

准脆性材料损伤破坏的细宏观联结分析*

王利民^{1**} 韩巍巍¹ 陈 婷¹ 汪海英² 韩道平¹

(¹ 青岛理工大学理学院, 青岛, 266033)(² 中国科学院力学所 LNM 实验室, 北京, 100190)

摘 要 准脆性材料在外力作用下不仅产生应力与变形, 而且还会内部缺陷或微裂纹随着变化和出现宏观裂缝扩展. 根据材料的微细观测, 通过固体力学原理建立模型分析其微裂纹与宏观裂缝之间的关联. 材料中宏观裂缝端部通常存在损伤区, 且在该区内存在许多相对微小缺陷或微裂纹, 从而使得材料局部变形增加而力量减弱. 若将该损伤带视为裂缝一部分, 那么在该虚拟裂缝两岸上将存在分布黏聚力; 虚拟裂缝两岸的相对位移将是微裂纹区变形及扩展的综合体现. 为此, 对包含有细观裂纹的代表性体积单元进行力学计算, 然后将其嵌入到宏观裂缝端部损伤带的变形计算中, 以探寻固体失效的细观与宏观尺度力学分析的联结, 并与实测数据相对比.

关键词 准脆性材料, 细观裂纹损伤, 宏观断裂, 损伤带模型

0 引言

工程中常用的混凝土与铸铁材料抵抗破坏的力学性能不同于韧性材料, 其抗拉伸能力较弱且在破坏失效前的变形与能量消耗比较少, 故称作准脆性材料. 近代力学发展起来的断裂与损伤力学是其材料结构破损量化分析的有效工具. 通常在外力作用下会在该材料内部产生应力与变形, 也会同时出现缺陷、微裂纹和宏观裂缝^[1-4]. 材料的破坏过程是细观微结构演变与宏观裂缝发展及串接的过程, 同时能量转换也是非可逆的. 为此, 根据材料的微细观察测试, 通过固体力学原理建立模型对其材料缺陷或微裂纹发展与裂缝形成态势进行联结分析.

1 材料观测与力学模型

对于准脆性材料与结构破坏的研究有断裂力学分析, 也有从损伤变量分析的研究. 通过对研究报告和实验测试的结果分析, 发现材料破坏经常是在高应力集中的部位首先出现损伤裂纹或微裂纹的^[4,5]. 宏观破坏的过程有一条逐渐发展的主裂缝, 裂缝前端损伤区域随着载荷不断伸长, 但损伤区域一般会形成垂直于拉伸应力的条形带. 如图 1 所示为混凝土或铸铁在宏观缺口处受载荷前后, 或载荷不同时微裂纹变化的电镜照片. 其中图 1(a), (b) 分别是混凝土的弯曲小试件在受拉一侧缺口附近的混凝土中微裂纹与石子水泥的界面微裂纹. 图 1(c),

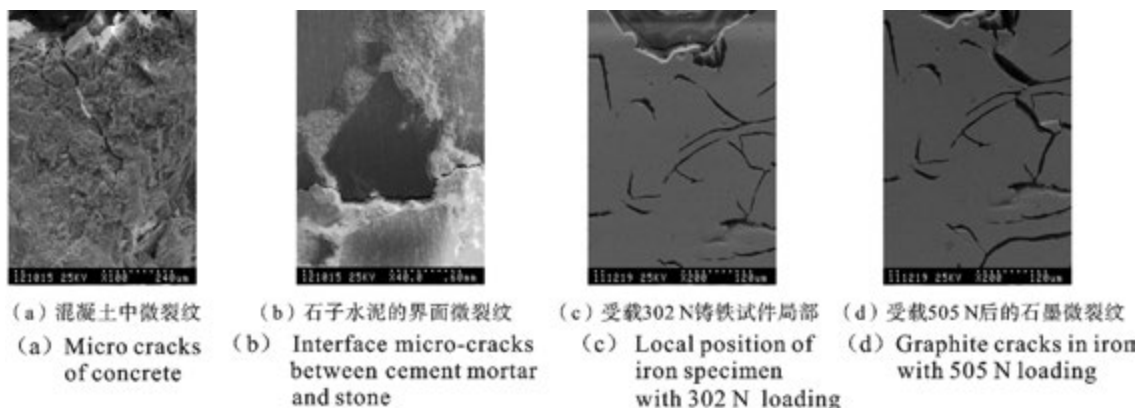


图 1 准脆性材料的微裂纹电镜照片

Fig. 1 MSE Photos of micro-crack in quasi-brittle materials

* 国家自然科学基金(10272068)与非线性力学国家重点实验室(LNM)开放基金项目资助.

