



论文

# 求解可压缩 Navier-Stokes 方程的预处理 JFNK 方法研究

刘中玉, 张明锋, 聂雪媛, 杨国伟\*

中国科学院力学研究所流固耦合系统力学重点实验室, 北京 100190

\*E-mail: gwyang@imech.ac.cn

收稿日期: 2014-12-28; 接受日期: 2015-07-08

国家高技术研究发展计划(编号: 2014AAA110501)资助项目

**摘要** 为了提高可压缩雷诺平均 Navier-Stokes(RANS)方程的求解效率, 基于多块对接结构化网格发展了求解 RANS 方程的 Jacobian-Free Newton Krylov(JFNK)方法. JFNK 方法将求解非线性方程的非精确 Newton 法和求解线性方程的 Krylov 子空间迭代法结合, 通过非精确 Newton 方法中不精确条件控制不同阶段线性方程的求解精度, 并利用无矩阵技术求解矩阵与向量的乘积; 针对 Krylov 内迭代收敛停滞的问题, 引入 LU-SGS 方法作为预处理器, 降低线性系统的刚性从而大幅度提高了内迭代的计算效率. 利用 JFNK 方法模拟 NACA 0012 翼型、带襟翼的 NLR-7301 两段翼与带发动机短舱的 DLR-F6 翼身组合体的绕流问题, 研究不同参数对 JFNK 方法收敛特性的影响, 对比 LU-SGS 研究 JFNK 方法的收敛速度, 并对 JFNK 方法求解复杂绕流问题的 RANS 方程进行确认. 结果表明, JFNK 方法求解 RANS 方程具有良好的稳定性, 相对于其他时间推进方法, JFNK 方法具有更高的计算效率.

**关键词** JFNK 方法, Krylov 子空间, 非精确 Newton 法, 预处理, RANS 方程

## 1 引言

20 世纪 70 年代至今, 科学计算领域提出了大量大规模稀疏线性方程组求解问题. 作为针对大型稀疏线性方程组的高效迭代求解方法, Krylov 子空间方法<sup>[1]</sup>在水力学、电力系统、大气物理、化学反应流动等学科中得到广泛应用<sup>[2-4]</sup>. 利用 Krylov 子空间方法求解 Newton 方程, 可以构造一种求解大型稀疏非线性

问题的双层迭代算法. 其外迭代为求解非线性方程的 Newton 迭代方程, 内迭代为结合无矩阵技术的 Krylov 子空间方法<sup>[5]</sup>. 这一类方法有两个显著优点: 其外迭代对 Newton 方程进行非精确求解, 提高了计算效率; Krylov 子空间方法用到的 Jacobian 矩阵与向量的乘积可以用有限差分方法近似代替, 避免 Jacobian 矩阵的计算与存储. 所以, 这一类方法又被称作 Jacobian-Free Newton Krylov (JFNK)方法.

**引用格式:** 刘中玉, 张明锋, 聂雪媛, 等. 求解可压缩 Navier-Stokes 方程的预处理 JFNK 方法研究. 中国科学: 技术科学, 2016, 46: 101-110  
Liu Z Y, Zhang M F, Nie X Y, et al. Preconditioned JFNK method for solving compressible Navier-Stokes equations (in Chinese). Sci Sin Tech, 2016, 46: 101-110, doi: 10.1360/N092014-00344

在计算流体力学领域, 国内外有关 Krylov 子空间方法的应用成果日益增多. Nejat 和 Ollivier-Gooch<sup>[6]</sup> 基于非结构网格研究了 Krylov 子空间方法在无黏可压缩流动中的应用; Luo 等人<sup>[7]</sup> 引入 LU-SGS 方法作为 Krylov 子空间方法的预处理器, 求解基于非结构网格的三维 Euler 方程分析非定常流动. 针对 JFNK 方法在 RANS 方程上的应用, Zingg 的团队基于 Splart-Allmaras 一方程湍流模型, 对 RANS 方程的 Krylov 解法做了深入的研究<sup>[8-10]</sup>. 国内方面, 杨岙生<sup>[11]</sup> 利用 Krylov 方法代替传统全速位方程有限元解法中的线松弛迭代解法, 研究跨声速绕流问题; 宁方飞和徐力平<sup>[12]</sup> 采用 Krylov 子空间方法求解二维定常流动, 并研究左右预处理对收敛特性的影响; 张毅锋<sup>[13]</sup>、燕振国<sup>[14]</sup> 研究了 Krylov 子空间方法在高精度数值模拟中的应用; 国内对于 JFNK 方法在 CFD 方面的应用研究较少, 寇继生<sup>[15]</sup> 和陈嘉滨等人<sup>[16]</sup> 分别应用 JFNK 方法求解二维水道和大气方程.

本文基于多块结构网格, 将求解非线性方程的非精确 Newton 方法与求解线性方程的 Krylov 方法结合, 引入无矩阵技术处理矩阵与向量的乘积, 形成求解可压缩 RANS 方程的 JFNK 方法. 针对 JFNK 方法中线性内迭代收敛停滞问题, 引入 LU-SGS 方法作为预处理器, 降低线性方程系数矩阵的刚度. 本文利用 NACA 0012 二维翼型绕流问题, 研究预处理 JFNK 方法的收敛特性及可调参数对其收敛特性的影响; 利用带襟翼的 NLR 7301 两段翼, 本文对比 JFNK 方法和 LU-SGS 方法的收敛速度, 并利用 JFNK 方法基于  $k-\omega$ ,  $k-\omega$  SST, SA 和考虑可压缩效应的 SA-Catris 不同湍流模型, 对本文的 JFNK 方法对 RANS 方程的求解进行详细的确认研究; 利用 DLR-F6 带发动机短舱的翼身组合体绕流问题, 确认本文中 JFNK 方法对复杂外形的绕流问题的处理能力.

