

# 纤维复合材料后微屈曲的理论和实验\*

魏悦广

(中国科学院力学研究所, 北京 100080)

杨 卫 黄克智

(清华大学力学系, 北京 100084)

## 摘 要

后微屈曲是单向纤维复合材料和层状复合材料压缩破坏过程的基本特征. 结合 Kevlar 49 增强 648/BF<sub>3</sub>·400 (脆性环氧) 和 EP (韧性环氧) 基复合材料对后微屈曲的折带扩展进行理论分析和实验研究. 理论预测与实验结果达到定性、定量符合. 实验展现出扩展折带模式的微屈曲特征.

**关键词** 弹塑性失稳、后微屈曲、折带

## 1 引 言

对纤维增强复合材料压缩失稳的研究有着广阔的应用前景. 该项研究虽已有 30 年的历史了, 但至今仍有一些基本问题未能澄清, 诸如传统的 Rosen<sup>[1]</sup> 公式的适用范围, 压缩破坏模式及失稳载荷的理论预测与实验结果的较大差异, 等等. 众所周知, 对常规复合材料 (纤维中密度分布), 由 Rosen 公式计算的强度值, 一般来说远大于实验量测值<sup>[2]</sup>. 考察 Rosen 公式的推导过程, 我们认为 Rosen 的同相位解只适用于弱基体和弱界面复合材料, 而异相位解适用于稀疏纤维复合材料 ( $V_f < 0.1$ ,  $V_f$  为纤维体积分数) 或者高强度纤维 (如硼纤维) 复合材料的情形.

Argon<sup>[3]</sup> 以及 Fleck 和 Budiansky<sup>[2]</sup> 考虑基体塑性变形的情况. 他们导出的失稳压力公式对纤维初曲率很敏感, 从而限制了它的适用范围. Piggott 和 Harris<sup>[4]</sup> 对纤维增强复合材料压缩破坏问题进行了系统的实验研究. 他们的结论是, 从稀疏到中密度纤维分布 ( $0.05 < V_f < 0.31$ ), 压缩破坏模式由层间劈裂到折带. Steif<sup>[5,6]</sup> 将 Hill 和 Hutchinson<sup>[7]</sup> 的分叉思想用于研究层状材料的压缩问题, 在分析中将材料模拟为超弹性的. 魏悦广和杨卫<sup>[8]</sup> 精确地求解了层状材料的弹塑性分叉特征值问题, 得到的结论是, 复合材料失稳, 首先是纤维发

1993-07-26 收稿, 1994-01-26 收修改稿.

\*国家自然科学基金资助项目.

生塑性分叉, 并将分叉时的压力值与实验值<sup>[4,9]</sup>对比, 两者符合良好. Yang 和 Wei<sup>[10]</sup>从理论上阐述了折带和压曲带的形成机理. Wei 和 Yang<sup>[11]</sup>给出了折带桥联机制的一般性分析, 对桥联力的计算, 采用 Hutchinson<sup>[12]</sup>压杆塑性屈曲模型. 借助于  $J$  积分守恒性和能量守恒计算出复合材料的总体压缩应力应变曲线.

本文在文献 [11] 工作的基础上, 通过划分压杆塑性失稳的参数区间, 并针对 Kevlar 49 增强韧、脆两种环氧基复合材料压缩屈曲问题进行分析, 从理论上预测出其总体压缩应力应变曲线. 为了对理论解进行检验, 获得有关的材料参数以及对压缩失稳模式进行细致地考察, 本文也对 Kevlar 49 增强韧、脆两种环氧基复合材料的压缩失稳进行实验研究.

## 2 后微屈曲的桥联模型

纤维增强复合材料的后微屈曲特征可由图 1 所示材料构元的桥联模型刻画<sup>[11]</sup>. 桥联力采用图 1 所示的 Hutchinson 压杆塑性失稳模型计算. 在后面的分析中, 纤维被处理成双线性材料, 基体为线弹性材料.

