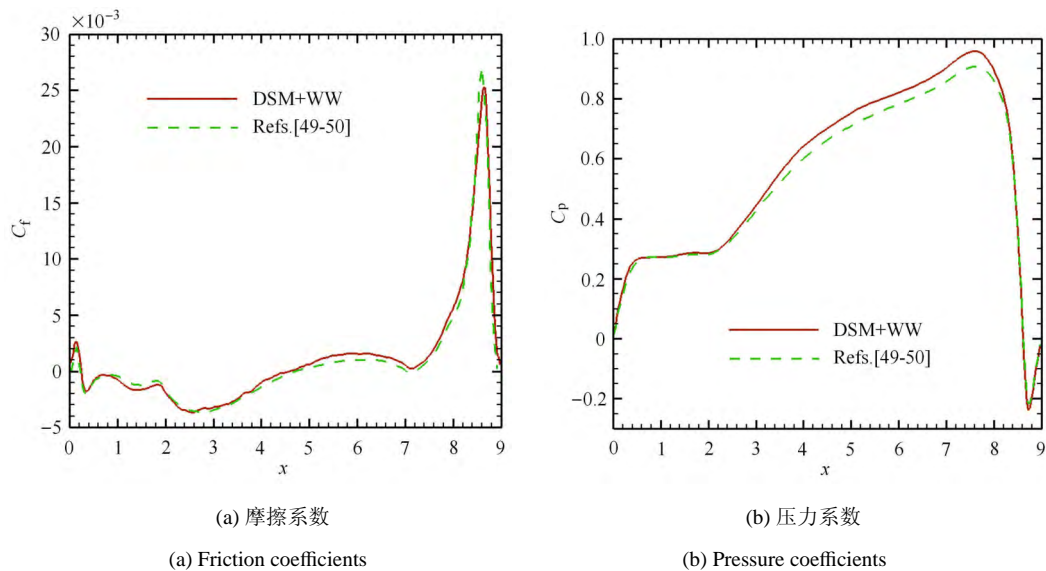


图 11 周期山状流下壁面摩擦系数与压力系数的比较

Fig. 11 The friction and the pressure coefficients along the bottom wall

果近壁流动远离平衡状态,平衡层模型难以准确估计壁面切应力,此时需要考虑压力梯度等非平衡效应.除了平衡层模型,双层模型也广泛用于求解壁面切应力,但是其应用过程比平衡层模型更复杂.图3画出了本文介绍的壁模型的关系图.

本文实现了基于 WW 模型的周期山状流的大涡模拟.该大涡模拟基于非结构网格的有限体积方法来离散控制方程,并使用基于离散动能守恒原理的方法,使用动态 Smagorinsky 模型作为亚格子模型,并且在不能解析壁面层的上壁面使用 WW 模型提供应力边界条件.分析了流动的平均速度、脉动方差、雷诺应力、壁面压力以及摩擦力等统计量,本文的计算结果与文献的数值结果以及实验结果一致.

由于 WW 模型属于平衡层模型,而周期山状流下壁面附近存在流动分离、再附以及回流等压力梯度不能忽略的非平衡现象,因此当前的工作在下壁面附近使用了能够解析壁面层的网格.为了进一步减少计算量,可以在下壁面附近使用不能解析壁面层的网格,那就需要能够适用于分离流等复杂流动的壁模型,这是现在一个活跃的研究领域.本文提到的考虑了压力梯度等非平衡效应的各种壁模型应该被广泛测试,以加深对这些模型适用范围的认识.最后,当考虑湍流噪声问题,需要精准计算壁面附近流动的时空关联,因此需要发展时间精准的壁模型<sup>[52]</sup>.

## 参 考 文 献

1 安翼,莫晃锐,刘青泉. 高速列车头型长细比对气动噪声的影

- 响. 力学学报, 2017, 49(5): 985-996 (An Yi, Mo Huangrui, Liu Qingquan. Study on the influence of the nose slenderness ratio of high-speed train on the aerodynamic noise. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2017, 49(5): 985-996 (in Chinese))
- 2 林孟达,崔桂香,张兆顺等. 飞机尾涡演变及快速预测的大涡模拟研究. 力学学报, 2017, 49(6): 1185-1200 (Lin Mengda, Cui Guixiang, Zhang Zhaoshun, et al. Large eddy simulation on the evolution and the fast-time prediction of aircraft wake vortices. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2017, 49(6): 1185-1200 (in Chinese))
- 3 冯峰,郭力,王强. 高亚声速喷流气动噪声数值分析. 力学学报, 2016, 48(5): 1049-1060 (Feng Feng, Guo Li, Wang Qiang. Numerical investigation of noise of a high subsonic turbulent jet. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2016, 48(5): 1049-1060 (in Chinese))
- 4 王纪,邱翔,罗剑平等. 湍流强度对预混燃烧影响的大涡模拟研究. 力学季刊, 2014(4): 548-559 (Wang Ji, Qiu Xiang, Luo Jianping, et al. Large eddy simulation of the effects of turbulence intensity on premixed combustion. *Chinese Quarterly of Mechanics*, 2014(4): 548-559 (in Chinese))
- 5 刘难生,仲峰泉,陆夕云等. 旋转圆管湍流的大涡模拟数值研究. 力学学报, 2002, 34(6): 833-846 (Liu Nansheng, Zhong Fengquan, Lu Xiyun, et al. Large eddy simulation on turbulent flow in a pipe rotating about its axis. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2002, 34(6): 833-846 (in Chinese))
- 6 Moin P, Bodart J, Bose S, et al. Wall-modeling in complex turbulent flows//Braza M, Bottaro A, Thompson M, eds. *Advances in Fluid-Structure Interaction*, Berlin: Springer, 2016: 207-19
- 7 Park GI, Moin P. Wall-modeled LES: Recent applications to complex flows//Annual Research Briefs 2016. Stanford, CA: Cent. Turbul. Res., 2016: 39-50
- 8 Choi H, Moin P. Grid-point requirements for large eddy simulation: Chapman's estimates revisited. *Phys Fluids*, 2012, 24(1): 011702
- 9 Piomelli U, Balaras E. Wall-layer models for large-eddy simula-