** 通讯作者. Tel:0532-85071560; E-mail: mslmwang@sina.com.cn.

(d)分别为单轴拉伸缺口板内平均应力 50.3 MPa 与 84 MPa 时铸铁中石墨微裂纹的变形影象. 从图 1 可以看到, 尽管混凝土的骨料尺寸接近一个毫米, 宏观裂缝大于几个毫米甚至几十毫米, 而图中两种材料内的微裂纹尺寸均小于 1 毫米, 都在细观尺度范围内^[6,7].

基于连续介质力学及弹塑性理论发展起来的断裂力学, 是以宏观裂缝或裂缝作为几何特征进行力学量化分析与参量计算评估固体结构及材料安全的. 线弹性断裂力学的重要指标是表征裂前应力奇异性的强度因子, 或裂纹扩展能量释放率; 而 J 积分及裂缝张开位移是弹塑性断裂的重要参量. 对于以水泥基材料为代表的准脆性介质, 有学者对这种光滑裂缝前的微裂纹损伤区简化成具有闭合合力或黏聚力分布的非光滑裂纹段, 如 Hillerborg 等提出的非

线性裂纹分析计算, Xu 的双 K 断裂模型, Jenq and Shah 的双参数模型等; 诸多分析没有考虑微裂纹等细观因素对材料结构的影响^[3,8]. 从图 1 所示的材料宏观缺口附近局部的相关微裂纹形貌可以看出, 该类材料断裂损伤区的变形主要是其细观裂纹的受力与变形所综合表现出来的; 为此, 建立宏观裂缝与包含微裂纹损伤区联结的分析模型, 如图 2 所示. 图 2 中左侧为光滑的敞开裂缝, 右侧损伤区为条形带, 且其中有诸多微裂纹似乎非整齐的分. 若远场作用有垂直于裂缝的拉伸应力 σ_{yy}^{∞} 及剪切应力 σ_{xy}^{∞} , 那么在损伤区域或微裂纹周围的应力将会有变化, 如形成局部应力 σ' 及 τ' . 显然损伤区的变化必然对整体结构的力学性能产生影响, 故需要分析损伤区微裂纹的受力变形规律.

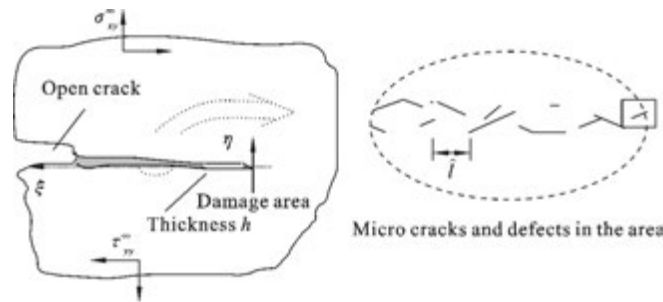


图 2 宏观裂缝前端受载后出现微裂纹损伤区

Fig. 2 Micro crack's damage strip before the tip of a macro crack

2 微裂纹近场变形的解析计算

相关细观缺陷及裂纹与宏观力学参量关系的分析已经促进固体力学发展, 且形成了细观力学的新领域研究^[4,9,10]. 宏观尺度中的应力应变及变形是细观范畴内力与位移在一定区域中的平均化结果. 关于一个裂纹或多个特征缺陷在周边邻域受载后形成的力学相应是细观力学代表性体积单元 (RVE) 分析的关注点所在. 因此关于上述图 2 中右侧损伤区的微裂纹力学行为分析, 不妨构造固体局部中包含单个裂纹或多组裂纹的细观分析模型. 如图 3 所示, 为单一裂纹的位置构型示意图, 周边近场正应力与切应力分别为 (σ', τ') , 裂纹轴线与正应力垂线的夹角为 θ , 水平轴与铅垂轴分别为 (x', y') 坐标, 在某点处的位移为 (u', v') .