## 2 控制方程的离散

为了处理复杂外形的绕流问题, 同时更好地捕捉壁面的黏性, 本文基于多块结构网格求解一般曲线坐标系下 Navier-Stokes 方程组. 控制方程中对流项的空间离散采用 HLLW 格式, 这是在 Roe 格式的基础上发展起来的格式, 在流动连续区域 HLLW 格式退化为 Roe 格式, 在间断处 HLLW 格式可以避免解的非物理震荡和过高的人工黏性, 得到更为精确

的解<sup>[17,18]</sup>. 黏性通量的离散采用具有二阶精度的中心格式, 除保留物理量在主流方向的导数外忽略其他方向及其与主流方向交互黏性作用, 从而简化对黏性项的处理, 可得半离散有限体积形式控制方程:

$$\frac{d}{dt} \hat{Q}_{i,j,k} + \hat{R}_{i,j,k} = 0. \quad (1)$$

对空间离散后的控制方程的时间微分采用一阶近似, 并将其线性化后可得到迭代求解方程:

$$\left[ \left( \frac{I}{\Delta t} \right)_{i,j,k} + \left( \frac{\partial \hat{R}}{\partial \hat{Q}} \right)_{i,j,k} \right] \Delta \hat{Q}_{i,j,k}^n = -\hat{R}_{i,j,k}^n, \quad (2)$$

其中,  $\Delta \hat{Q}_{i,j,k}^n = \hat{Q}_{i,j,k}^{n+1} - \hat{Q}_{i,j,k}^n$ ,  $n$  表示 Newton 迭代的步数,  $\partial \hat{R} / \partial \hat{Q}$  称为 Jacobian 矩阵, 对于三维 RANS 方程组来讲, 在每个控制单元上其 Jacobian 矩阵都是一个  $5 \times 5$  阶矩阵.

## 3 时间推进方法

本文时间推进采用预处理 JFNK 方法, 该方法是将求解非线性方程的非精确 Newton 方法与求解线性方程的 Krylov 子空间方法相结合的双层迭代方法.

### 3.1 外迭代——非精确 Newton 法

在整个计算域内, 线性化后的控制方程(2)也可以记做如下形式:

$$A(\hat{Q}) \Delta \hat{Q} = -\hat{R}(\hat{Q}), \quad (3)$$

其中,

$$A(\hat{Q}) = \frac{I}{\Delta t} + \frac{\partial \hat{R}(\hat{Q})}{\partial \hat{Q}}.$$

在第  $n$  时间层上, 用迭代方法求解线性化后的控制方程, 使其满足条件:

$$\|\hat{R}(\hat{Q}^n) + A(\hat{Q}^n) \Delta \hat{Q}^n\| \leq \eta_n \|\hat{R}(\hat{Q}^n)\|. \quad (4)$$

满足不精确条件后, 更新下一时间层的近似解:

$$\hat{Q}^{n+1} = \hat{Q}^n + \Delta \hat{Q}^n, \quad (5)$$

(4)式中,  $\eta_n$  称为强制因子, 由它来控制线性化方程的求解精度, 当  $\eta_n$  取零时就是精确 Newton 法. 在迭代求解控制方程的过程中, 初始值往往远离方程的解. 在迭代的初始阶段过度强调方程的求解精度, 将带来方程的“过解”问题, 造成不必要的计算时间的浪费. 当强制因子取得过大时, 又会影响非线性方程

的收敛效率. 本文中控制因子按以下2种方式选取.

方式 1:

$$\eta_n = \frac{\|\hat{\mathbf{R}}(\hat{\mathbf{Q}}^n)\| - \|\hat{\mathbf{R}}(\hat{\mathbf{Q}}^{n-1}) + \mathbf{A}(\hat{\mathbf{Q}})\Delta\hat{\mathbf{Q}}^{n-1}\|}{\|\hat{\mathbf{R}}(\hat{\mathbf{Q}}^{n-1})\|}; \quad (6)$$

方式 2:

迭代开始时, 给定  $\lambda \in (0,1]$ ,  $\omega \in (1,2]$ , 强制因子初始值  $\eta_0 \in [0,1)$ , 本文中对于  $n>0$  时间层:

$$\eta_n = \begin{cases} \phi_k, & \lambda(\eta_{n-1})^\omega \leq 0.1, \\ \max[\phi_k, \lambda(\eta_{n-1})^\omega], & \lambda(\eta_{n-1})^\omega > 0.1, \end{cases} \quad (7)$$

其中,  $\phi_k = \lambda \left( \frac{\|\hat{\mathbf{R}}(\hat{\mathbf{Q}}^n)\|}{\|\hat{\mathbf{R}}(\hat{\mathbf{Q}}^{n-1})\|} \right)^\omega$ .

本文中,  $\lambda=0.95$ ,  $\omega=2$ , 强制因子初始值取 0.95. 方式 1 的选取方式某种程度上反映了当前时间层非线性模型与上一时间层的线性模型之间的差异; 方式 2 中引入限制条件的目的是避免强制因子在计算中减小过快.

### 3.2 内迭代——Krylov 子空间方法

JFNK 方法的内迭代使用 Krylov 子空间方法, 这类方法是适用于大型、稀疏线性方程组求解的高效迭代方法. 经过预处理的 Krylov 子空间方法的计算效率远优于经典的迭代方法. 对于线性化后的控制方程, 给定初始近似解  $\Delta\hat{\mathbf{Q}}^0$ , 则可定义残量  $\mathbf{r} = -\hat{\mathbf{R}}(\hat{\mathbf{Q}}) - \mathbf{A}(\hat{\mathbf{Q}})\Delta\hat{\mathbf{Q}}^0$ , 残差向量与系数矩阵可张出一个  $m$  维 Krylov 线性空间:

$$\mathbf{K}_m(\mathbf{A}(\hat{\mathbf{Q}}), \mathbf{r}_0) = \text{span}\{\mathbf{r}_0, \mathbf{A}(\hat{\mathbf{Q}})\mathbf{r}_0, \dots, \mathbf{A}(\hat{\mathbf{Q}})^{m-1}\mathbf{r}_0\}.$$

Krylov 子空间方法只用到 Jacobian 矩阵与向量的乘积, 因此矩阵向量乘积可以近似表示为

$$\mathbf{A}(\hat{\mathbf{Q}})\mathbf{r}_0 \approx \frac{\hat{\mathbf{R}}(\hat{\mathbf{Q}} + \varepsilon\mathbf{r}_0) - \hat{\mathbf{R}}(\hat{\mathbf{Q}})}{\varepsilon}. \quad (8)$$

因此, Krylov 子空间方法可以避免显式计算 Jacobian 矩阵, 也不必考虑 Jacobian 矩阵存储问题. 关于小量  $\varepsilon$  的选取, 许多学者提出了不同的方案, 本文选用以下取法:

$$\varepsilon_2 = \frac{\sqrt{(1 + \|\hat{\mathbf{Q}}\|)\varepsilon_0}}{\|\mathbf{r}_0\|}, \quad (9)$$

其中,  $\varepsilon_0$  为机器零, 本文中取为  $10^{-16}$ .