- tions. *Annu Rev Fluid Mech*, 2002, 34(1): 349-374
- 10 Piomelli U. Wall-layer models for large-eddy simulation. *Progress in Aerospace Sciences*, 2008, 44(6): 437-446
  - 11 Sagaut P. Large Eddy Simulation for Incompressible Flows: An Introduction. Berlin: Springer, 2006
  - 12 许春晓. 壁湍流相干结构和减阻控制机理. *力学进展*, 2015, 45: 201504 (Xu Chunxiao. Coherent structures and drag-reduction mechanism in wall turbulence. *Advances in Mechanics*, 2015, 45: 201504 (in Chinese))
  - 13 Chaouat B. The state of the art of hybrid RANS/LES modeling for the simulation of turbulent flows. *Flow Turbul Combust*, 2017, 99(2): 279-327
  - 14 Fu S, Xiao ZX, Chen HX, et al. Simulation of wing-body junction flows with hybrid RANS/LES methods. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 2007, 28(6): 1379-1390
  - 15 Balin R, Spalart PR, Jansen KE. An investigation into the reduction of log-layer mismatch in wall-modeled LES with a hybrid RANS/LES approach//Bulletin of the American Physical Society, 2017, 62
  - 16 Bose ST, Park GI. Wall-Modeled Large-eddy simulation for complex turbulent flows. *Annu Rev Fluid Mech*, 2018, 50(1): 535-561
  - 17 Schumann U. Subgrid scale model for finite difference simulations of turbulent flows in plane channels and annuli. *J Comput Phys*, 1975, 18(4): 376-404
  - 18 Grötzbach G. Direct numerical and large eddy simulation of turbulent channel flows. *Encyclopedia of fluid mechanics*, 1987, 6: 1337-1391
  - 19 Werner H, Wengle H. Large-eddy simulation of turbulent flow over and around a cube in a plate channel//Werner H, Wengle H, eds. *Turbulent Shear Flows 8*. Berlin: Springer, 1993: 155-168
  - 20 Inagaki M, Murata O, Kondoh T, et al. Numerical prediction of fluid-resonant oscillation at low mach number. *AIAA Journal*, 2002, 40(9): 1823-1829
  - 21 Breuer M, Rodi W. Large eddy simulation of complex turbulent flows of practical interest//Hirschel EH, ed. *Flow Simulation with High Performance Computers II*. Braunschweig: Vieweg, 1996. 258-274
  - 22 Rajagopalan S, Antonia RA. Some properties of the large structure in a fully developed turbulent duct flow. *Phys Fluids*, 1979, 22(4): 614-622
  - 23 Piomelli U, Ferziger J, Moin P, et al. New approximate boundary conditions for large eddy simulations of wall-bounded flows. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, 1989, 1(6): 1061-1068
  - 24 Skote M, Henningson DS. Direct numerical simulation of a separated turbulent boundary layer. *J Fluid Mech*, 2002, 471: 107-136
  - 25 Larsson J, Kawai S, Bodart J, et al. Large eddy simulation with modeled wall-stress: Recent progress and future directions. *Mech Eng Rev*, 2016, 3(1): 15-00418
  - 26 Breuer M, Kniazev B, Abel M. Development of wall models for LES of separated flows using statistical evaluations. *Computer & Fluids*, 2007, 36: 817-837
  - 27 Duprat C, Balarac G, Métails O, et al. A wall-layer model for large-eddy simulations of turbulent flows with/out pressure gradient. *Phys. Fluids*, 2011, 23(1): 015101
  - 28 Yang X, Sadique J, Mittal R, et al. Integral wall model for large eddy simulations of wall-bounded turbulent flows. *Phys Fluids*, 2015, 27(2): 025112
  - 29 Nicoud F, Baggett JS, Moin P, et al. Large eddy simulation wall-modeling based on suboptimal control theory and linear stochastic estimation. *Phys. Fluids*, 2001, 13(10): 2968-2984
  - 30 Bae HJ, Lozano-Durán A, Bose ST, et al. Turbulence intensities in large-eddy simulation of wall-bounded flows. *Phys Rev Fluids*, 2018, 3(1): 014610
  - 31 Bae HJ, Lozano-Durán A, Moin P. Investigation of the slip boundary condition in wall-modeled LES//Annual Research Briefs 2016. Stanford, CA: Cent. Turbul. Res. 2016: 75-86
  - 32 Yang X, Bose ST, Moin P. A physics-based interpretation of the slip-wall LES model//Annual Research Briefs 2016. Stanford, CA: Cent. Turbul. Res. 2016: 65-74
  - 33 Lozano-Durán A, Bae HJ, Bose ST, et al. Dynamic wall models for the slip boundary condition//Annual Research Briefs 2017. Stanford, CA: Cent. Turbul. Res. 2017. In press
  - 34 Balaras E, Benocci C, Piomelli U. Two-layer approximate boundary conditions for large-eddy simulations. *AIAA Journal*, 1996, 34(6): 1111-1119
  - 35 Wang M, Moin P. Dynamic wall modeling for large-eddy simulation of complex turbulent flows. *Phys Fluids*, 2002, 14(7): 2043-2051
  - 36 Kawai S, Larsson J. Dynamic non-equilibrium wall-modeling for large eddy simulation at high Reynolds numbers. *Phys Fluids*, 2013, 25(1): 015105
  - 37 Park GI, Moin P. An improved dynamic non-equilibrium wall-model for large eddy simulation. *Phys. Fluids*, 2014, 26(1): 37-48
  - 38 Park GI, Moin P. Numerical aspects and implementation of a two-layer zonal wall model for LES of compressible turbulent flows on unstructured meshes. *J Comput Phys*, 2016, 305: 589-603
  - 39 张兆顺, 崔桂香, 许春晓. 湍流大涡数值模拟的理论与应用. 北京: 清华大学出版社, 2008: 194-196 (Zhang Zhaoshun, Cui Guixiang, Xu Chunxiao. *Theory and Application of Large-Eddy Simulation of Turbulent Flows*. Beijing: Tsinghua University Press, 2008: 194-196 (in Chinese))
  - 40 崔桂香, 许春晓, 张兆顺. 湍流大涡数值模拟进展. *空气动力学学报*, 2004, 22(2): 121-129 (Cui Guixiang, Xu Chunxiao, Zhang Zhaoshun. *Progress in large eddy simulation of turbulent flows*. *Acta Aerodynamica Sinica*, 2004, 22(2): 121-129 (in Chinese))
  - 41 Tunstall R, Laurence D, Prosser R, et al. Towards a generalised dual-mesh hybrid LES/RANS framework with improved consistency. *Computers & Fluids*, 2017, 157: 73-83
  - 42 Kumar G, Lakshmanan SK, Gopalan H, et al. Investigation of the sensitivity of turbulent closures and coupling of hybrid RANS-LES models for predicting flow fields with separation and reattachment. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2017, 83(12): 917-939
  - 43 Kadoch B, Reimann T, Schneider K, et al. Comparison of a spectral method with volume penalization and a finite volume method with body fitted grids for turbulent flows. *Computers & Fluids*, 2016, 133: 140-150
  - 44 Wu JL, Wang JX, Xiao H, et al. A priori assessment of prediction confidence for data-driven turbulence modeling. *Flow Turbul Com-*