对于裂纹垂直于单轴拉伸应力 σ 或平行于切应力 τ 的长度为 $2a$ 的裂纹, 即 $\theta=0$, 其近场应力与位

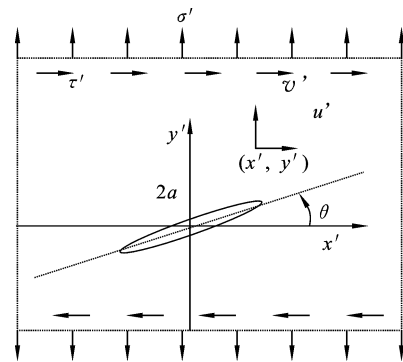


图 3 微裂纹附近应力与变形的示意图

Fig. 3 Deformation and stress near a crack

移可以通过 Westergard 应力函数 $\Phi = \text{Re}\bar{Z}_1(z) + y\text{Im}\bar{Z}_1(z)$ 在满足双调和方程 $\nabla^4\Phi=0$ 与裂纹及远场力边界条件的解析函数得到^[11]. 其中 $\bar{Z}_1(z)$ 与 $\bar{Z}_1(z)$ 为解析函数 $Z_1(z)$ 的一次与二次积分函数.

若设单轴拉伸应力 σ 作用下的张开型 (I 型) 裂纹的函数为 $Z_I(z) = \sigma z / \sqrt{z^2 - a^2}$; 那么在平面应力状态下的 x 与 y 向位移 (u, v) 为:

$$\begin{cases} u_I = \frac{(1-\nu)\text{Re}\bar{Z}_I - (1+\nu)y\text{Im}Z_I}{E} \\ v_I = \frac{2\text{Im}\bar{Z}_I - (1+\nu)y\text{Re}Z_I}{E} \end{cases} \quad (1)$$

而对于由切应力 τ 形成的平面应变状态下 II 型裂纹附近场, 有:

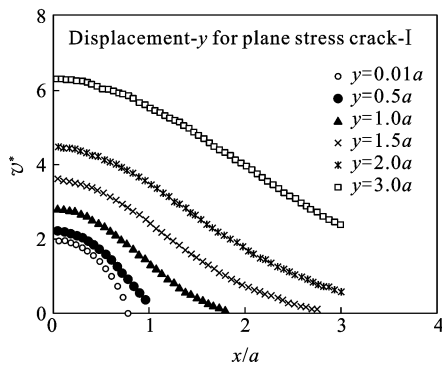
$$\begin{cases} u_{II} = \frac{(1+\nu)[2(1-\nu)\text{Im}\bar{Z}_{II} - y\text{Re}Z_{II}]}{E} \\ v_{II} = \frac{(1+\nu)[-(1-2\nu)\text{Re}\bar{Z}_{II} - y\text{Im}Z_{II}]}{E} \end{cases} \quad (2)$$

式中 $Z_{II} = \tau z / \sqrt{z^2 - a^2}$ 为满足双调和方程与边界条件的 II 型裂纹解析函数. 通过复变函数极坐标形式的解析积分或求导, 能够得到单一裂纹周围的变形场. 例如对 I 型裂纹单轴拉应力 σ 作用下, 在裂纹中心为原点的水平垂直轴分别为 x 与 y 轴的某点处 y 向位移为:

$$v_I = \frac{1}{E} [2\text{Im}\bar{Z}_I - (1+\nu)y\text{Re}Z_I] = \frac{2}{E}\sigma \left[a^2 - x^2 + \sqrt{(x^2 + y^2)^2 + a^2(a^2 + 2y^2 - 2x^2)} \right] + \frac{-(1+\nu)yx\sigma}{2E\{[(x-a)^2 + y^2][(x+a)^2 + y^2]\}^{1/2}} \cdot [\sqrt{(x-a)^2 + y^2} + x - a]^{1/2} [\sqrt{(x+a)^2 + y^2} +$$