取  $\mathbf{v}^{(1)} = \mathbf{r}_0/\theta$ , 其中  $\theta = (r_0, r_0)^{1/2}$ . 利用修正后的 Arnoldi 方法<sup>[1]</sup>构造 Krylov 空间的一组标准正交基:  $\mathbf{V}_m = [\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}, \dots, \mathbf{v}^{(m)}]$  与上 Hessenberg 矩阵  $\bar{\mathbf{H}}_m$ , 那么线性方程的近似解可表示为

$$\Delta\hat{\mathbf{Q}} = \Delta\hat{\mathbf{Q}}^0 + \mathbf{V}_m\mathbf{y}_m, \quad (10)$$

其中,  $\mathbf{y}_m$  应使线性方程的残量的范数  $\|\hat{\mathbf{R}}(\hat{\mathbf{Q}}) - \mathbf{A}(\hat{\mathbf{Q}})\Delta\hat{\mathbf{Q}}^m\|$  取最小值. 由于:

$$\begin{aligned} -\hat{\mathbf{R}}(\hat{\mathbf{Q}}) - \mathbf{A}(\hat{\mathbf{Q}})\Delta\hat{\mathbf{Q}}^m &= -\hat{\mathbf{R}}(\hat{\mathbf{Q}}) - \mathbf{A}(\hat{\mathbf{Q}})(\Delta\hat{\mathbf{Q}}^0 + \mathbf{V}_m\mathbf{y}_m) \\ &= \mathbf{r}_0 - \mathbf{A}(\hat{\mathbf{Q}})\mathbf{V}_m\mathbf{y}_m \\ &= \theta\mathbf{v}^{(1)} - \mathbf{A}(\hat{\mathbf{Q}})\mathbf{V}_m\mathbf{y}_m \\ &= \mathbf{V}_{m+1}(\theta\mathbf{e}^{(1)} - \bar{\mathbf{H}}_m\mathbf{y}_m), \end{aligned}$$

$$-\hat{\mathbf{R}}(\hat{\mathbf{Q}}) - \mathbf{A}(\hat{\mathbf{Q}})\Delta\hat{\mathbf{Q}}^m = -\hat{\mathbf{R}}(\hat{\mathbf{Q}}) - \mathbf{A}(\hat{\mathbf{Q}})(\Delta\hat{\mathbf{Q}}^0 + \mathbf{V}_m\mathbf{y}_m).$$

所以, 系数  $\mathbf{y}_m$  的求解归结为最小二乘问题:

$$\mathbf{y}_m = \arg \min \|\theta\mathbf{e}^{(1)} - \bar{\mathbf{H}}_m\mathbf{y}\|. \quad (11)$$

本文中, (11)式的求解通过 Givens 变换<sup>[1]</sup>, 将 Hessenberg 矩阵转化为上三角矩阵来实现.

### 3.3 预处理

JFNK 方法的主要计算量是求解线性方程, 其收敛速度与系数矩阵的条件数密切相关. 通过引入预处理技术, 可以将系数矩阵分散的特征值集中到某个值附近, 降低系数矩阵的条件数, 从而提高线性方程的求解效率.

本文采用左预处理方法, 对线性方程组的系数矩阵预处理, 即在线性方程(3)左右两端同时左乘  $\mathbf{M}_L^{-1}$ :

$$\mathbf{M}_L^{-1}\mathbf{A}(\hat{\mathbf{Q}})\Delta\hat{\mathbf{Q}} = -\mathbf{M}_L^{-1}\hat{\mathbf{R}}(\hat{\mathbf{Q}}), \quad (12)$$

其中, 预处理矩阵  $\mathbf{M}_L$  是近似于系数矩阵  $\mathbf{A}(\hat{\mathbf{Q}})$  的可逆矩阵, 使用 LU-SGS 方法,  $\mathbf{M}_L$  可分解为  $\mathbf{M}_L = \mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{U}$ . 其中  $\mathbf{L}$  是不包括对角元素的下三角阵,  $\mathbf{D}$  是对角阵,  $\mathbf{U}$  是不包括对角元素的上三角阵. 预处理矩阵  $\mathbf{M}_L$  可近似分解为

$$\mathbf{M}_L = (\mathbf{L} + \mathbf{D})\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{D} + \mathbf{U}). \quad (13)$$

实际求解时, 并不显式求解  $\mathbf{M}_L^{-1}$ , 而是通过求解以下方程得到预处理后的向量  $\tilde{\mathbf{v}}$ :

$$\mathbf{M}_L\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v}. \quad (14)$$

利用 LU-SGS 方法, (13)式可具体写为

$$\begin{cases} (\mathbf{L} + \mathbf{D})\tilde{\mathbf{v}}^* = \mathbf{v}, \\ (\mathbf{D} + \mathbf{U})\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{D}\tilde{\mathbf{v}}^*. \end{cases} \quad (15)$$

与其他预处理算法相比, LU-SGS 预处理将 Jacobian 矩阵作为预处理矩阵, 不需要额外的计算资源来计算和存储预处理矩阵.

#### 4 数值模拟及结果分析

本节利用 NACA 0012 二维机翼绕流问题, 研究 JFNK 方法中可调参数对收敛特性的影响; 并应用 JFNK 方法求解 NLR 7301 两段翼和 DLR F6 带发动机短舱的翼身组合体绕流问题.

##### 4.1 NACA 0012 二维机翼

JFNK 方法中涉及到 Krylov 子空间维数、强制因子等多个可调参数, 不同参数的选择方式将直接影响 JFNK 方法的计算效率与稳定性. 因此, 研究可调参数对收敛特性的影响, 选择适当的参数是实现 JFNK 方法的重要一步. 本节利用 NACA 0012 二维翼型绕流问题研究不同参数的选择对 JFNK 方法收敛特性的影响. 计算工况:  $Ma=0.754$ ,  $\alpha=0.99^\circ$ ,  $Re=6.2 \times 10^6$ .

Krylov 子空间的维数是影响内迭代求解精度的主要因素, 空间维数过小, 内迭代收敛速度降低或者不收敛, 空间维数过高, 每一步内迭代的求解精度提高. 图 1 为不同子空间维数下残差随收敛曲线, 可以

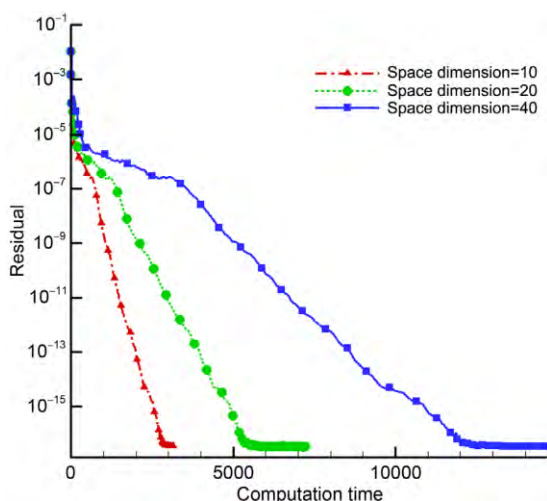


图 1 (网络版彩图)空间维数的变化对残差下降速度的影响

看出随着空间维数的增加, 残差下降同样量级需要的计算时间更长. 另外空间维数的增加, 不仅求解时间更长, 内存消耗也随空间维数的增高而增加, 如图 2 所示. 在保证计算内迭代计算收敛的情况下, 子空间维数降低将大幅节省计算资源. 本文研究结果表明, 对于外形简单的绕流问题子空间维数去 6~10 便可满足计算要求, 对于三维复杂外形的绕流问题子空间维数可取 16~20.