在图 1 中,  $S$  为压杆横截面的瞬时转动中心位置坐标. 桥联应力  $\sigma_{fB}$ 、压杆转角  $\theta$  和  $S$  以及竖向压缩位移  $\delta$  之间的关系可由压杆的简单几何和平衡条件定出<sup>[11]</sup>. 对于不同材料特征, 将对应  $S$  单调增加和  $S$  单调减少两种分叉问题的解. 当  $S$  单调增加时 (以下简记为 S-I), 有<sup>[11]</sup>

$$\frac{\sigma_B}{\sigma_C} = 1 - \frac{1}{4w\hat{\sigma}_{fc}} [(1-s)^2 - t(1+s)^2] \sin\theta,$$

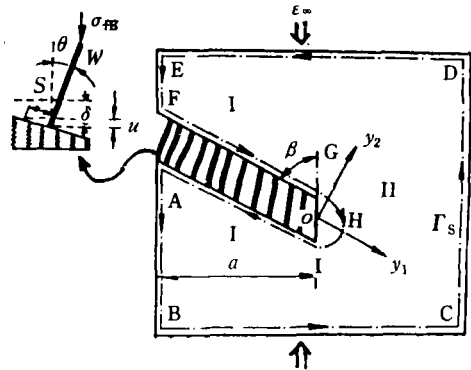


图1 折带的桥联模型及  $J$  积分路径

$$s = 2\sqrt{1 + 2w\lambda \tan\theta + w^2 \tan^2\theta} \cos\left(\psi - \frac{2}{3}\pi\right) - w \tan\theta,$$

$$\psi = \frac{1}{3} \arccos \left\{ \frac{-\left[\frac{1}{2} \omega \hat{\sigma}_{fc} / \cos\theta - (1 + w \tan\theta)^3 - (\lambda - 1)(1 + 3w^2 \tan^2\theta)\right]}{(1 + 2w\lambda \tan\theta + w^2 \tan^2\theta)^{3/2}} \right\},$$

$$\frac{\delta}{2h_f} = s \sin\theta + w(1 - \cos\theta) + w\epsilon_c, \tag{1}$$

其中  $\hat{\sigma}_{fc} = \frac{\sigma_{fc}}{E_f}$ ,  $t = \frac{E_{tf}}{E_f}$ ,  $\lambda = \frac{1+t}{1-t}$ ,  $s = \frac{S}{h_f}$ ,  $\omega = \frac{12w^2}{(1-t)}$ ,

$$\sigma_B = \sigma_{fB} V_f \sin\beta, \quad \sigma_C = \sigma_{fc} V_f \sin\beta, \quad \sigma_{fc} = E_f \epsilon_1 + E_{tf} (\epsilon_c - \epsilon_1),$$

$$\epsilon_1 = \sigma_0 / E_f, \tag{2}$$

$w = W/h_f$ ,  $2W$  为折带宽度,  $2h_f$  为纤维层厚度,  $\epsilon_1$  为纤维的屈服应变,  $\epsilon_c$  为失稳应变,  $E_f$

为纤维的 Young's 模量,  $E_{tf}$  为线性硬化模量.

当  $S$  单调减小时 (以下简称  $S$ -D), 则有

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_B}{\sigma_c} &= 1 - \frac{3w}{\omega \hat{\sigma}_{fc}} \left\{ [1 - 2\lambda s_0 + s_0^2 - 2(\lambda - s_0)\xi + \xi^2] \sin\theta \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\xi \sin\theta \tan\theta \left( \frac{d\theta}{d\xi} \right)^{-1} d\xi \right\} \\ &= \frac{\cos\theta}{\omega \hat{\sigma}_{fc}} \left\{ 2\lambda - 3s_0 + s_0^3 - 3(1 - s_0^2)\xi + 3s_0\xi^2 + \xi^3 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sin\theta} \int_0^\xi \left[ 3(s_0 + \xi) + \tan\theta \left( \frac{d\theta}{d\xi} \right)^{-1} \right] \sin\theta \left( \frac{d\theta}{d\xi} \right)^{-1} d\xi \right\}, \quad (3) \end{aligned}$$

