

文章编号: CSTAM2014-P19-0098

一种求解 Euler 方程组的新通量分裂方法

李馨东, 胡宗民, 姜宗林

(中国科学院力学研究所, 北京 100190)

摘要: 根据对流迎风分裂 (AUSM 格式) 思想提出了一种新的通量分裂方法, 称为 K-CUSP 格式。它与传统的 H-CUSP 和 E-CUSP 格式的最大不同之处在于能量守恒量的分裂: K-CUSP 格式认为要处理对流和声波两个不同的物理过程, 应将无黏守恒通量中的所有运动学量和所有热力学量进行分开处理, 这时的总能量被分裂成动能和静焓。另外压力项的离散采用了一种新的界面处理方式。通过一系列的测试发现: (1) K-CUSP 格式继承了 FVS 格式的简单性和稳健性。激波后无压力过冲, 也没有非物理的数值振荡, 优于 AUSM、AUSM+和 WPS 格式。(2) K-CUSP 格式也继承了 FDS 格式的高分辨率, 无需熵修正。接触间断和激波间断的分辨率与 FDS 格式相同, 远高于 FVS 格式, 对于运动接触间断的速度, AUSM、AUSM+和 WPS 格式存在很大的振荡, 而目前的新格式却不存在。

关键词: 通量分裂, 混合迎风格式, AUSM 格式, K-CUSP 格式

中图分类号: O35

文献标识码: A

0 引言

随着计算流体力学的发展和应用, 数值算法的研究往往追求这样的目标: 间断分辨率高、计算效率高、稳健性好和易于推广到其它守恒律方程组。自八十年代起, 迎风格式因其清晰的物理意义和简单性, 至今仍是空间离散的主要方法。第一类迎风格式是通量矢量分裂(FVS), 如: Steger-Warming分裂^[1]和Van Leer分裂^[2], 这类格式简单易用、计算量小, 激波前后不易发生非物理振荡, 但是数值耗散大, 间断分辨率和黏性分辨率低, 对边界层内的压力和温度预测不准, 求解剪切流动的精度较低。为了降低Van Leer分裂格式的数值耗散, Hanel、Schwane^[3,4]和Coirier、Van Leer^[5]先后对此进行了改进, 使得剪切层的分辨率得到了提高。第二类迎风

格式是通量差分分裂(FDS), 如: Roe分裂^[6]、Osher分裂^[7]和HLLC分裂^[8], 这类格式数值耗散小、间断分辨率和黏性分辨率很高, 但是稳健性较差, 高速流动下容易出现“Carbuncle”现象^[9-11], 而且计算效率也较低。近年来出现了一种新的混合迎风格式, 该格式综合了两类迎风格式各自的优点, 继承了FVS格式的计算效率、稳健性和FDS格式的高分辨率, 在平衡/非平衡流、湍流、多相流和磁流体力学等领域也得到了应用。

目前应用最广的一种混合迎风格式是Liou的AUSM(Advection Upstream Splitting Method)类格式^[11-16], 其基本思想是: 对流和声波是两个不同的物理过程应该分别处理, 即将无黏守恒通量分裂成对流项和压力项两个部分。AUSM类格式与FVS/FDS格式的数值通量相比, 其数值耗散项的系数不是矩

作者简介: 李馨东 (1988-), 男, 四川, 博士生, 研究方向: 计算流体力学和可压缩流动稳定性. E-mail: lixindong@imcc.ac.cn

阵而是标量,既保留了FVS格式的简单性又提高了计算效率。虽然AUSM格式^[11]和AUSM+格式^[13-16]没有“Carbuncle”现象,但激波后存在过冲和壁面附近存在振荡的缺陷,而AUSMDV^[12]格式没有压力过冲和振荡却存在“Carbuncle”现象。为了兼具二者的优点, Kim提出了基于压力权函数的AUSMPW格式^[17],但是其构造格式很复杂,为此又提出简化后的AUSMPW+格式^[18,19]。与AUSM格式相似的混合迎风格式还有Jameson的CUSP(Convective Upwind and Split Pressure)格式^[20,21]和Edwards的LDFSS格式^[22,23],它们的主要差异在于界面马赫数的定义不同,相同点是对流项的总能量均为总焓,故统称为H-CUSP格式^{[21][30]}。