强制因子是控制内迭代求解精度的参数, 取值过小将会花费更多的线性方程求解时间求得并不精确的近似解, 产生所谓的“过解问题”; 强制因子取值过大, 内迭代的求解精度降低, 将在外迭代上花费更多的时间. 图 3 是选用的两种不同强制因子残差收敛速度的影响. 从图 3(a)可以看出, 在求解初始阶段流场初始值远离方程的解, 两种选择方式的收敛速度基本一致; 随着迭代次数的增加, 迭代的结果不断靠近方程的解, 两种控制因子对应的求解过程出现不同的收敛速度, 残差下降相同水平的情况下方式 2 需要更少的迭代次数. 从计算时间上看, 强制因子变小要求线性内迭代的求解精度更高, 所花费的计算时间更长, 残差下降同样量级的情况下, 方式 2 所花费的计算时间更长, 如图 3(b)所示.

##### 4.2 NLR-7301 两段翼绕流

NLR-7301 两段翼由主翼和襟翼两部分组成, 在低速飞行时能够避免表面流动的分流, 从而产生高升力. 计算模型襟翼偏角为  $20^\circ$ , 襟翼与主翼之间缝隙为  $2.6\%c$ . 该模型风洞实验在 NLR 3 m×2 m 低速风

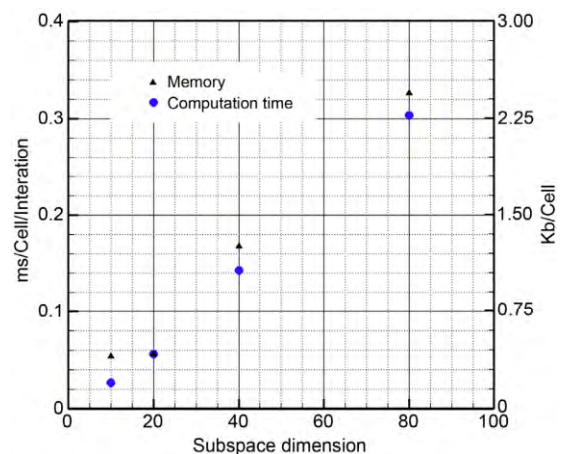


图 2 (网络版彩图)计算时间与占用内存随空间维数的变化

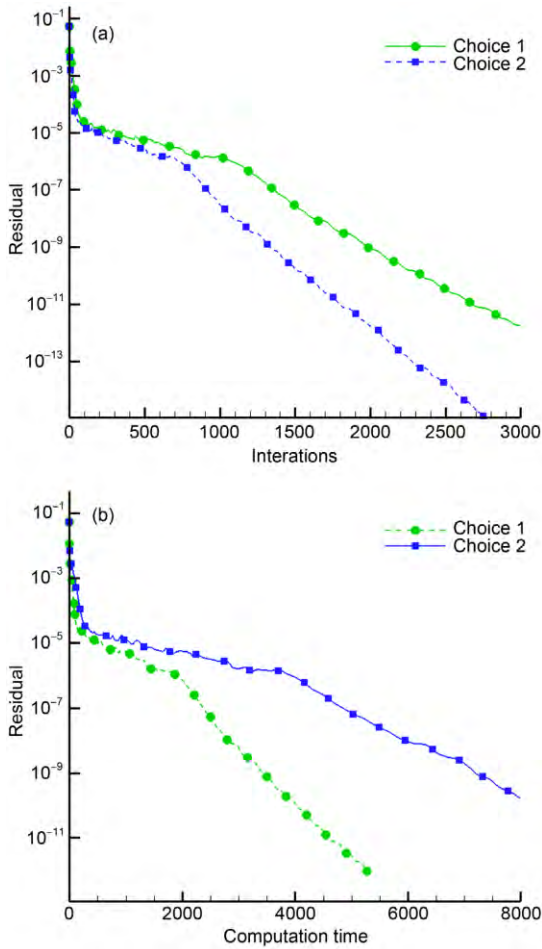


图3 (网络版彩图)不同强制因子对收敛速度的影响  
(a) 收敛速度随迭代步数的变化; (b) 收敛速度随计算时间的变化

洞中完成<sup>[19]</sup>, 试验条件为  $Ma=0.185$ ,  $Re=2.51 \times 10^6$ , 本文模拟了来流攻角  $\alpha=6^\circ$  和  $\alpha=13.1^\circ$  两种情况, 所使用的计算网格如图4所示:

为了说明 JFNK 方法的求解精度与求解效率, 本文分别采用 LU-SGS 与 JFNK 两种时间推进方法求解离散后的控制方程, 两种时间推进方法都采用统一的时间步长. 图5给出计算得到的绕流流场的流线和压力等值线, 从图中可以看出, 计算得到的流场压力分布变化均匀, 主翼与襟翼周围流动没有出现分离. 图6和7分别给出了来流攻角  $\alpha=13.1^\circ$  情况条件下, 使用 JFNK 方法和 LU-SGS 方法计算得到的物面压力分布和主翼上表面摩擦力系数与风洞实验结果的对比, 结果表明 JFNK 方法的计算结果与 LU-SGS 方法的结果几乎完全一致, 都与实验结果吻合良好.