- bust*, 2017, 99(1): 25-46
- 45 Smagorinsky J. General circulation experiments with the primitive equations. *Monthly Weather Review*, 1963, 91(3): 99-164
- 46 Germano M, Piomelli U, Moin P, et al. A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, 1991, 3(7): 1760-1765
- 47 Lilly DK. A proposed modification of the Germanosubgrid-scale closure method. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, 1992, 4(3): 633-635
- 48 You D, Ham F, Moin P. Discrete conservation principles in large-eddy simulation with application to separation control over an airfoil. *Phys Fluids*, 2008, 20(10): 101515
- 49 Temmerman L, Leschziner MA, Mellen CP, et al. Investigation of wall-function approximations and subgrid-scale models in large eddy simulation of separated flow in a channel with streamwise periodic constrictions. *Int J Heat Fluid Flow*, 2003, 24(2): 157-180
- 50 Fröhlich J, Mellen CP, Rodi W, et al. Highly resolved large-eddy simulation of separated flow in a channel with streamwise periodic constrictions. *J Fluid Mech*, 2005, 526: 19-66
- 51 Breuer M, Peller N, Rapp C, et al. Flow over periodic hills—numerical and experimental study in a wide range of Reynolds numbers. *Computers & Fluids*, 2009, 38(2): 433-457
- 52 He GW, Jin GD, Yang Y. Space-time correlations and dynamic coupling in turbulent flows. *Annu Rev Fluid Mech*, 2017, 49: 51-70