其中  $\frac{\delta}{2h_f}$  的表达式与 (1) 式中第 4 式相同,

$$\xi = s - s_0, \quad (4)$$

$s_0 = \frac{S_0}{h_f}$  为纤维初始屈曲时的  $s$  值. 由 (1) 和 (3) 式可导出  $s_0$  的计算式和  $S$  单增与  $S$  单减的条件:

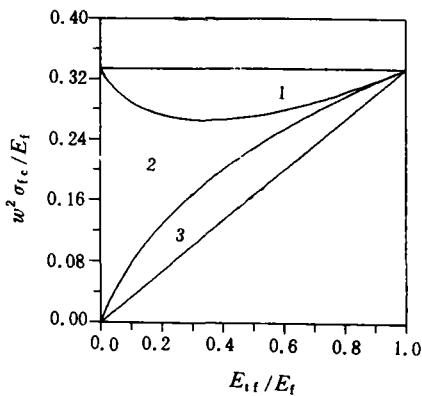


图 2  $S$  单增和  $S$  单减的区域图

1— $S$  单减区, 2— $S$  单增区, 3— $S$  单减区

$$s_0 = 2\cos\left(\psi_0 - \frac{2}{3}\pi\right), \quad \psi_0 = \frac{1}{3} \arccos\left(-\left|\frac{\omega}{2}\hat{\sigma}_{fc} - \lambda\right|\right), \quad (5)$$

$$s_0 - \frac{1 - \sqrt{t}}{1 + \sqrt{t}} < 0 \quad (S-I), \quad (6)$$

$$s_0 - \frac{1 - \sqrt{t}}{1 + \sqrt{t}} > 0 \quad (S-D).$$

(1) 式和 (3) 式各有 4 个变量  $\sigma_B$ ,  $\theta$ ,  $s$  及  $\delta$ , 各有三个关系式. 可将  $\sigma_B$ ,  $\theta$  和  $\delta$  用  $s$  表示. (3) 式可对  $\sigma_B$  和  $\theta$  依次求解, 首先可得到关于  $\theta$  的高阶拟线性微分方程, 结合  $s$  的边值  $s_0$ , 采用 Runge-kutta 法数值求解.

$S$  单增和  $S$  单减的条件 (5) 和 (6) 式可在参数平面内由图表达, 见图 2.

### 3 桥联增韧分析

复合材料的桥联增韧可由  $J$  积分刻划:

$$J = \int_r \left( U dy_2 - T_i \frac{\partial u_i}{\partial y_1} dl \right), \quad (7)$$

其中  $U = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{km} d\varepsilon_{km}$  为应变能密度,  $T_i$  和  $u_i$  分别为沿积分路径  $\Gamma$  的面力和位移矢量,  $\Gamma$  如图 1 中 ABCDEFGHIA 所示.

### 3.1 S 单减情况<sup>[11]</sup>

$$J_\infty = J_{tip} + J_B, \tag{8}$$

其中  $J_s$  表示沿外环 ( $\Gamma_s$ ) ABCDEF 的  $J$  积分,  $J_{tip}$  为沿路径 IHG 的  $J$  积分,  $J_B$  表示由于桥联引起材料的韧性增值.

### 3.2 S 单增情形<sup>[11]</sup>

由能量守恒可求出

$$\left[ \int_{\Gamma_s} U_c dy_2 - T_i \frac{\partial u_i}{\partial y_1} dl \right] - \sin\beta \frac{\partial}{\partial a} \int_A (\hat{U} - U_c) dA = J_{tip} + J_B, \tag{9}$$

其中

$$U_c = \frac{1}{2} C_{ijkl} (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^*) (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^*) = \frac{1}{2} \sigma_{ij} (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^*). \tag{10}$$

$U_c$  为具有初应变  $\varepsilon_{ij}^*$  时材料的弹性应变能密度,  $C_{ijkl}$  为材料的弹性模量张量,  $\hat{U}$  为变形能密度, 与变形历史有关,  $A$  为  $\Gamma$  所围区域的面积. (10) 式也给出了  $\varepsilon_{ij}^*$  的定义.