图8给出了攻角为  $13.1^\circ$  时 JFNK 方法和 LU-SGS

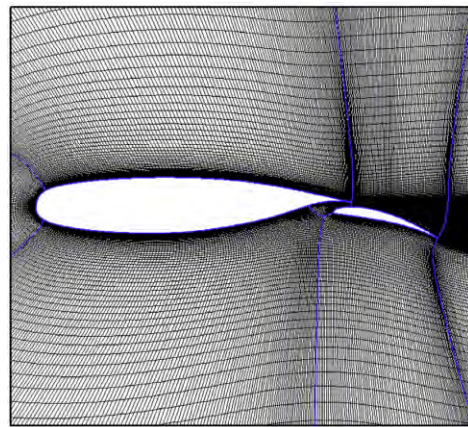


图4 (网络版彩图)NLR-7301 两段翼计算网格

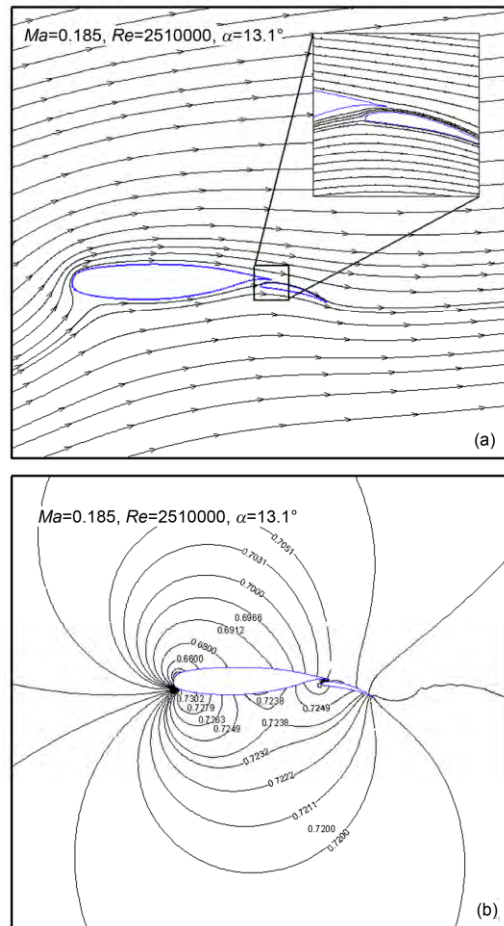


图5 (网络版彩图)NLR-7301 两段翼绕流流线及等压线  
(a) 流线图; (b) 压力等值线

方法计算的升力系数收敛曲线. 可以看出, 在其他计算条件相同的情况下, JFNK 方法计算收敛所需的迭



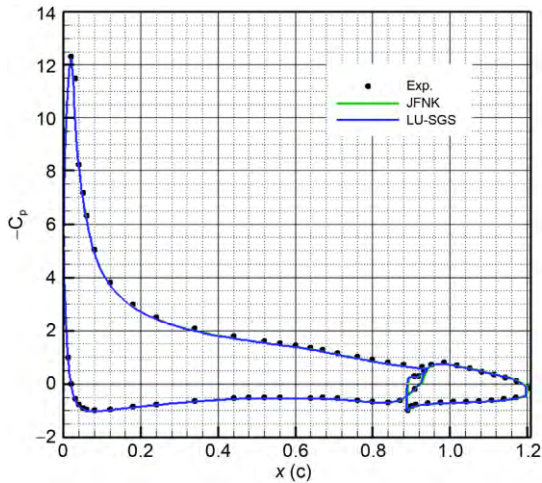


图 6 (网络版彩图)NLR-7301 两段翼表面压力分布与实验值的对比( $\alpha=13.1^\circ$ )

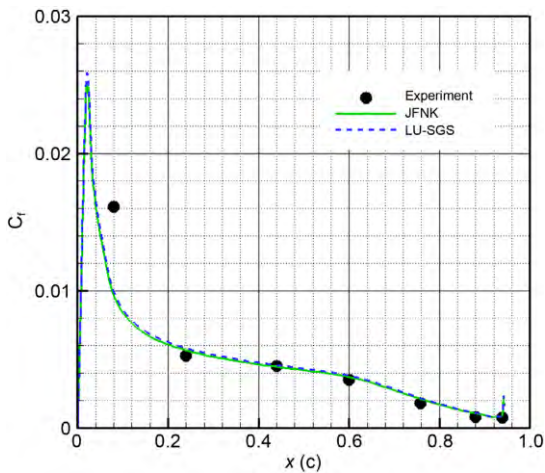


图 7 (网络版彩图)主翼上表面摩擦系数与实验结果的比较( $\alpha=13.1^\circ$ )

代步数和计算时间与 LU-SGS 方法相比都具有明显优势, 体现出 JFNK 方法相比 LU-SGS 方法具有更高的计算效率。

对于  $\alpha=6^\circ$  的情况, NLR 的风洞实验提供了更为详细的数据. 本文利用 JFNK 方法使用 4 种不同湍流模型对该工况进行数值分析, 所使用的湍流模型为:  $k-\omega$ ,  $k-\omega$  SST 两方程模型及 SA 和考虑可压缩效应的 SA-Catris 一方程模型. 图 9 给出不同湍流模型得到等效速度与实验结果的对比, 其中  $U_w$  为根据势流理论由当地静压计算得到的表面等效速度,  $s$  表示翼型型线上的点到前缘驻点的距离, 图 9 表明除在吸力峰处模拟结果与实验值稍有偏差, 其他位置模拟结

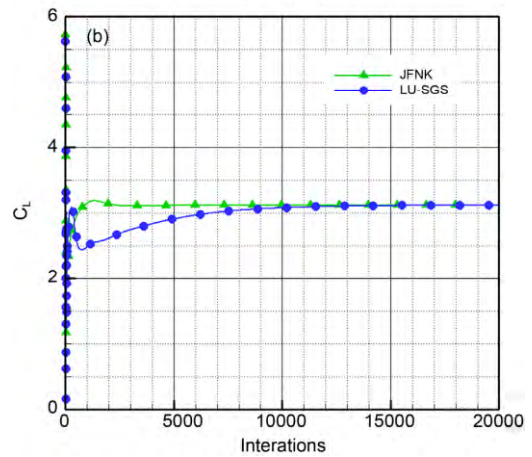
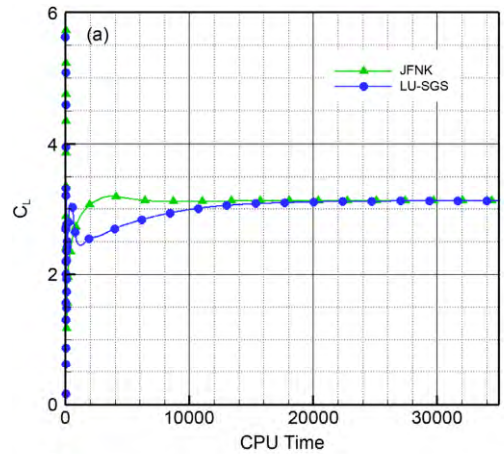


图 8 (网络版彩图)升力系数收敛曲线( $\alpha=13.1^\circ$ )