另一种CUSP格式是E-CUSP格式^{[24-31][32,33][34]},它从特征分析出发,将雅可比矩阵的特征值 $u \pm a$ 分裂成对流速度 u 和声速 $\pm a$,得到相应的对流项和压力项,此时对流项的总能量是总焓。Zha^[24-31]的E-CUSP格式在界面构造时借鉴了LDFSS格式的方法。Halt和Agarwal^[32,33]通过分析对流项和压力项的特征值,认为WPS(Wave/Particle Splitting)格式的通量分裂比AUSM格式更合理地表征了对流和声波的流动特征,且该格式能从Boltzmann方程推导而来。Deshpande等^[34]从分子动理论出发解释了WPS格式所代表的物理意义,认为流体微团具有粒子行为和波动行为二象性,对流项表示流体微团的对流运输,而压力项表示流体微团因膨胀和压缩产生向外传播的压力波。但是E-CUSP格式在定常流动中不能像H-CUSP格式那样保持总焓守恒,在超/高超声速流动的应用也较少。

在此基础上,本文认为将对流和声波两个物理

过程分开处理的思想是有一定物理意义的,但是这种思想并没有给出唯一的处理方式。通过分析和比较两类传统CUSP格式的同异,本文提出了一种具体的分裂原则,得到了一种新的通量分裂方法。第1部分是新格式的思想,将它与E-CUSP、H-CUSP格式的同异进行了说明,在数值界面构造上也采用了不同的处理方式。第2部分是数值测试,对三种CUSP格式和FVS/FDS格式的计算结果进行了详细地比较和分析。第3部分是全文的结论。

1 通量分裂新方法

1.1 控制方程

考虑量热完全气体的一维Euler方程组:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

其中

$$U = (\rho, \rho u, \rho E)^T, F = (\rho u, \rho u^2 + p, \rho H u)^T$$

E, H 分别是单位质量的总能和总焓。由于篇幅这里没给出H-CUSP和E-CUSP格式的具体形式。从对流迎风分裂思想^[11]的角度来看,为了将 F 分裂成表示对流运动的对流项和声波传播的压力项,H-CUSP格式仅把动量守恒量中的静压分裂到压力项,E-CUSP格式则把能量守恒量中的静压也分裂到压力项,对流项的能量为总焓 rE 。现将总焓的表达式重新写出来:

$$\rho H = \rho E + p = \frac{1}{2} \rho u^2 + \rho e + p = \frac{1}{2} \rho u^2 + \frac{p}{\gamma - 1} + p$$

其中的内能满足 $e = C_v T = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho}$,这里的 p 表示

流体微团自身系统的热力学压力；上式最右端的第二个 p 是静压，对于可压缩流体来说它也是热力学压力。一个自然的想法是将总焓中所有的热力学压力合并在一起，即 $\frac{p}{\gamma-1} + p = \rho C_p T = \rho h$ ， h 为单

位质量的静焓。于是有：

$$F = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho H u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \frac{1}{2} \rho u^2 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ p \\ \rho h u \end{pmatrix} = F_K^c + F_K^p \quad (2)$$

由于(2)式中对流项的能量变为了动能 $\frac{1}{2} \rho u^2$ ，因此目前的通量分裂方法称为K-CUSP格式，其中的 F_K^c, F_K^p 表示K-CUSP分裂下的对流项和压力项。

1.2 数值通量构造

K-CUSP格式的界面数值通量分裂如下：

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1/2} - F_{i-1/2}) \quad (3)$$

$$F_{1/2} = F_{K,1/2}^c + F_{K,1/2}^p = \frac{1}{2} a_{1/2} M_{1/2} (\Phi_L + \Phi_R) - \frac{1}{2} a_{1/2} |M_{1/2}| (\Phi_R - \Phi_L) + [0, p_{1/2}, (\rho h u)_{1/2}]^T \quad (4)$$

$$\Phi = (\rho, \rho u, \frac{1}{2} \rho u^2)^T \quad (5)$$

$$M_{1/2} = M_L^+ + M_R^-, p_{1/2} = p_L^+ + p_R^- \quad (6)$$

$$(\rho h u)_{1/2} = a_{1/2} [(\rho h)_L M_L^+ + (\rho h)_R M_R^-] \quad (7)$$

$$M^\pm = \begin{cases} \pm \frac{1}{4} (M \pm 1)^2 \pm \frac{1}{8} (M^2 - 1)^2, & |M| \leq 1 \\ \frac{1}{2} (M \pm |M|), & |M| > 1 \end{cases} \quad (8)$$

$$p^\pm = \begin{cases} \frac{1}{4} (M \pm 1)^2 (2 \mp M), & |M| \leq 1 \\ \frac{1}{2} (1 \pm |M|/M), & |M| > 1 \end{cases} \quad (9)$$