### 3.3 增韧比

$J_{tip}$  和  $J_B$  的计算式参考文献 [10] 和 [13] 可得

$$J_{tip} = (1 - V_f) E_m \varepsilon_c (W \varepsilon_c + \delta_1) \sin\beta, \tag{11}$$

其中

$$\frac{\delta_1}{h_f} = w \frac{E_f}{E_m} \frac{V_f}{1 - V_f} [(1 - t)(2 - \varepsilon_1/\varepsilon_c)\varepsilon_1 + t\varepsilon_c], \tag{12}$$

$$J_B = \int_0^a \sigma_B d\delta, \tag{13}$$

$E_m$  为基体的 Young's 模量. 由 (8) (或 (9)), (11) 和 (13) 式可求出增韧比  $J_\infty/J_{tip}$ .

## 4 总体压缩应力应变曲线

一旦求出  $J_s$ , 代入 (8) (或 (9)) 式可得材料构元的总体应力  $\sigma_x$  和  $\varepsilon_x$  的对应关系. 为此, 采用文献 [13] 的简化计算, 即积分环路经过之处可近似按一维应力应变分布处理. 由此可得

$$\frac{J_s}{J_{tip}} = \begin{cases} Z_1/Z_2, & (S-D), \\ [Z_1 - (F_b^{-1} - 1)(E - E_1)(\varepsilon_c - \varepsilon_1)^2]/Z_2, & (S-I), \end{cases} \tag{14}$$

其中

$$\begin{cases} Z_1 = \left( \Sigma_1 + E_t \varepsilon_1 + \frac{\delta}{4W} E_t F_b \right) \frac{\delta}{W} + \Sigma_1 (2\varepsilon_1 - \varepsilon_1) + E_t \varepsilon_1^2, \\ Z_2 = (1 - V_f) (\varepsilon_c + \delta_1/W) \varepsilon_c E_m, \end{cases} \quad (15)$$

$$\varepsilon_\infty = \varepsilon_{II} \approx \varepsilon_1 + \frac{\delta}{2W} F_b = \begin{cases} [V_f(\sigma_{fC}/\sigma_D)\sigma_B - \Sigma_1]/E_t + \frac{\delta}{2W} F_b & (S-D), \\ [V_f(\sigma_{fC}/\sigma_C)\sigma_B - \sigma_C]/E + \varepsilon_c + \frac{\delta}{2W} F_b & (S-I), \end{cases} \quad (16)$$

$$\sigma_\infty = \frac{a}{B} \sigma_1 + \left(1 - \frac{a}{B}\right) \sigma_{II} = V_f \frac{a}{B} \sigma_B \frac{\sigma_{fC}}{\sigma_C} + \left(1 - \frac{a}{B}\right) (\Sigma_1 + E_t \varepsilon_\infty), \quad (17)$$

其中

$$\begin{cases} E = E_f V_f + E_m V_m, \\ E_t = E_{tf} V_f + E_m V_m, \\ \Sigma_1 = V_f (E_f - E_{tf}) \varepsilon_1. \end{cases} \quad (18)$$

带下标“Ⅰ”和“Ⅱ”的各量分别对应图 1 中的 I, II 两区域,  $V_m = 1 - V_f$ ,  $F_b = 2W/H$ ,  $H$  和  $B$  分别为图 1 构元的高度和宽度。

由 (8) (或 (9)), (14), (16) 和 (17) 式消去  $J_\infty/J_{tip}$  和  $F_b$ , 可得  $\sigma_\infty - \varepsilon_\infty$  对应关系.  $\sigma_B$  和  $\delta$  由 (1) 式 (S-I) 或 (3) 式 (S-D) 计算求出。