(a) 升力系数随计算时间的变化; (b) 升力系数随迭代步数的变化

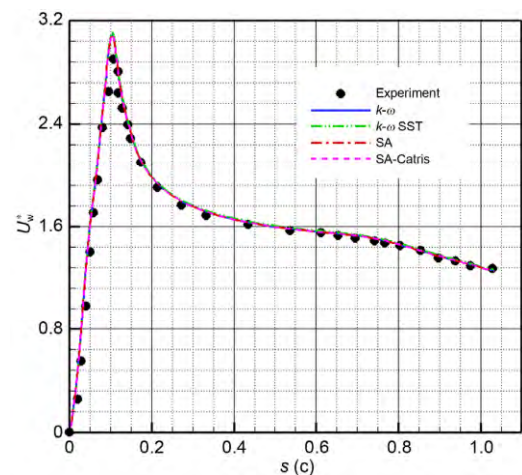


图 9 (网络版彩图)主翼上表面等效速度分布

果与实验结果基本吻合。

图 10 给出了采用不同湍流模型计算得到的两个

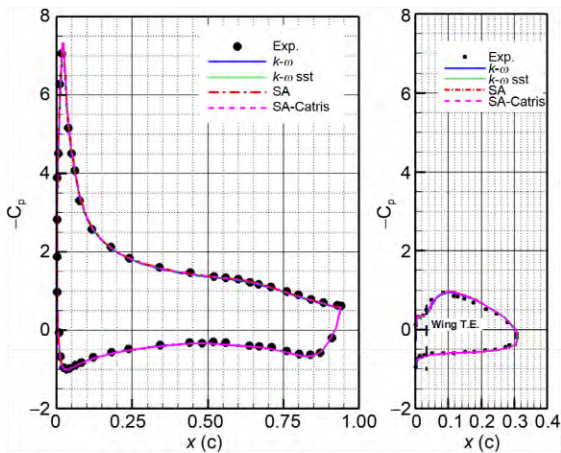


图10 (网络版彩图)JFNK方法使用不同湍流模型得到的压力分布

翼段表面的压力分布与实验结果的对比。结果表明:不同湍流模型得到的主翼与襟翼表面压力分布基本一致;与13.1°攻角的压力分布相比,6°攻角时主翼上表面的吸力峰相对减小。将数值模拟结果与风洞实验得到的压力分布相比,二者能够很好地吻合。

为了细致观察边界层内流动细节,本文在主翼和襟翼上表面分别选取两个站位(图11)。图12给出了各个站位上不同湍流模型计算得到的速度型线与风洞实验结果的对比。结果表明:从主翼上速度型线可以看出,边界层在主翼后部明显增厚,大约达到0.025 c;处于主翼后的尾迹区对下游的襟翼绕流产生直接影响,襟翼上的速度型线清楚的显示出主翼

后不断发展的宽阔尾迹区域;不同的湍流模型的模拟结果表明,利用 $k-\omega$ 和 $k-\omega$ SST两方程湍流模型得到结果与实验结果偏差较大,预测的边界层偏厚;SA和SA-Catris模型能够较为准确地预测出边界层内速度分布,由于实验来流马赫数较低,流场内最高马赫数为0.5左右,所选取的4个站位上马赫数在0.2左右,流体可压缩效应对流场的影响较小,SA和SA-Catris两种模型所得到的结果差别较小。

### 4.3 带发动机短舱的DLR-F6翼身组合体

为了评估CFD方法在飞行器气动力预测中的精度,AIAA组织了CFD阻力预测研讨会,带发动机短舱的DLR-F6翼身组合体是第二届阻力预测研讨会提供的标准计算模型。本节利用该问题确认本文中JFNK方法对于复杂外形绕流问题的处理能力。本文计算采用多块对接结构化网格,网格规模为610万,整个流场共被划分为364块,物面网格的分布如图13所示。

图14给出了 $Ma=0.75, \alpha=0.19^\circ, Re=3.0 \times 10^6$ 情况下机翼上不同站位的压力分布:从第三个站位的压力分布可以看出,由于吊舱的干扰机翼下表面压力



图11 (网络版彩图)速度型线分析选取的站位示意图

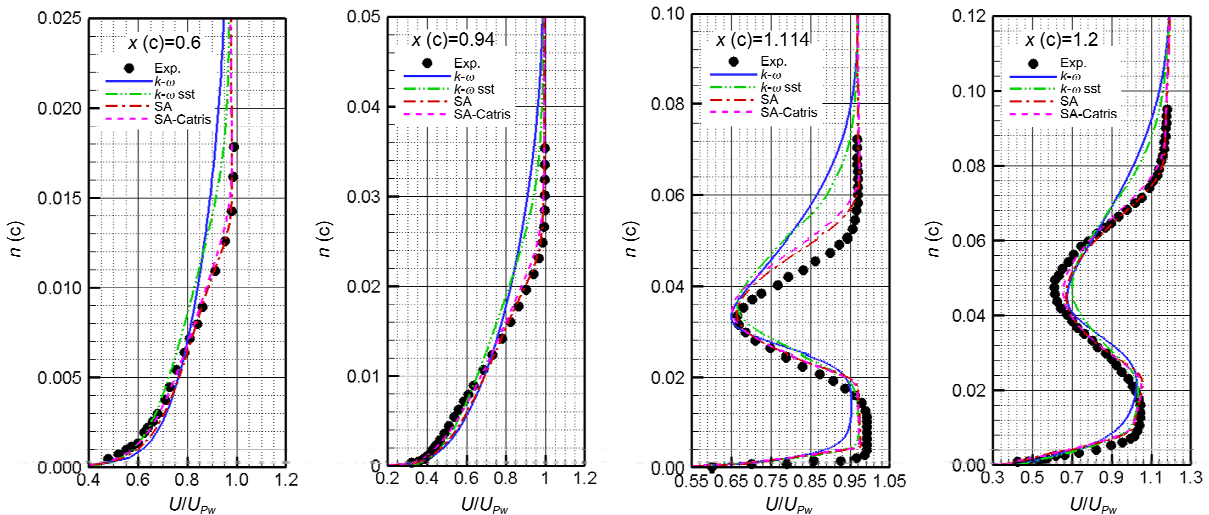


图12 (网络版彩图)典型位置边界层内速度型线

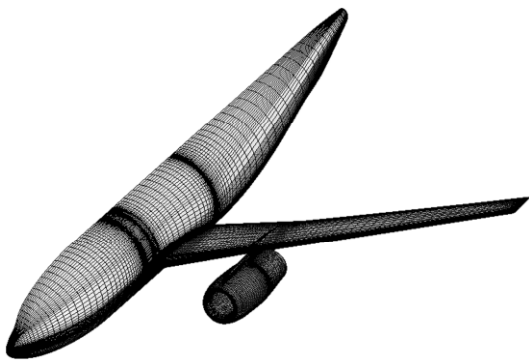


图 13 计算网格的物面网格分布

明显增高, 造成机翼上的升力损失; 对比不同站位数值模拟结果与风洞实验结果, 数值模拟的结果与实验结果基本吻合. 图 15 给出了计算得到的表面压力云图与翼根、发动机吊舱上的表面流线, 使用 JFNK 方法得到的数值模拟结果能够捕捉复杂几何外形周围的流动细节.