其中 $a_{1/2}$ 为网格界面声速，采用文献[13]的定义。

与E-CUSP格式不同的是，对K-CUSP格式压力项的

$(\rho h u)_{1/2}$ ，采用了等式(7)的分裂方法，取得了较好结果。

2 结果与分析

为了体现和比较三种CUSP格式和FDS/FVS格式的基本特性，采用了一维一阶的显式格式测试了多个间断问题。计算域为 $x \in [0.5, 0.5]$ ，网格数为100， $W_L = [r_L, u_L, p_L]$ ， $W_R = [r_R, u_R, p_R]$ ，量热完全气体的比热 $g = 1.4$ 。其中FDS类格式采用无熵修正的Roe格式，FVS类格式采用Steger-Warming格式和Van Leer格式，H-CUSP类格式采用AUSM和AUSM+格式，E-CUSP类格式采用两种格式，包括Zha的E-CUSP格式（简称Zha格式^[24]）和Halt-Agarwal的WPS格式。

2.1 静止的接触间断

初始条件

$$W_L = [10.0, 0.0, 1.0]^T, W_R = [1.0, 0.0, 1.0]^T,$$

计算时间 $CFL = 0.8, T = 0.1$ 。

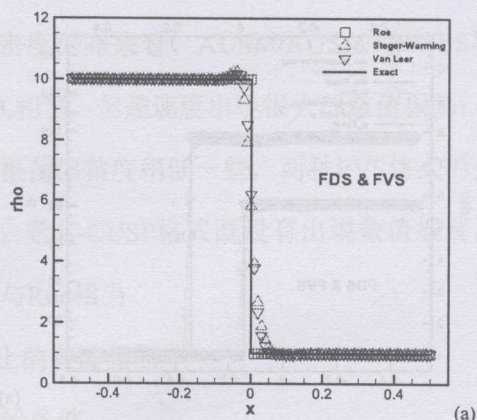
从上可看出AUSM、AUSM+、WPS格式和K-CUSP格式可以非常精确地捕捉到静止的接触间断，与Roe格式的结果完全相同。FVS格式的数值耗散最大，Zha格式的数值耗散次之，但对间断的捕捉仍需要5~6个点。

2.2 运动的接触间断

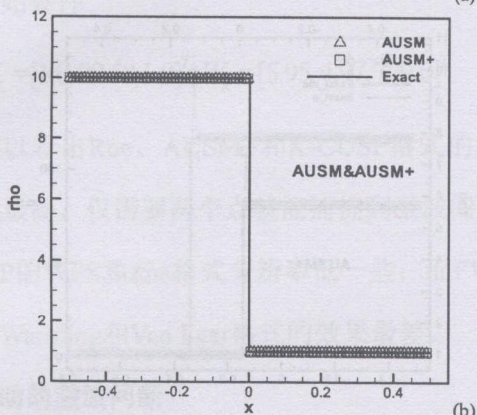
初始条件

$$W_L = [0.125, 0.3a_R, 1.0]^T, W_R = [10.0, 0.3a_R, 1.0]^T$$

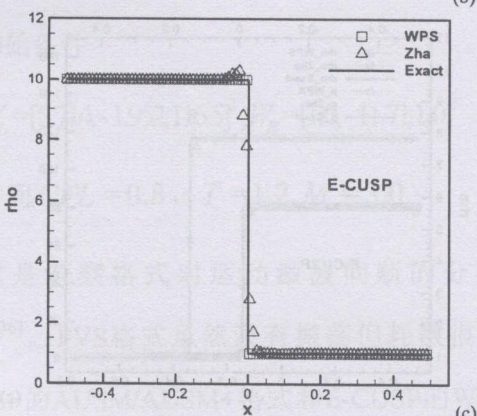
$CFL = 0.8$ ，计算步数 $nstep \gg 2000$ ， $M = 0.3$ 。



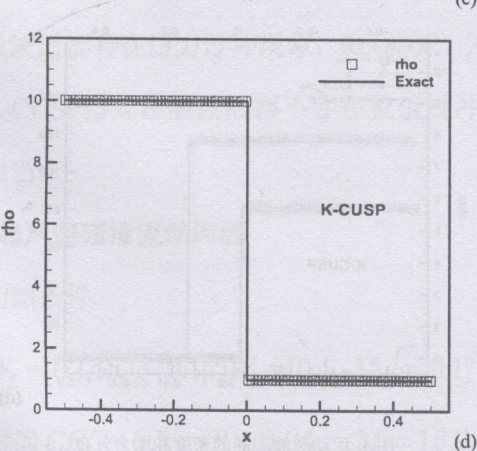
(a)