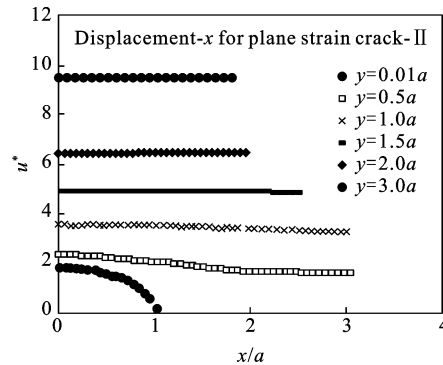
$$(x+a)]^{1/2} + \frac{(1+\nu)yx\sigma}{2E\{[(x-a)^2 + y^2][(x+a)^2 + y^2]\}^{1/2}} \cdot [\sqrt{(x-a)^2 + y^2} - x + a]^{1/2} [\sqrt{(x+a)^2 + y^2} - (x+a)]^{1/2} + \frac{-(1+\nu)y^2\sigma}{2E\{[(x-a)^2 + y^2][(x+a)^2 + y^2]\}^{1/2}} \cdot [\sqrt{(x-a)^2 + y^2} - x + a]^{1/2} [\sqrt{(x+a)^2 + y^2} + (x+a)]^{1/2} + \frac{-(1+\nu)y^2\sigma}{2E\{[(x-a)^2 + y^2][(x+a)^2 + y^2]\}^{1/2}} \cdot [\sqrt{(x-a)^2 + y^2} + x - a]^{1/2} [\sqrt{(x+a)^2 + y^2} - (x+a)]^{1/2} \quad (3)$$

通过以上解析式计算不难得到各种情况下的裂纹附近位移或变形分布. 如图 4 所示为无量纲位移在不同 y 值时随 x 的变化曲线. 图中横坐标为水平轴的无量纲位置坐标 x/a ; 图 4(a) 纵坐标为 I 型裂纹纵向位移 v_I 与弹性模量 E 乘积除以应力与裂纹半长度 ($a\sigma$), 即 $v^* = v_I E / (\sigma a)$. 图 4(b) 纵坐标为 II 型裂纹平面应变状态下, 横向位移 u_{II} 与弹性模量乘积除以切应力与半裂长即 $u^* = u_{II} E / (\tau a)$. 计算时取泊松比 $\nu = 0.25$. 从图 4 看出无论 I 型裂纹在垂直于裂纹向的张开位移, 还是 II 型裂纹的剪切位移, 在裂纹面最近处变化比较急剧, 在远处变得比较平缓. 在剪切应力作用下距离裂纹半个裂长以上点的平行于裂纹的位移变化不明显.



(a) I 型裂纹张开位移

(a) The opening displacement of type-I crack



(b) II 型裂纹的水平位移

(b) The sliding displacement of a crack of type-II

图 4 水平裂纹中心右侧上方的无量纲位移变化曲线

Fig. 4 Dimensionless displacement curves about a crack

若损伤区中的微裂纹与宏观裂缝不平行而是成 θ 角度, 参考图 2 右端小框和图 3, 计算细观裂纹平面问题时需用到转换矩阵:

$$\beta = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (4)$$

应用式 (1), (2) 或 (3), 首先把近场应力 (σ', τ')

写成二阶张量形式,且通过分别左乘右乘转换矩阵 β 和它的转置 β^T 得到与局部微裂纹轴线垂直或平行的正应力和切应力 (σ, τ) ; 通过式 (1), (2) 或图 4 得到平行或垂直于局部微裂纹轴线的位移向量 $(u, v)^T$ (其中 $u = u_I + u_{II}, v = v_I + v_{II}$), 然后左乘 β^T 就得到平行或垂直于宏观裂缝轴线的位移 (u', v') , 参考图 3 所示.

3 损伤区细观裂纹与宏观裂缝的关系

3.1 裂缝端部损伤区化为黏聚裂纹

为了将微裂纹相关的变形计算用于图 2 所示固体构型中与宏观裂缝的力学计算形成联结, 我们不妨考虑之前人们对于准脆性材料断裂提出的裂缝端部黏聚裂纹, 即图 2 左中的损伤条形带, 若把条形带简化成具有黏聚应力 $\bar{\sigma}_y$ 分布的裂纹段, 那么当该段长度 Γ 相对于光滑裂缝长度不是太长时, 就可以通过宏观裂缝前的应力强度因子 K_I 及损伤带长度 Γ , 用于估计损伤区上下岸之间的黏聚应力分布和虚拟裂纹的张开位移^[12]. 即:

$$\begin{cases} \bar{\sigma}(\xi) = \frac{K_I \sqrt{2}}{\sqrt{\pi \Gamma}} \sqrt{\frac{\Gamma - \xi}{\Gamma}} & (0 < \xi < b) \\ \delta(\xi) = \frac{16 K_I}{3 E} \sqrt{\frac{\Gamma}{2 \pi}} \left(\frac{\xi}{\Gamma}\right)^{3/2} & (0 < \xi < b) \end{cases} \quad (5)$$

其中 K_I 为远场载荷在光滑裂缝端部产生的张开型应力强度因子, 而 ξ 为损伤区内任一点到光滑裂缝端点的距离, 参见图 1 所示.