在这里, 我们针对 Kevlar 49/(648/BF<sub>3</sub>·400) 和 Kevlar 49/EP 两种复合材料进行分析. 对前者, 计算时取  $w = 5.5$ ,  $\varepsilon_1 = 0.01$ ,  $E_f/E_m = 34.4$ . 对后者, 计算时取  $w = 3$ ,  $\varepsilon_1 = 0.018$ ,  $E_f/E_m = 49.6$ . 两种情况均有  $\varepsilon_c/\varepsilon_1 = 1.5$ ,  $V_f = 0.4$ . 上述参数取值均来自下节的实验. 图 3(a), (b)

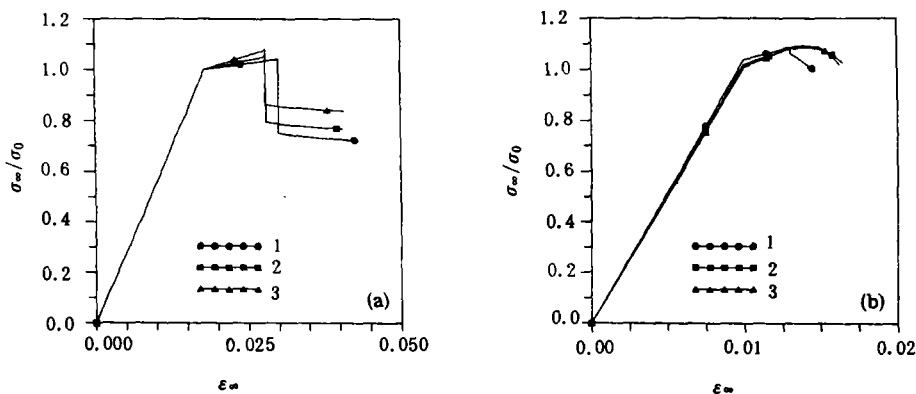


图 3 总体压缩应力应变曲线的理论解 ( $\alpha/B=0.4$ )

- (a) 对复合材料 Kevlar 49/EP, 1— $t=0.0167$ , 2— $t=0.0500$ , 3— $t=0.100$ ;  
 (b) 对复合材料 Kevlar 49/(648/BF<sub>3</sub>·400), 1— $t=0.10$ , 2— $t=0.15$ , 3— $t=0.20$

分别给出了两种复合材料的总体压缩应力应变曲线的理论解。图 4(a), (b) 分别为实验曲线, 是由下节的实验中获取的。对比理论结果和实验结果可见, 两者达到了定性定量基本符合的程度。

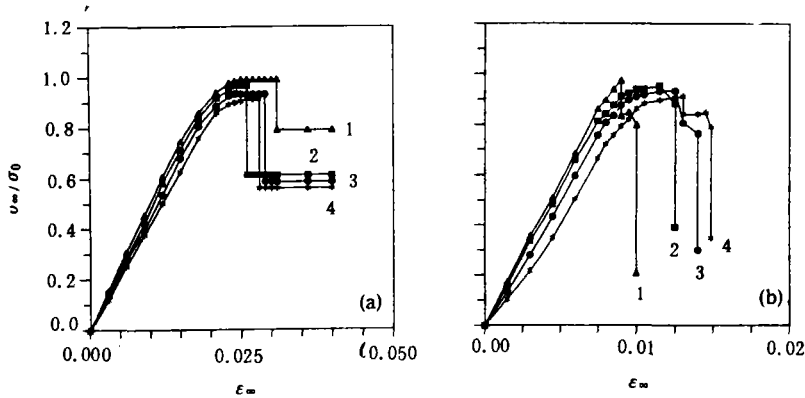


图 4 总体压缩应力应变的实验曲线

(a) 对复合材料 Kevlar 49/EP, (b) 对复合材料 Kevlar 49/(648/BF<sub>3</sub>·400); 1—试件 A, 2—试件 B, 3—试件 C, 4—试件 D,  $\sigma_0 = 250 \text{ MPa}$

### 5 Kevlar 49/ 环氧的压缩实验

分别对 Kevlar 49/(648/BF<sub>3</sub>·400) 和 Kevlar 49/EP 两种复合材料试样作实验, 已知的材料性能见表 1。

表 1 纤维和基体材料的已知性能

	拉伸强度 (GPa)	拉伸模量 (GPa)	极限拉伸应变 (%)
Kevlar 49	3.4	124	2.3
648/BF <sub>3</sub> ·400		3.6	0.78 (脆)
EP		2.5	3.0 (韧)