(b)



(c)

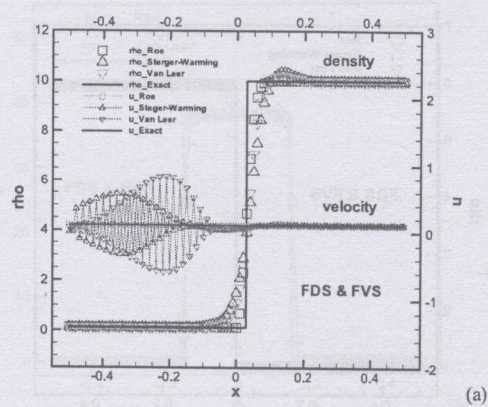


(d)

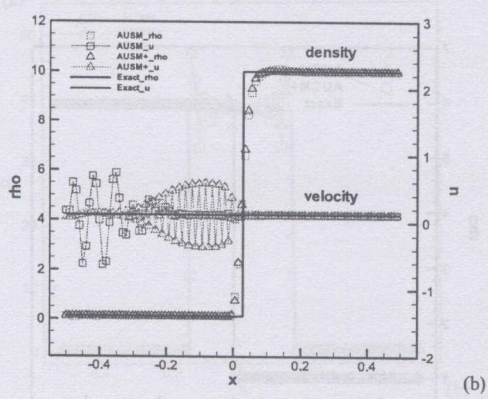
图1 静止接触间断的密度分布

Fig.1 Density distribution of stationary contact discontinuity

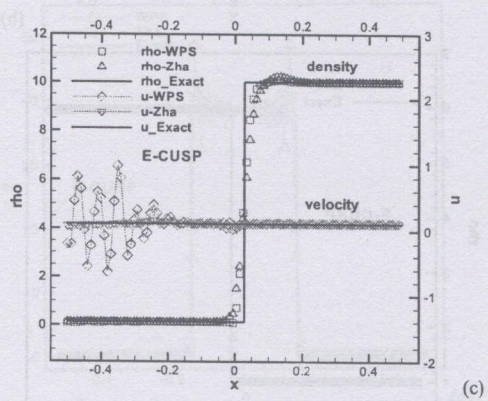
(a) FDS/FVS, (b) H-CUSP, (c) E-CUSP, (d) K-CUSP



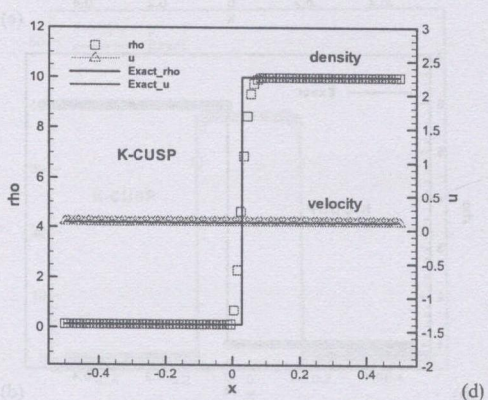
(a)



(b)



(c)



(d)