3.2 损伤局部体积单元的变形

实际材料损伤区中微裂纹是非均匀分布的, 而且在微裂纹周围形成的变形也是随距离裂纹位置而变化的. 若坐标显示用数字做下标替换 $x \rightarrow x_1, y \rightarrow x_2, z \rightarrow x_3$, 考虑损伤局部的体元平均应变分解为基体弹性应变 $\bar{\epsilon}_{ij}^e$ 与缺陷变形引起的应变 $\bar{\epsilon}_{ij}^c$, 即:

$$\bar{\epsilon}_{ij} = \bar{\epsilon}_{ij}^e + \bar{\epsilon}_{ij}^c \quad (6)$$

基体弹性应变 $\bar{\epsilon}_{ij}^e$ 可以由未损伤区的应力应变本构关系计算, 而体元 V 内 N_a 个微裂纹所产生的应变, 由细观力学方法有^[4,9]:

$$\bar{\epsilon}_{ij}^c = \frac{1}{V} \sum_{a=1}^{N_a} \int_{s_a} \left(\frac{n_i b_j + n_j b_i}{2}\right)^{(a)} dS \quad (7a)$$

其中 V 为代表性单元的体积, s_a 为第 a 个裂纹面, 显然其体积单元 V 的选取影响着应变; 第 a 个裂纹的变形涉及到裂纹大小与方位 (n_i, b_k) 及坐标转换, 正如前番单一裂纹的分析, 位移 b_k 取决于裂纹几何与周边应力; 而且损伤区的变形还与局部微裂纹的疏密程度密切相关.

若宏观裂缝前端损伤区是条形带, 宽度是随距离裂缝尖端距离变化的 $h(\xi)$, 平板构型的厚度为 B , 那么对于该损伤区的体积单元有:

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_{ij}^c(\xi) &= \frac{1}{\bar{l} B h(\xi)} \sum_{a=1}^{N_a} \int_{s_a} \left(\frac{n_i b_j + n_j b_i}{2}\right)^{(a)} d(Ba_a) = \\ &= \frac{1}{\bar{l} h(\xi)} \sum_{a=1}^{N_a} \int_{s_a} \left(\frac{n_i b_j + n_j b_i}{2}\right)^{(a)} da_a \end{aligned} \quad (7b)$$

\bar{l} 为体积单元的 x 向长度, 大约是平均一个微裂纹加两边半个间距, 参考图 2 右侧所示. 设单位应力产生位移 $b_{0k} (k=1, 2, 3)$, 那么在位置 ξ 的 y 向张开位移 $b_k = \sigma(\xi) b_{0k}$. 从而:

$$\bar{\epsilon}_{ij}^c(\xi) = \frac{\sigma(\xi)}{\bar{l} h(\xi)} \sum_{a=1}^{N_a} \int_{s_a} \left(\frac{n_i b_{0j} + n_j b_{0i}}{2}\right)^{(a)} da_a \quad (7c)$$

3.3 黏聚损伤带中的变形估计

关于宏观裂缝前的微裂纹黏聚损伤区条形带, 不失一般性, 在此仅限于张开型宏观裂缝问题. 如图 1 与图 2 所示, 考虑损伤带内微裂纹变形, 由上式 (7) 就条形带两岸的平均位移估算可表示为:

$$\begin{aligned} \bar{\delta}(\xi) &= \bar{\epsilon}_{22}(\xi) h(\xi) = \bar{\epsilon}_{22}^e h(\xi) + \\ &= \frac{\sigma(\xi)}{\bar{l}} \sum_{a=1}^{N_a} \int_{s_a} \left(\frac{n_i b_{0j} + n_j b_{0i}}{2}\right)_y^{(a)} da_a \end{aligned} \quad (8a)$$