图 16 给出了带发动机短舱的 DLR-F6 翼身组合体的升力系数随来流攻角的变化曲线. 来流攻角由  $-3^\circ$  变化至  $1.5^\circ$  的过程中, 升力系数与来流攻角呈线性关系. 从图中可以看出, 计算得到的升力系数普遍比风洞实验结果高 0.08 左右, 但与 CFL3D 和 OVERFLOW 的计算结果基本一致. 图 17 给出了攻角由该布局的极曲线, 负攻角的两个点计算结果与实验结果偏差较大, 主要原因为计算结果高估了气动阻力. 对于造成升力的计算结果与实验结果差异的原因, Rumsey[20]分析称: 可能是 CFD 计算结果高估了机身的升力, 也可能是因为 CFD 计算中没有考虑到风洞实验过程中的涉及到的修正.

## 5 结论

(1) 无矩阵技术的引入避免 Jacobian 矩阵的存储, 减少了对内存的消耗; 可调参数对 JFNK 方法收敛特性影响较大, 在保证稳定性的前提下减低 Krylov 空

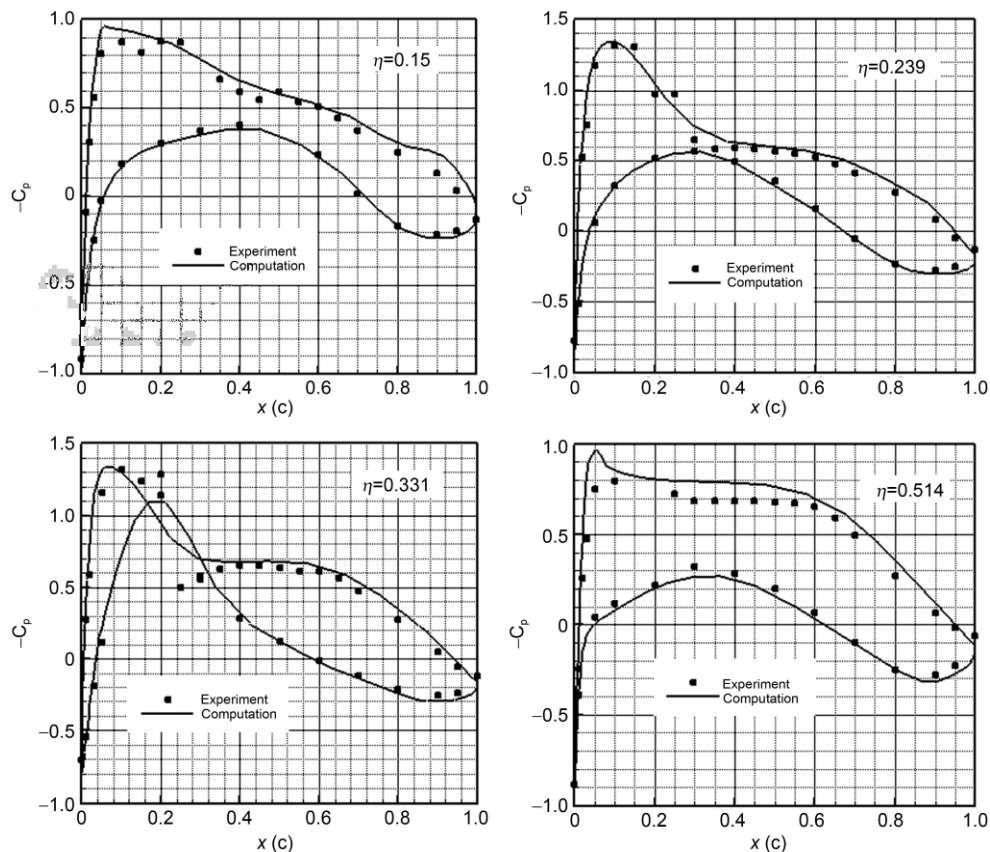


图 14 不同站位压力分布与实验值比较



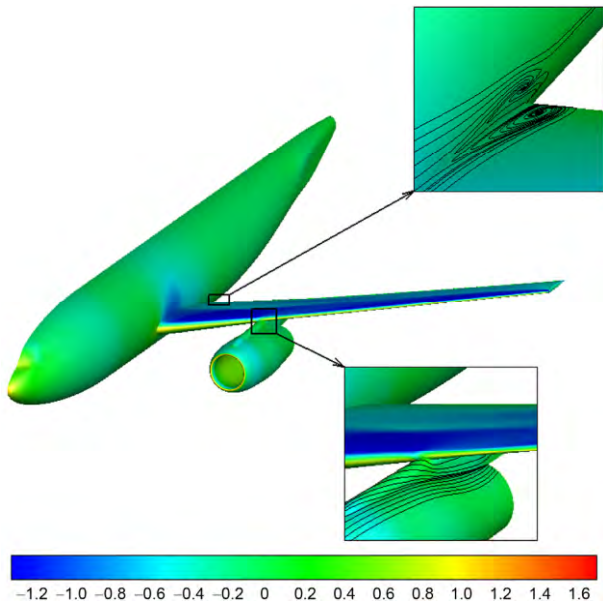


图 15 (网络版彩图)带发动机短舱的 DLR-F6 压力云图及表面流线

间维数、选用适当的强制因子可以提高 JFNK 方法的收敛速度。

(2) 数值验证的结果表明, 不精确 Newton 方法的引入提高了 JFNK 方法的求解效率; LU-SGS 预处理技术降低线性方程组的条件数, 提高内迭代计算效率及稳定性; 与 LU-SGS 等其他时间推进方法相比, 时间步长相同的情况下, JFNK 方法收敛更快;

(3) 对复杂绕流问题的计算结果表明, 作为一种计算速度快、稳定性好的隐式方法, 预处理 JFNK 方法能够作为求解可压缩 Navier-Stokes 方程的求解方法, 快速准确的求解复杂外形的绕流问题。