图2 运动接触间断的密度和速度分布

Fig.2 Density and velocity distribution of slowly moving

contact discontinuity

(a) FDS/FVS, (b) H-CUSP, (c) E-CUSP, (d) K-CUSP

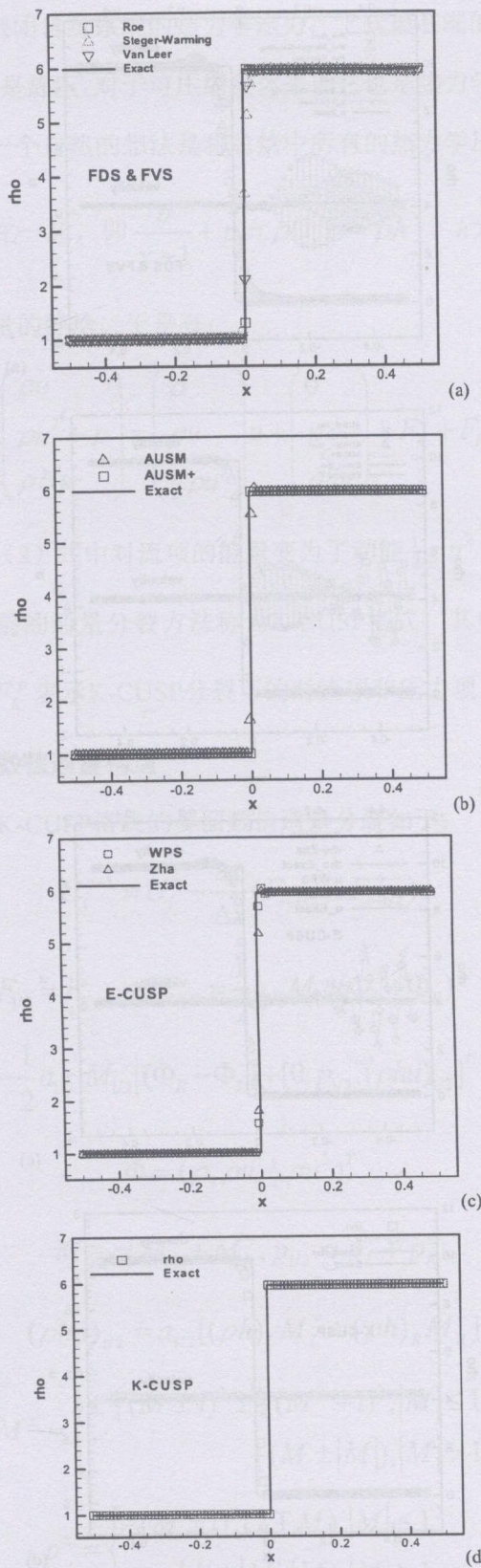


图3 静止激波间断的密度分布

Fig.3 Density distribution of stationary shock discontinuity
(a) FDS/FVS, (b) H-CUSP, (c) E-CUSP, (d) K-CUSP

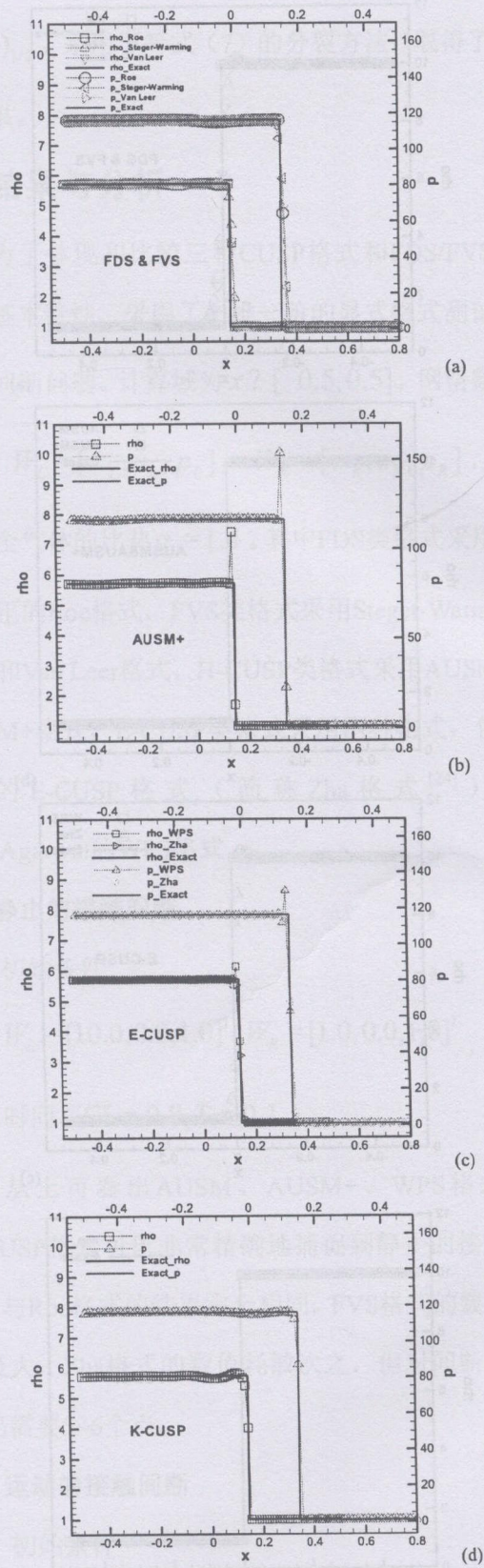


图4 运动激波间断的密度和压力分布

Fig.4 Density and pressure distribution of slowly moving shock discontinuity
(a) FDS/FVS, (b) H-CUSP, (c) E-CUSP, (d) K-CUSP