一般在损伤带中的微裂纹变形均大于基体的弹性变形, 又将任意分布微裂纹变形投影在垂直于损伤带轴线的 y 方向上, 如上式 (8a) 的中括号右下标所示, 于是有:

$$\begin{aligned} \bar{\delta}(\xi) &= \bar{\epsilon}_{22}^e h(\xi) + \frac{\sigma(\xi)}{\bar{l}} \sum_{a=1}^{N_a} \int_{s_a} \hat{b}_{02} n_2^a da_a = \\ &= \sigma(\xi) \hat{b}_{02}^{e+c} \sum_{a=1}^{N_a} \int_{s_a} \frac{n_2^a da_a}{\bar{l}} = \bar{v}(\xi) \sum_{a=1}^{N_a} \int_{s_a} \frac{n_2^a da_a}{\bar{l}} \end{aligned} \quad (8b)$$

式中 \hat{b}_{02} 是单个微裂纹在单位应力下的 y 向张开位移, 而 $\bar{b}_{02}^{e+c}(\xi)$ 为单位应力产生的包括弹性部分的裂纹周围张开位移; 其中 $\bar{v}(\xi) = \sigma(\xi) \bar{b}_{02}^{e+c}$ 为在 $\tau(\xi)$ 应力下的单个裂纹单元体上的张开位移. 又若令 $\omega =$

$$\sum_{a=1}^{N_a} \int_{s_a} \frac{n_2^a da_a}{\bar{l}} \quad \text{则有:} \quad \delta(\xi) = \bar{v}(\xi) \omega \quad (9a)$$

$$\text{及} \quad \omega = \sum_{a=1}^{N_a} \int_{s_a} \frac{n_2^a da_a}{\bar{l}} \approx \sum_{a=1}^{N_a} \frac{\hat{a}_a}{\bar{l}} \quad (9b)$$

式中 \hat{a}_a 为第 a 个裂纹的有效长度. 从该式看出, ω 是与微裂纹密度分布有关的参量, 其物理意义为代表性体元内相应于 y 向拉伸应力作用下的有效微裂纹的个数. 由实验观测大概估计 ω 在 0-3 之间或更

大点,其值也反映出材料的损伤程度.例如就铸铁而言,尽管其中富含石墨片,但在单向受力后作为微裂纹张开情况多数是发生在垂直于拉应力方向上的,平行于拉伸应力方向的石墨片很少裂开.

4 算例与实验对比

采用上述计算方法能够计算出宏观裂缝前端损伤区某微裂纹附近的张开位移.对于初始弹性模量约 47 GPa 的铸铁试件,在单轴拉伸外力作用下受载荷部分的矩形板为长×宽×厚=6×6×1.5 (mm),预制割口长 2 mm,微裂纹长度在 70 到 380 微米之间,参照文献[13]中的图 2 映象,将试件夹持在电镜设备中,作在位拉伸观测,并拍下在某载荷下宏观裂口前损伤区域的图片,如图 1 所示.由电镜照片的右下方刻度尺,能够测出图片中某两点距离或

长度,对比不同载荷下的位置距离,就可以计算出材料中某两点之间的变形.如图 5 所示为两个试件分别在载荷 394 N 和 386 N 时垂直于宏观裂缝轴线方向的位移.

图 5 中实心方块符号为实验测试数值,空心或小点符号表示的为理论计算值;左图为试件 1 的理论与实验数据对比,右图为试件 2 的数据.理论计算时令式(7)式(5)和式(8)中 $\bar{\sigma}(\xi) = \sigma(\xi)$ 及 $\bar{\delta}(\xi) = \delta(\xi)$,参照式(8)和(9), \bar{v} 按单个微裂纹的平面应力下张开位移计算.且取 ω 值在 1 到 3 之间,图中小点对应其值是 1,左右两图中空心标的值分别为 1.87 和 2.7 不等.从该图看出,尽管实测值与理论计算值有偏差,但位移的分布趋势是相同的,而且 ω 取较大合适数值时计算值与实测数值非常接近.