为了考察表面缺陷对微屈曲的作用, 同时为了研究屈曲驱动层裂现象, 我们在试样的表面附近三层预制了一组裂纹。裂纹的长度由外向里逐渐减小。对于 Kevlar 49 增强韧脆两种环氧基情况, 均设计了表 2 所示的各类试样, 每一试样的尺寸均为 30 mm × 7 mm × 12 mm。

表 2 试件编号及预裂纹长度  $l_i$  (mm)

试件	A	B	C	D
$l_1$	0	6	8	10
$l_2$	0	4	6	8
$l_3$	0	2	4	6

图 4(a), (b) 分别给出了由实验量测的 Kevlar 49 增强韧、脆两种环氧试样的总体压缩应力应变曲线。它们与理论预测结果基本符合。图 5 给出了折带的图案。图 5(a) 和 (b) 对于韧性基情况, 折带形成、扩展最终成为贯穿折带。图 5(c) 对应脆性基情况, 破坏过程为先折带后层裂。图 6 为韧性基试样的折带放大图。图 6(a), (b) 均为贯穿折带, 图 6(b) 为局部放大图, 图 6(c)

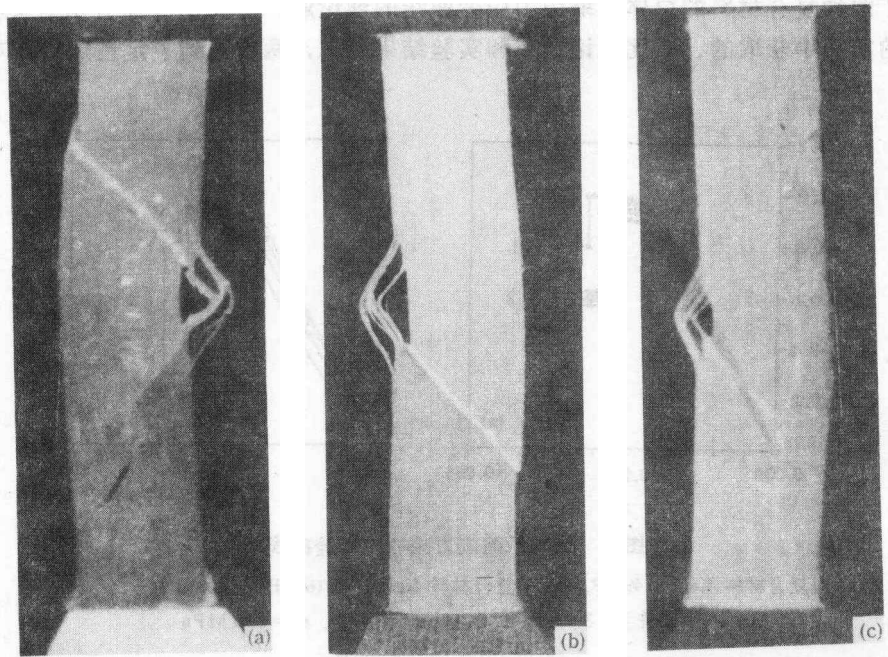


图 5 试样侧表面的折带  
(a)和(b)韧性基体, (c)脆性基体

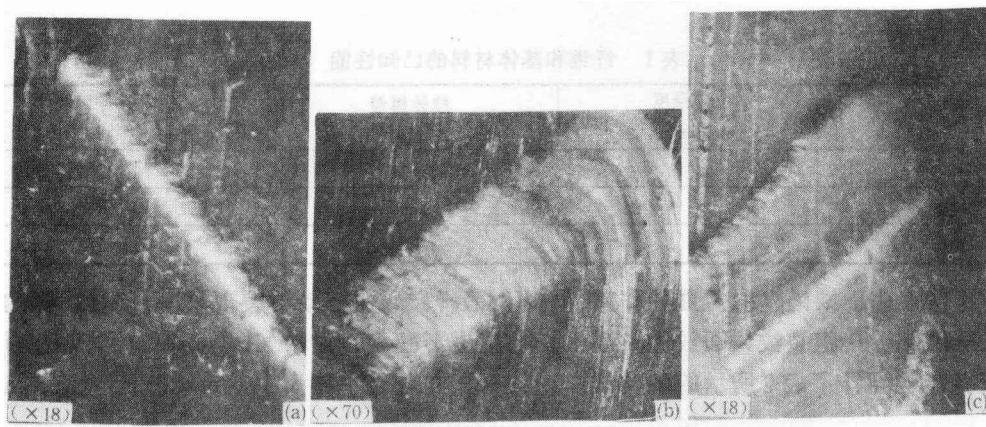


图 6 折带放大图

(a)和(b)有预裂纹时的单折带, (c)无预裂纹时形成的双折带, 放大图现缩小 7/10

为无预纹试样 A 形成的双折带。

为了便于对折带进行深入考察和细观量测, 预先在一些试样的侧表面粘结有 40 线/mm 的云纹栅, 以便在显微镜 (PM6 型 OLYMPUS) 下观察到折带的几何和变形全貌. 当试样受压变形时, 云纹栅随试样一起变形. 特别是当折带形成后, 它能将折带的特征清楚地表现和记录下来. 图 7 给出了折带的全貌图. 从图中可量测出扩展折带(细)和贯穿折带(粗)的宽度分别为  $2W=0.25-0.4$  mm 和  $0.6-1.0$  mm. 纤维层厚度  $2h_f=0.125$  mm, 可分别求得对应扩展折