从密度分布来看, AUSM/AUSM+和WPS格与Roe格式相当, 但是速度出现很大的数值振荡; Zha格式无振荡但精度稍低一些, 两种FVS格式的分辨率最差; 而K-CUSP格式既没有出现数值振荡, 分辨率也与Roe相当。

2.3 静止的激波间断

初始条件

$$W_L = [1.0, 29.58, 1.0]^T, W_R = [5.95, 4.97, 729.0]^T$$

可以看出Roe、AUSM+和K-CUSP格式的激波分辨率最高, 仅需要两个点就能捕捉到激波间断; E-CUSP的WPS和Zha格式分辨率低一些; 而FVS的Steger-Warming和Van Leer格式的效果最差。

2.4 运动的激波间断

初始条件

$$W_L = [5.714, -1.952, 116.5]^T, W_R = [1.0, -11.71, 1.0]^T$$

计算时间 $CFL = 0.8$, $T = 1.2$, $M = 3.0$ 。

这是考察格式对运动激波间断的分辨率^[14,22,23,36]。FVS格式虽然没有振荡但耗散很大; H-CUSP的AUSM/AUSM+格式和E-CUSP的WPS格式在激波后都存在压力过冲现象; Roe格式、Zha格式和K-CUSP格式在激波后都不存在数值过冲, 分辨率相当。

2.5 高超声速碰撞流动问题

初始条件

$$W_L = [0.1, 15\sqrt{g}, 0.1]^T, W_R = [0.1, -15\sqrt{g}, 0.1]^T$$

计算时间 $CFL = 0.8$, $T = 0.04$, $M = 15.0$ 。

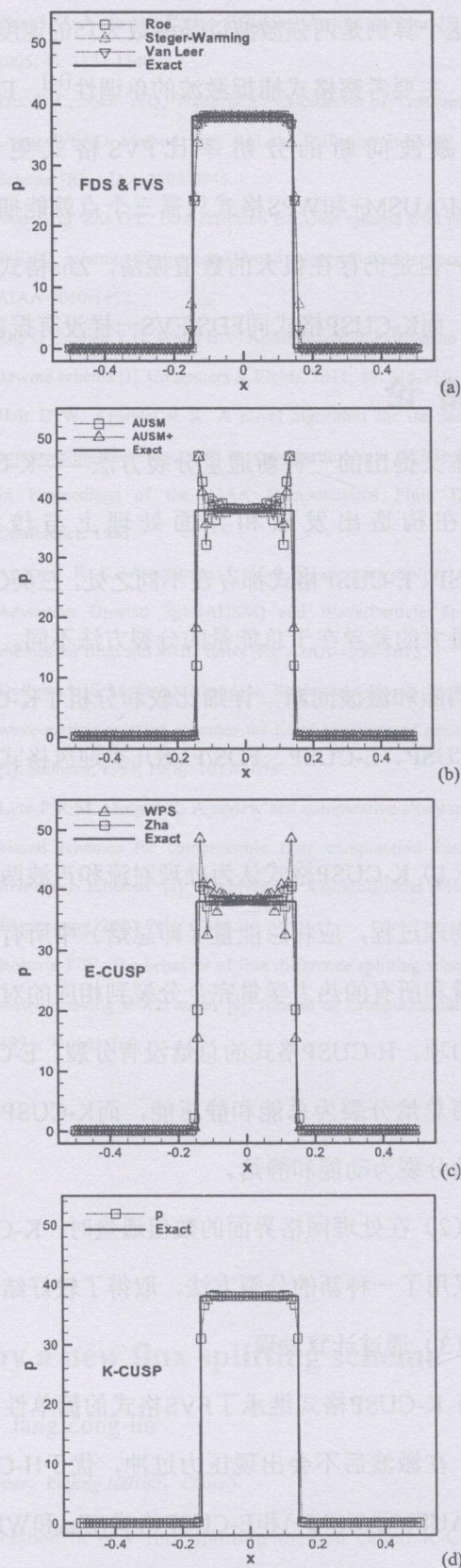


图5 高超声速碰撞流动的密度分布

Fig.5 Density distribution of the hypersonic colliding flow
(a) FDS/FVS, (b) H-CUSP, (c) E-CUSP, (d) K-CUSP

这个算例是两强激波以马赫数为15的速度对向传播,主要考察格式捕捉激波的单调性^[16]。FDS格式对激波间断的分辨率比FVS格式更好。AUSM/AUSM+和WPS格式只需三个点就能捕捉到激波,但是仍存在很大的数值振荡,Zha格式振荡较小,而K-CUSP格式同FDS/FVS一样没有振荡。