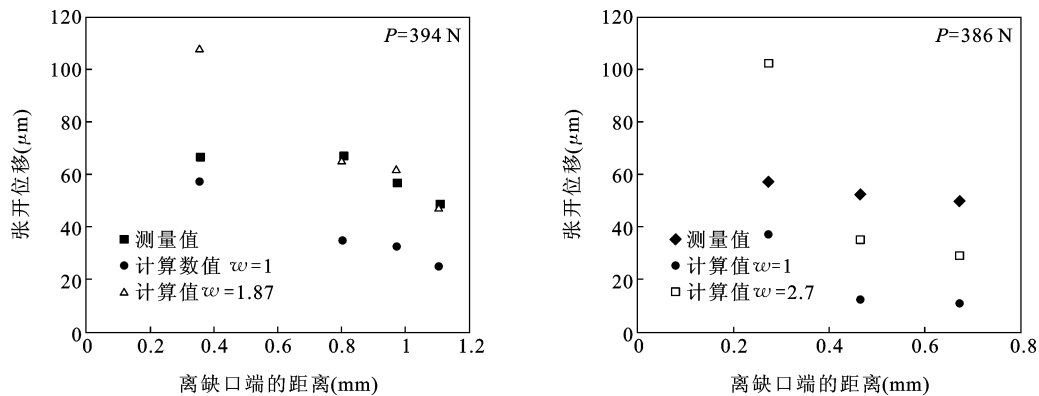


图 5 铸铁试件宏观裂缝前端损伤区的实测位移分布与理论计算对比

Fig. 5 The displacement comparison of calculation result with tested data from an iron specimen along damage strip

5 结束语

通过对准脆性材料在受载荷后损伤断裂及变形的实验观测与理论探讨,从数据的对比可看出将宏观框架下的非线性断裂的计算与细观力学方法的结合及嵌套是可行的.

参考文献

[1] Hertzberg W Richard. Deformation and fracture mechanics of engineering materials[J]. New York, U. S. : John Wiley & Sons Inc,1996.

[2] Carpinteri Alberto, Cornetti P, Puzzi S. Scaling laws and multiscale approach in the mechanics of heterogeneous and disordered materials[J]. Applied Mechanics Reviews,2006,59:283-304.

[3] Xu S L, Reinhardt H W. Determination of double-K criterion for crack propagation in quasi-brittle fracture[J]. Part I, II and III. International Journal of Fracture,1999,98(2):111-193.

[4] 冯西桥,余寿文. 准脆性材料细观损伤力学[M]. 北京:高等教育出版社,2002.

[5] 袁小平,刘红岩,王志乔. 考虑微裂纹相互作用的岩石细观力学弹塑性损伤模型研究[J]. 固体力学学报,2012,33(6):592-601.

[6] 杨卫. 宏微观断裂力学[M]. 北京:国防工业出版社,1995.

[7] 沈新普,杨璐. 混凝土损伤理论及试验[M]. 北京:科学出版社,2009.

[8] 王利民,孙明远,代祥俊等. 混凝土断裂过程及尺寸效应分析[J]. 实验力学,2008,23(1):34-42.

[9] 张研,张子明. 材料细观力学[M]. 北京:科学出版社,2008.

[10] Pichler B, Hellmich C. Estimation of influence tensors

- for eigen-stressed multiphase elastic media with non-aligned inclusion phases of arbitrary ellipsoidal shape [J]. *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)*, 2010, 136(8):1043-1053.
- [11] 程靳, 赵树山. 断裂力学[M]. 北京: 科学出版社, 2008.
- [12] 王利民, 徐世焯, 赵熙强. 考虑软化效应的黏聚裂纹张开位移分析[J]. *中国科学-G 辑*, 2006, 36(1):59-71.
- [13] 王利民, 徐世焯等. 准脆性材料黏聚阻裂的计算与实验[J]. *力学季刊*, 2013, 34(3):456-462.

ON THE LINKING OF MICRO CRACK DAMAGE AND MACRO FRACTURE OF QUASI-BRITTLE MATERIALS

Limin Wang¹ Weiwei Han¹ Ting Chen¹ Haiying Wang² Daoping Han¹

(¹ Science School of Qingdao University of Technology, Qingdao, 266033)

(² LNM of Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing, 100190)

Abstract The Quasi brittle material have not only its internal stress and deformation, but also the development of defects or micro cracks and macro crack, when it being loaded. According to the microscopic observation of materials and the principle of solid mechanics, a model is established to analyze the interaction between macro crack and micro cracks. If the damage area of materials is considered as a virtual crack, there is a distribution of cohesion stress on the two sides of the virtual crack. The virtual crack is the simplification of damage area, and the opening displacement between the two sides is the embodiment of the micro crack deformation. By means of the deformation calculation of the micro cracks are embedded in the damage area deformation near macro crack tip, the joint of mesoscopic and macroscopic analysis has been formed on material failure.

Key words quasi-brittle materials, micro cracks damage, macro fracture, a damage stripe model