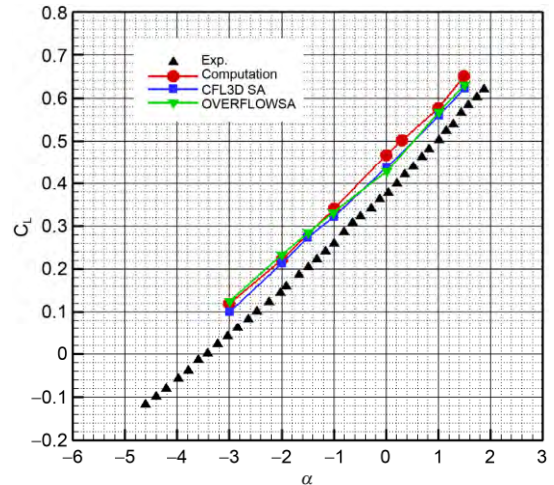


图 16 (网络版彩图)带发动机短舱的 DLR-F6 翼身组合体升力系数随攻角的变化

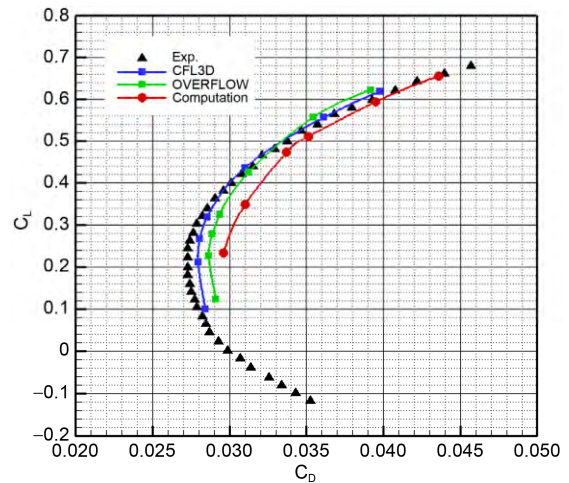


图 17 (网络版彩图)带发动机短舱的 DLR-F6 翼身组合体极曲线

参考文献

- 1 Saad Y, Schultz M H. GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems. *Siam J Sci Stat Comp*, 1986, 7: 856-869
- 2 Reisner J, Wyszogrodzki A, Mousseau V, et al. An efficient physics-based preconditioner for the fully implicit solution of small-scale thermally driven atmospheric flows. *J Comput Phys*, 2003, 189: 30-44
- 3 Bouchat A, Tremblay B. Energy dissipation in viscous-plastic sea-ice models. *J Geophys Res: Oceans*, 2014, 119: 976-994
- 4 Evans K J, Knoll D A. Temporal accuracy analysis of phase change convection simulations using the JFNK-SIMPLE algorithm. *Int J Numer Methods Fluids*, 2007, 55: 637-653
- 5 Knoll D A, Keyes D E. Jacobian-free Newton-Krylov methods: A survey of approaches and applications. *J Comput Phys*, 2004, 193: 357-397
- 6 Nejat A, Ollivier-Gooch C. A high-order accurate unstructured finite volume Newton-Krylov algorithm for inviscid compressible flows. *J Comput Phys*, 2008, 227: 2582-2609

- 7 Luo H, Baum J D, Löhner R. An accurate, fast, matrix-free implicit method for computing unsteady flows on unstructured grids. *Comput Fluids*, 2001, 30: 137–159
- 8 Wong P, Zingg D W. Three-dimensional aerodynamic computations on unstructured grids using a Newton-Krylov approach. *Comput Fluids*, 2008, 37: 107–120
- 9 Nemec M, Zingg D W. Newton-Krylov algorithm for aerodynamic design using the Navier-Stokes equations. *AIAA J*, 2002, 40: 1146–1154
- 10 Jason N, Zingg D W. A Three-Dimensional Multi-Block Newton-Krylov Flow Solver for the Euler Equations. In: 17th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference. Toronto, 2005, 6–9 June
- 11 杨岷生. 无粘跨声速绕流的有限元法和界积分方程的某些进展. *空气动力学学报*, 1991, 2: 002
- 12 宁方飞, 徐力平. 二维定常湍流计算中的 GMRES 算法. *力学学报*, 2001, 33: 442–451
- 13 张毅锋. 高阶精度格式(WCNS)加速收敛和复杂流动数值模拟的应用研究. 博士学位论文. 绵阳: 中国空气动力研究与发展中心, 2008
- 14 燕振国. 高精度混合线性紧致格式的隐式时间推进方法研究. 硕士学位论文. 绵阳: 中国空气动力研究与发展中心, 2013
- 15 寇继生. JFNK 方法的若干改进及其在二维河道水流数值模拟中的应用. 博士学位论文. 武汉: 武汉大学, 2007
- 16 陈嘉滨, 纪立人, 陈长胜. JFNK 方法概述及其在大气全隐式非静力模式中的应用方案. *大气科学*, 2006, 30: 821–833
- 17 郑冠男, 邓守春, 韩同来. 基于混合网格 Navier-Stokes 方程的并行隐式计算方法研究. *应用力学学报*, 2011, 28: 211–218, 323
- 18 Zheng G, Yang G, Qian W. Flutter analyses of complete aircraft based on hybrid grids and parallel computing. *Sci Sin Tech*, 2013, 56: 398–404
- 19 Vandenberg B, Oskam B. Boundary layer measurements on a two-dimensional wing with flap and a comparison with calculations. National Aerospace Lab, NLR TR 79009 U, Amsterdam
- 20 Rumsey C L, Rivers S M, Morrison J H. Study of CFD variation on transport configurations from the second drag-prediction workshop. *Comput Fluids*, 2005, 34: 785–816

## Preconditioned JFNK method for solving compressible Navier-Stokes equations

LIU ZhongYu, ZHANG MingFeng, NIE XueYuan & YANG GuoWei

*Key Laboratory for Mechanics in Fluid Solid Coupling Systems, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China*

To improve the computation efficiency, this article introduces Jacobian-Free Newton Krylov (JFNK) method to solve compressible Reynolds Averaged Navier-Stokes (RANS) equations on multiblock structural mesh. JFNK method combines inexact Newton method for solving nonlinear equations with Krylov Subspace method for solving linear equations, and it introduces inexact condition to control solution accuracy of linear equations, and matrix vector multiplication is computed with a Jacobian free method. To overcome “convergence stagnation” problem in linear iterations, a LU-SGS based preconditioner is introduced to reduce the condition number of linear system, which accelerates the convergence rate of linear iterations. Flow around NACA 0012 airfoil, NLR-7301 wing with flap and DLR-F6 wing-body-pylon-nacelle configuration is simulated to validate the JFNK method. Results show that preconditioned JFNK method has better stability and higher efficiency compared with other methods.

**JFNK method, Krylov subspace, inexact Newton method, precondition, convergence properties**

doi: 10.1360/N092014-00344