3 结论

本文提出的一种新通量分裂方法——K-CUSP格式在构造出发点和界面处理上与传统的H-CUSP、E-CUSP格式都存在不同之处,三类CUSP格式最大的差异在于总能量的分裂方法不同。针对接触间断和激波间断,详细比较和分析了K-CUSP与H-CUSP、E-CUSP、FDS/FVS几类迎风格式的异同。

(1) K-CUSP格式认为处理对流和声波两个不同的物理过程,应将总能量(即总焓)中所有的运动学量和所有热力学量完全分裂到相应的对流项和压力项。H-CUSP格式的总焓没有分裂,E-CUSP格式将总焓分裂为总能和静压能,而K-CUSP格式将总焓分裂为动能和静焓。

(2) 在处理网格界面的数值通量时,K-CUSP格式采用了一种新的分裂方法,取得了较好结果。

(3) 通过计算发现:

a) K-CUSP格式继承了FVS格式的简单性和稳健性,在激波后不会出现压力过冲,优于H-CUSP格式(AUSM/AUSM+)和E-CUSP格式(Zha和WPS格式)。

b) K-CUSP格式也继承了FDS格式的高分辨率,接触间断和激波间断的捕捉精度能达到Roe、AUSM+和WPS的精度,高于FVS格式和Zha格式。

对于运动接触间断的速度,AUSM/AUSM+和WPS格式存在很大的振荡,而K-CUSP格式不存在振荡。从整体来看,这几类迎风格式中K-CUSP格式具有较好的综合特性,但还需要进行更多的数值验证。

参考文献

- [1] Steger J L, Warming R F. Flux vector splitting of the inviscid gas dynamics equations with application to finite difference schemes [J]. *Journal of Computational Physics*, 1981, 40(2): 263-293.
- [2] Van Leer B. Flux vector splitting for Euler equations. In eighth international conference on numerical methods in fluid dynamics [C]. Berlin: Lecture Notes in Physics, 1982, Vol.170.
- [3] Hanel D, Schwane R, Seider G. On the accuracy of upwind schemes for the solution of the Navier-Stokes equations [R]. AIAA-1987-1105.
- [4] Hanel D, Schwane R. An implicit flux-vector splitting scheme for the computation of viscous hypersonic flow [R]. AIAA-1989-0274.
- [5] Coirier W J, Van Leer B. Numerical flux formulas for the Euler and Navier-Stokes equations: II. Progress in flux-vector splitting [R]. AIAA-1991-1566.
- [6] Roe P L. Approximate Riemann solvers, parameter vectors and difference schemes. *Journal of Computational Physics* [J], 1981, 43: 357-372.
- [7] Osher S, Solomon F. Upwind difference schemes for hyperbolic conservation laws. *Mathematical computations* [J], 1982, 158: 339-374.
- [8] Toro E F, Spruce M, Speares W. Restoration of the contact surface in the HLL-Riemann solver [J]. *Shock Waves*, 1994, 4: 25-34.
- [9] Peery K M, Imlay S T. Blunt-body flow simulations [R]. AIAA-1988-2904.
- [10] Quirk J J. A contribution to the great Riemann solver debate [R]. ICASE Report, 1992-64.
- [11] Liou M S, Steffen C J. A new flux splitting scheme. *Journal of computational physics* [J], 1993, 107:23-39.
- [12] Wada Y, Liou M S. An Accurate and Robust Splitting Scheme for Shock and Contact Discontinuities [R]. AIAA-1994-0083.
- [13] Liou M S. Progress Towards an Improved CFD Methods: AUSM+ [R]. AIAA-1995-1701.
- [14] Liou M S. A Sequel to AUSM: AUSM+. *Journal of Computational Physics* [J], 1996, 129: 364-382.
- [15] Liou M S. Ten Years in the Making-AUSM-Family [R]. AIAA-2001-2521.
- [16] Liou M S. A sequel to AUSM, Part II: AUSM+-up for all speeds. *Journal of Computational Physics* [J], 2006, 214:137-170.

