

# 基于非结构网格的可压缩多介质流体的 WENO 求解方法

赵文康, 郑洪伟

中国科学院力学研究所高温气体动力学国家重点实验室, 北京海淀区 100190

**摘要** 本文发展了基于非结构网格的可压缩多介质流体的高精度求解器。三阶精度 WENO 有限体积法用于离散三角形网格单元。欧拉方程和关于物性参数的对流方程组成的准守恒形式方程组作为模型方程; 为使方程组封闭, 状态方程采用了刚性气体状态方程。与基于结构化网格的 WENO 格式沿一个方向扩展模板不同, 基于非结构化网格的 WENO 格式向周围所有方向进行扩展, 并对各个模板上的低阶重构函数进行加权获取高阶精度。另外, 这些权重系数跟每个单元的几何和拓扑信息有关系, 不能像结构化网格下可以写出解析表达式。在重构 P2 过程中, 采用加权最小二乘重构, 使得该算法鲁棒性更好; 在求解 P1 重构 P2 的线性权重的过程中, 直接推导出了系数矩阵的逆矩阵的代数表达式, 避免了数值求逆矩阵的运算, 提高了计算效率, 也使得算法更加鲁棒。多个数值试验表明, 该算法可以获得高阶精度结果, 同时在物质界面附近不会出现压力和速度的振荡。

**关键词:** 可压缩多介质流体、WENO 有限体积法、非结构网格、高阶精度

## 简介

可压缩多介质流体的数值模拟是计算流体力学领域重要的研究内容之一, 许多流体力学问题的研究都涉及到可压缩多介质流体, 如激波在不同介质中的传播、发动机中燃料与气体的混合燃烧、爆轰波中的强激波和化学反应流、液体中气泡的变形与坍塌、水下爆炸等。相对于单介质流体, 在可压缩多介质流体中, 不同介质之间存在着复杂的动态界面。同时, 这些不同介质之间存在着高密度比、高压比以及强间断等。要在实验里快速获得动态的流场数据是很困难的。因此, 开展可压缩多介质流体的数值计算具有很高的理论意义和工程价值。

对于可压缩多介质流体的数值计算, 国内外有很多研究。从上个世纪 70 年代至今, 许多学者提出了不同的方法用于多介质流体的计算[1-7], 常见的有 VOF 方法、Level set 方法和 Ghost Fluid 方法等。Abgrall[8], Shyue[4]等通过物质界面两侧的压力和速度平衡的假设推导出了  $\gamma$  的演化方程模型。

虽然上述方法可以抑制间断附近的数值振荡[9-11], 但文献中很多采用两阶精度

计算算法, 精度较低, 数值耗散较大, 物质界面容易被抹平, 流场中的小尺度结构也容易被掩盖掉。为了获得准确的计算结果, 一种方法是将网格自适应与传统的计算格式相结合[12-14]; 另一种方法采用高阶精度数值算法, 在较少的计算网格中也能获得较为准确的流场信息。过去的十几年中, 高阶精度数值方法领域发展迅速[15, 16], 很多高阶精度方法相继提出, 例如 ENO/WENO 方法[17], DG 方法[18], 谱方法[19]等; 进而, 发展可压缩多介质流体的高精度求解器成为多介质流体计算中的一个热点。此外, 随着计算问题的几何外形越来越复杂, 传统的结构网格离散方法已经难以生成令人满意的计算网格, 而非结构网格优越的几何灵活性可以适应任意复杂几何外形。为了能用于复杂几何外形多介质流体问题的计算, 基于非结构网格的求解器具有更大的工程应用价值。因而, 本文将开展基于非结构网格的可压缩多介质流体高阶精度求解方法的研究。

在上文提到的各种高阶精度算法中, WENO 格式在求解含有激波等强间断的问题中获得了巨大的成功[20]。ENO 格式首先是由 Harten[21]提出来的, 之后 Liu[17]和 Jiang[22]等人对 ENO 格式进行改进, 提出了