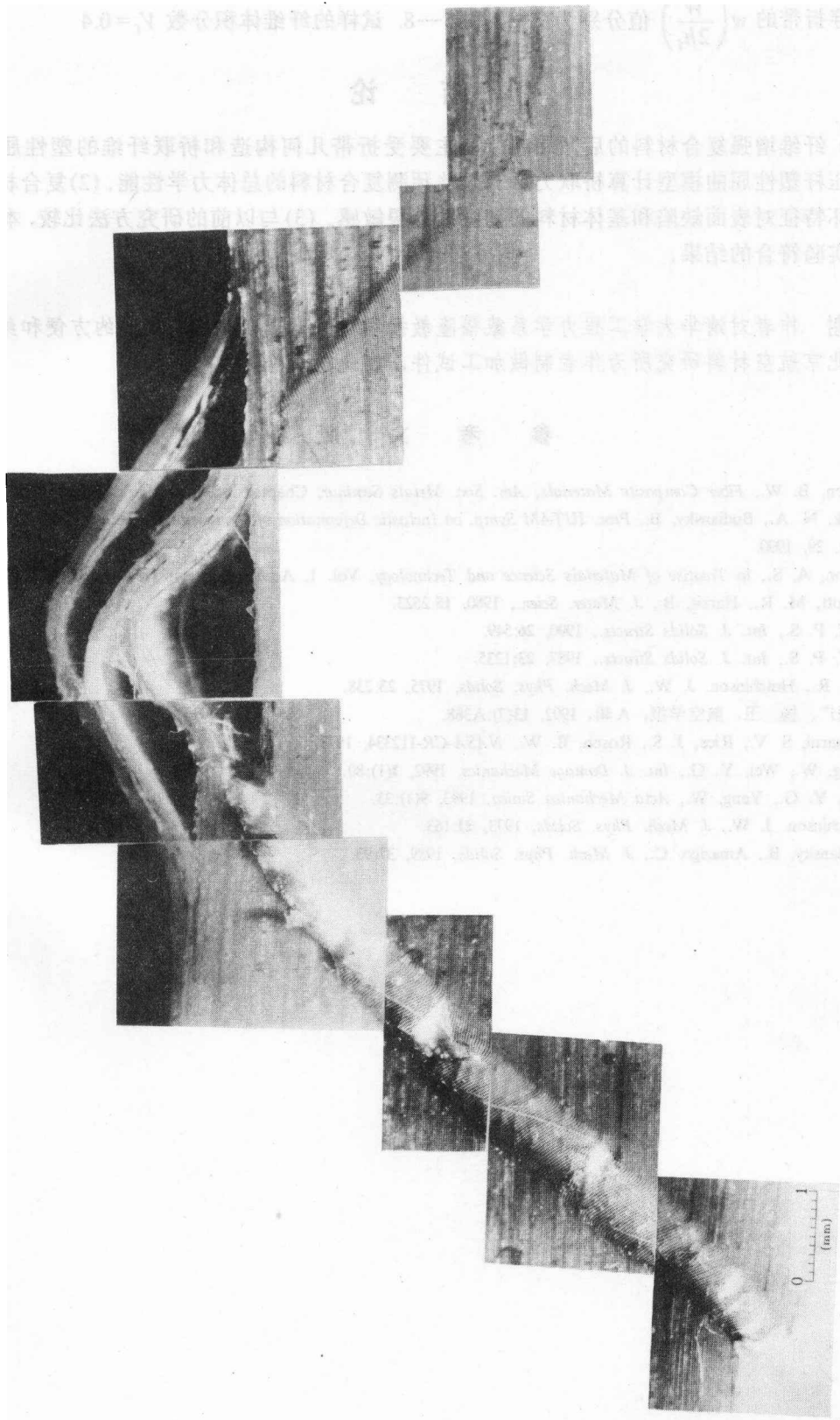


图 7 试样侧面折带全貌放大图



带和贯穿折带的  $w\left(\frac{W}{2h_f}\right)$  值分别为 2—3 和 5—8. 试样的纤维体积分数  $V_f=0.4$

## 6 结 论

(1) 纤维增强复合材料的后微屈曲特征主要受折带几何构造和桥联纤维的塑性屈曲控制. 用压杆塑性屈曲模型计算桥联力可有效地预测复合材料的总体力学性能. (2) 复合材料的压缩破坏特征对表面缺陷和基体材料的韧脆性能很敏感. (3) 与以前的研究方法比较, 本文得到了与实验符合的结果.

**致谢** 作者对清华大学工程力学系戴福隆教授和郇柱博士在实验中提供的方便和给予的帮助, 北京航空材料研究所为作者制做加工试件, 在此深表感谢.

## 参 考 文 献

- [1] Rosen, B. W., *Fiber Composite Materials, Am. Soc. Metals Seminar, Chapter 3, Metals Park, Ohio, 1965.*
- [2] Fleck, N. A., Budiansky, B., *Proc. IUTAM Symp. on Inelastic Deformation of Composite Materials, Troy, New York, May, 29, 1990.*
- [3] Argon, A. S., in *Treatise of Materials Science and Technology, Vol. 1, Academic Press, New York, 1972, 79.*
- [4] Piggott, M. R., Harris, B., *J. Mater. Scien.*, 1980, **15**:2523.
- [5] Steif, P. S., *Int. J. Solids Structs.*, 1990, **26**:549.
- [6] Steif, P. S., *Int. J. Solids Structs.*, 1987, **23**:1235.
- [7] Hill, R., Hutchinson, J. W., *J. Mech. Phys. Solids*, 1975, **23**:238.
- [8] 魏悦广、杨卫, *航空学报, A 辑*, 1992, **13**(7):A388.
- [9] Kulkarni, S. V., Rice, J. S., Rosen, B. W., *NASA-CR-112334, 1973.*
- [10] Yang, W., Wei, Y. G., *Int. J. Damage Mechanics*, 1992, **1**(1):80.
- [11] Wei, Y. G., Yang, W., *Acta Mechanica Sinica*, 1993, **9**(1):33.
- [12] Hutchinson, J. W., *J. Mech. Phys. Solids*, 1973, **21**:163.
- [13] Budiansky, B., Amazigo, C., *J. Mech. Phys. Solids*, 1989, **37**:93.