- [17] Kim K H, Lee J H, Rho O H. An improvement of AUSM schemes by introducing the pressure-based weight functions [J]. *Computers and Fluids*, 1998, 27(3): 311-346.
- [18] Kim K H, Kim C, Rho O H. Accurate computations of hypersonic flows using AUSMPW+ scheme and shock-aligned grid technique [R]. AIAA-1998-2442.
- [19] Kim K H, Kim C, Rho O H. Methods for the accurate computations of hypersonic flows I . AUSMPW+ scheme. *Journal of Computational Physics* [J], 2001, 174(1): 38-80.
- [20] Jameson A. Analysis and Design of Numerical Schemes for Gas Dynamics I: Artificial Diffusion, Upwind Biasing, Limiters and Their Effect on Accuracy and Multigrid Convergence in Transonic and Hypersonic Flow [J]. *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, 1995, 4: 171-218.
- [21] Jameson A. Analysis and Design of Numerical Schemes for Gas Dynamics II: Artificial and Discrete Shock Structure. *International Journal of Computational Fluid Dynamics* [J], 1995, 5: 1-38.
- [22] Edwards J R. A Low-Diffusion Flux-Splitting Scheme for Navier-Stokes Calculations [R]. AIAA-1995-1703.
- [23] Edwards J R. A Low-Diffusion Flux-Splitting Scheme for Navier-Stokes Calculations [J]. *Computer & Fluids*, 1997, 6: 635-659.
- [24] Zha G C, Bilgen E. Numerical Solutions of Euler Equations by Using a New Flux Vector Splitting Scheme [J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* [J], 1993, 17: 115-144.
- [25] Zha G C. Numerical Tests of Upwind Scheme Performance for Entropy Condition [J]. AIAA. 1999, 37: 1005-1007.
- [26] Zha G C. Comparative Study of Upwind Scheme Performance for Entropy Condition and Discontinuities [R]. AIAA-1999-3348.
- [27] Zha G C, Hu Z J. Calculation of Transonic Internal Flows Using an efficient High Resolution Upwind Scheme [J]. AIAA, 2004, 42(2): 205-214.
- [28] Zha G C. A Low Diffusion Efficient Upwind Scheme [J]. AIAA, 2005, 43: 1137-1140.
- [29] Zha G C, Shen Y Q, Wang B Y. Calculation of Transonic Flows Using WENO Method with a Low Diffusion E-CUSP Upwind Scheme [R]. AIAA-2008-0745.
- [30] Shen Y Q, Zha G C. Low diffusion E-CUSP scheme with high order WENO scheme for preconditioned Navier-Stokes equations [R]. AIAA-2010-1452.
- [31] Zha G C, Shen Y Q, Wang B Y. An improved low diffusion E-CUSP upwind scheme [J]. *Computers & Fluids*, 2011, 48: 214-220.
- [32] Halt D W, Agarwal R K. A novel algorithm for the solution of compressible Euler equations in wave/particle split (WPS) form [R]. In *Proceedings of the AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*, 1993.
- [33] Agarwal R K, Augustinus J, Halt D. A comparative study of Advection Upwind Split(AUSM) and Wave/Particle Split(WPS) schemes for fluid and MHD flows [R]. AIAA-1999-3613.
- [34] Deshpande S M, Balakrishnan N, Raghurama Rao S V. PVU and wave-particle splitting schemes for Euler equations of gas dynamics [J]. *Sadhana*, 1994, 19(6): 1027-1054.
- [35] Lyra P R M, Morgan K. A review and comparative study of upwind biased schemes for compressible flow computation Part I: 1-D first-order schemes [J]. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 2000, 7(1): 19-55.
- [36] Roberts T W. The behavior of flux difference splitting schemes near slowly moving shock waves [J]. *Journal of Computational Physics*, 1994, 90: 141-160.

Numerical solutions of Euler equations by a new flux splitting scheme

Li Xin-dong, Hu Zong-min, Jang Zong-lin

(*Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China*)

Abstract: According to the idea of the advection upstream splitting method, a new flux splitting method called K-CUSP is proposed in this paper. The greatest difference between K-CUSP and two traditional CUSP schemes, namely H-CUSP and E-CUSP, is the splitting of total energy: all kinematic quantities and all thermodynamic quantities should be separately split into convective term and pressure term by K-CUSP scheme. Numerical tests indicate that: (1) K-CUSP scheme inherits the simplicity and robustness of FVS scheme. There is no pressure overshoot after shock and no non-physical oscillations, which is better than AUSM/AUSM+ and WPS schemes. (2) K-CUSP scheme also inherits the resolution of FDS scheme, without entropy fix. Contact discontinuity and shock

wave resolution is almost the same with FDS schemes, which is better than FVS schemes. However, the velocity of contact discontinuity in AUSM/AUSM+ and WPS schemes exist large oscillation, while new scheme does not.

Key words: flux splitting; mixing upwind scheme; AUSM scheme; K-CUSP scheme