WENO 格式。WENO 格式的主要思想是利用对各个局部模板上的低阶重构函数进行加权获取高阶精度。在光滑区，能够获得高阶精度结果；在间断附近，通过自动调整权系数，可以无振荡的捕捉间断。虽然 WENO 格式在求解含有激波单一介质流体的计算中获得了巨大的成功[20]，但是在可压缩多介质流场中的应用并不多，尤其是非结构网格。在非结构网格中，WENO 格式的一个关键步骤是如何在复杂的拓扑结构下得到比较鲁棒的高阶重构。现以 3 阶精度 WENO 重构为例，阐述两种不同的重构方法。Friedrich[23] 提出在每一个小的模板上都重构 P2，然后将所有的模板加权得到最终的 WENO 格式。按照该思路，最后的 WENO 重构精度不会高于每一个小模板上的重构的精度。Hu[24]等提出的另一种 WENO 重构在每一个小的模板上重构 P1，然后通过线性加权得到较高阶的 WENO 重构。Friedrich 提出的方法中重构需要更多的单元，非结构网格拓扑结构复杂，这样的重构使得算法效率较低，因本文而采用了 Hu 提出的 WENO 重构方法。

本文发展了基于非结构网格的可压缩多介质流体的三阶精度 WENO 有限体积法求解器。为了抑制间断附近的数值振荡，在高斯点处，对原始变量进行三阶 WENO 重构。与基于结构化网格的 WENO 格式沿一个方向扩展模板不同，基于非结构化网格的 WENO 格式向周围所有方向进行扩展，并对各个模板上的低阶重构函数进行加权获取高阶精度。另外，这些权系数跟每个单元的几何和拓扑信息有关系，不能像结构化网格下可以写出解析表达式。在重构 P2 过程中，采用加权最小二乘重构[25]，即在最小二乘法中，系数矩阵每行都乘以一个权重，该权重与当前单元到中心单元距离成反比。加权最小二乘重构使得算法鲁棒性更好；在求解 P1 重构 P2 的线性权重的过程中，直接推导出了系数矩阵的逆矩阵的代数表达式，避免了数值求逆矩阵的运算，提高了计算效率，也使得算法更加鲁棒。时间积分采用了多步的 Runge-Kutta 时间离散。近似黎曼求解器采用 HLLC 黎曼求解器[26, 27]。该求解器对于间断问题采用了近似的三波模型：左行波、

右行波和中间的接触间断，能够很好地求解接触间断。综上，本文发展了基于非结构网格的可压缩多介质流体的高阶精度 WENO 求解器，在间断附近无速度和压力的振荡，在光滑区能获得高阶精度结果，在非结构网格中鲁棒性好。

## 基本理论

### 2.1 控制方程

不考虑传热、粘性以及化学反应等的影响，描述多介质可压缩流体的方程为二维 Euler 方程，其形式为：

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

上式的矢量形式为： $\mathbf{u}_t + \nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ ，

其中  $\mathbf{F} = (\mathbf{f}, \mathbf{g})$

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{pmatrix}, \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(E+p) \end{pmatrix}, \mathbf{g} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ v(E+p) \end{pmatrix}$$

式中， $\rho$ ,  $u$ ,  $v$ ,  $p$  和  $E$  分别表示流体的密度， $x$  方向的速度分量， $y$  方向的速度分量，压力，以及单位体积上的总能量， $e$  表示流体单位质量的内能。假设多相流中的每一种流体都满足刚性气体的状态方程

$$p = (\gamma(\mathbf{x}, t) - 1)\rho e - \gamma(\mathbf{x}, t)\pi(\mathbf{x}, t) \quad (2)$$

与气体相关的参数满足的方程[4]为

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \Pi = 0 \quad (3)$$

上式中

$$\Pi = \begin{pmatrix} \beta \\ \theta \end{pmatrix}, \beta = \frac{1}{\gamma - 1}, \theta = \frac{\gamma \pi}{\gamma - 1}$$

此处， $\gamma$  为比热比， $\pi$  为材料常数，对于理想气体， $\pi = 0$ 。综上，可压缩多介质流体的控制方程为 (1) 和 (3) 组成的准守恒形式方程组。

## 2.2 WENO 重构

在该部分，我们将详细介绍在非结构网络上采用 WENO 有限体积法对控制方程(1)和(3)进行离散。

选取三角形的网格作为控制体，方程(1)的半离散有限体积格式可以写成

$$\frac{d}{dt} U_0(t) + \frac{1}{\Omega_0} \int_{\partial\Omega_0} F \cdot n ds = 0 \quad (4)$$

此处， $U_0$ 为  $u$  在单元 0 上的单元平均值， $n$  为三角形单元边界的单位外法向量。方程(4)中的线积分可以通过  $s$  个点的高斯积分进行离散

$$\int_{\partial\Omega_i} F \cdot n ds = |\partial\Omega_i| \sum_{j=1}^s \omega_j F_j \cdot n \quad (5)$$

其中， $s$  为高斯点的数目， $\omega_j$  为权重。在三阶 WNEO 重构中， $s = 2$ 。

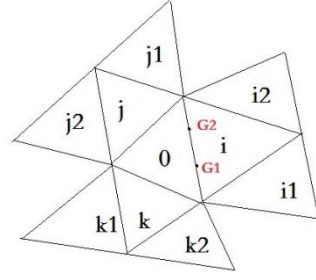


图1 WENO 重构的模板示意图

在三角形单元内进行 WENO 重构时，需要构造一个二次多项式  $p^2$ ，并要求  $p^2$  在模板中的所有单元内的积分值分别与单元平均值相等。三阶 WENO 重构的模板示意图如图 1 所示，共 10 个单元。文献[24]中采用了最小二乘的方法求  $p^2$ 。设重构的二次多项式(6)。

(6) 式中， $\xi = x - x_0$ ， $\eta = y - y_0$ 。对于单元  $i$ ，我们可以得到方程(7)。对于其他的 8 个单元，我们可以得到类似的关系式，将 9 个方程组成方程组(8)：

$$p^2(x, y) = U_0 + a\xi + b\eta + c\xi^2 + d\xi\eta + e\eta^2 = \lambda_0 U_0 + \lambda_i U_i + \dots + \lambda_9 U_{kb} \quad (6)$$

$$U_i - U_0 = a \left[ \int_i \xi d\Omega - \int_0 \xi d\Omega \right] + b \left[ \int_i \eta d\Omega - \int_0 \eta d\Omega \right] + d \left[ \int_i \xi^2 d\Omega - \int_0 \xi^2 d\Omega \right] + d \left[ \int_i \eta^2 d\Omega - \int_0 \eta^2 d\Omega \right] + e \left[ \int_i \xi\eta d\Omega - \int_0 \xi\eta d\Omega \right] \quad (7)$$

$$\begin{pmatrix} \int_i \xi d\Omega & \int_i \eta d\Omega & \int_i \xi^2 d\Omega & \int_i \xi\eta d\Omega & \int_i \eta^2 d\Omega \\ \int_j \xi d\Omega & \int_j \eta d\Omega & \int_j \xi^2 d\Omega & \int_j \xi\eta d\Omega & \int_j \eta^2 d\Omega \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \int_{k2} \xi d\Omega & \int_{k2} \eta d\Omega & \int_{k2} \xi^2 d\Omega & \int_{k2} \xi\eta d\Omega & \int_{k2} \eta^2 d\Omega \end{pmatrix}_{(9 \times 5)} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_i - U_0 \\ U_j - U_0 \\ U_k - U_0 \\ U_{i1} - U_0 \\ U_{i2} - U_0 \\ U_{j1} - U_0 \\ U_{j2} - U_0 \\ U_{k1} - U_0 \\ U_{k2} - U_0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

方程(8)中有 5 个未知数，9 个方程，可以通过最小二乘的方法求解。将方程左右都乘以系数矩阵的转置，可以得到：

$$A^T A \phi = A^T \psi \quad (9)$$

上式中有，

$$A = \begin{pmatrix} \int_i \xi d\Omega_i & \dots & \int_i \eta^2 d\Omega_i \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{k2} \xi d\Omega_i & \dots & \int_{k2} \eta^2 d\Omega_i \end{pmatrix}_{(9 \times 5)}, \phi = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix}, \psi = \begin{pmatrix} U_i - U_0 \\ U_j - U_0 \\ U_k - U_0 \\ U_{i1} - U_0 \\ U_{i2} - U_0 \\ U_{j1} - U_0 \\ U_{j2} - U_0 \\ U_{k1} - U_0 \\ U_{k2} - U_0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

与 Hu[24]的文献中不同, 本文采用了鲁棒性更好的加权最小二乘, 系数矩阵的每行乘以

一个权重:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \alpha_i \int_i \xi d\Omega_i & \alpha_i \int_i \eta d\Omega_i & \alpha_i \int_i \xi^2 d\Omega_i & \alpha_i \int_i \xi \eta d\Omega_i & \alpha_i \int_i \eta^2 d\Omega_i \\ \alpha_j \int_j \xi d\Omega_i & \alpha_j \int_j \eta d\Omega_i & \alpha_j \int_j \xi^2 d\Omega_i & \alpha_j \int_j \xi \eta d\Omega_i & \alpha_j \int_j \eta^2 d\Omega_i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{k2} \int_{k2} \xi d\Omega_i & \alpha_{k2} \int_{k2} \eta d\Omega_i & \alpha_{k2} \int_{k2} \xi^2 d\Omega_i & \alpha_{k2} \int_{k2} \xi \eta d\Omega_i & \alpha_{k2} \int_{k2} \eta^2 d\Omega_i \end{pmatrix}_{(9 \times 5)} \quad (11)$$

在 (11) 中, 权重反比于当前单元的形心到中心单元的形心的距离, 其具体形式为:

$$\alpha_i = \frac{1}{\sqrt{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2}} \quad (12)$$

该权重与单元的几何形状有关, 如果当前单元距离中心单元越远, 对应的权重也就越小。相对应的的重构方程也就变为新的形式:

$$\hat{A}^T \hat{A} \phi = \hat{A}^T \hat{\psi} \quad (13)$$

上式中, 二次多项式仅仅与网格的几何位置有关, 与解无关, 因而我们可以提前计算出相应的系数, 并存储起来。

在 WENO 重构中, 另一个重要的步骤是在局部模板上重构线性的多项式。如图 1 所示, 所有的可选模板共 9 个:  $S1=\{0, i, j\}$ ,  $S2=\{0, i, k\}$ ,  $S3=\{0, j, k\}$ ,  $S4=\{0, i, i1\}$ ,  $S5=\{0, i, i2\}$ ,  $S6=\{0, j, j1\}$ ,  $S7=\{0, j, j2\}$ ,  $S8=\{0, k, k1\}$ ,  $S9=\{0, k, k2\}$ 。在每一个模板内, 我们可以定义如下的线性多项式的形式:

$$p^1 = a^1 + b^1 \xi + c^1 \eta \\ = \sigma_0 U_0 + \sigma_1 U_i + \sigma_2 U_j \quad (14)$$

在每一个高斯点上, 例如  $G1$ , 我们可以寻找一组非负的线性权重  $\gamma_j$  使得 9 个线性多项式  $p^l$  满足

$$W(x, y) = \sum_{j=1}^9 \gamma_j p_j(x, y) \quad (15)$$

此处  $W(x, y)$  为  $p^2$  在高斯点处的值。为了使重构的解为所有候选模板的凸组合, 要求  $\gamma_j$  为非负, 对于抑制间断附近的振荡非常有效。对于  $\gamma_j$ , 有如下关系式:

$$\sum_{j=1}^9 \gamma_j = 1 \quad (16)$$

对于单元 0, 在二次多项式  $p^2$  中  $U_0$  的系数应该等于所有的线性多项式  $p^1$  中  $U_0$  的系数之和。将该方法应用到所有的 10 个单元并与方程 (5)、(15) 和 (16) 相结合, 这样可以得到关于  $\gamma$  的方程组:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} & a_{1,6} & a_{1,7} & a_{1,8} & a_{1,9} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{3,1} & 0 & a_{3,3} & 0 & 0 & a_{3,6} & a_{3,7} & 0 & 0 \\ a_{4,1} & a_{4,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{4,8} & a_{4,9} \\ 0 & 0 & 0 & a_{5,4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{6,5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{7,6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{8,7} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{9,8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{10,9} \end{pmatrix}_{(10 \times 9)} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \\ \gamma_7 \\ \gamma_8 \\ \gamma_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \\ \lambda_7 \\ \lambda_8 \\ \lambda_9 \end{pmatrix} \quad (17)$$

在方程 (17) 中, 所有的系数都只是网格有关的参数, 可以提前计算出来。我们选择方

程 (17) 中的前 8 个方程, 将方程重新写成如下的形式:

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{3,3} & 0 & 0 & a_{3,6} & a_{3,7} & 0 & 0 \\ a_{4,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{4,8} & a_{4,9} \\ 0 & 0 & a_{5,4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{6,5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{7,6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{8,7} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{9,8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{10,9} \end{pmatrix}_{(8 \times 8)} \begin{pmatrix} \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \\ \gamma_7 \\ \gamma_8 \\ \gamma_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_2 - \gamma_1 a_{3,1} \\ \lambda_3 - \gamma_1 a_{4,1} \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \\ \lambda_7 \\ \lambda_8 \\ \lambda_9 \end{pmatrix} \quad (18)$$

方程 (18) 常见的求解方法是直接对其系数矩阵求逆。之后, 结合方程 (16) 和 (17) 的前两个方程, 这样得到所有的  $\gamma$ 。然而, 在矩阵求逆的过程中, 往往出现系数矩阵的行列式为零导致计算失败。因而, 我们提前推导出 (18) 中系数矩阵的逆矩阵的代数表达式, 这样避免了程序中方程求逆的运算。方程 (18) 可以重新写作:

$$\begin{pmatrix} \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \\ \gamma_7 \\ \gamma_8 \\ \gamma_9 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \lambda_2 - \gamma_1 a_{3,1} \\ \lambda_3 - \gamma_1 a_{4,1} \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \\ \lambda_7 \\ \lambda_8 \\ \lambda_9 \end{pmatrix} \quad (19)$$

其中,  $B$  的表达式为:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{a_{4,2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{a_{4,8}}{a_{4,2}a_{9,8}} & -\frac{a_{4,9}}{a_{4,2}a_{10,9}} \\ \frac{1}{a_{3,3}} & 0 & 0 & 0 & -\frac{a_{3,6}}{a_{3,3}a_{7,6}} & -\frac{a_{3,7}}{a_{3,3}a_{8,7}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_{5,4}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a_{6,5}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a_{7,6}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a_{8,7}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a_{9,8}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a_{10,9}} \end{pmatrix} \quad (20)$$

然而，上述步骤不能保证所有的  $\gamma$  值都是非负的。进而采用 Hu 的文献中重组模板的方法。例如，对于边界  $i$  上的第一个高斯点，我们可以将 9 个模板重新分组为 3 个新的模板： $S_1^{new} = \{S_2, S_4, S_5\}$ ,  $S_2^{new} = \{S_3, S_6, S_7\}$ ,  $S_3^{new} = \{S_1, S_8, S_9\}$ 。

为了度量不同模板的振荡幅度，定义如下形式的振荡因子和非线性权重[24]:

$$\omega_j = \frac{o_i}{\sum_i o_i}, o_i = \frac{\gamma_i}{(\varepsilon + IS_i)^2} \quad (21)$$

上式中， $\omega_j$  代表非线性权重

在 WENO 重构过程中，我们对原始变量采用重构。时间积分采用了多步 Runge-Kutta 时间离散，CFL 数为 0.3。

$$\begin{cases} \mathbf{U}^{(1)} = \mathbf{U}^n + \Delta t R(\mathbf{U}^n) \\ \mathbf{U}^{(2)} = \frac{3}{4}\mathbf{U}^n + \frac{1}{4}[\mathbf{U}^{(1)} + \Delta t R(\mathbf{U}^{(1)})] \\ \mathbf{U}^{n+1} = \frac{1}{3}\mathbf{U}^n + \frac{2}{3}[\mathbf{U}^{(2)} + \Delta t R(\mathbf{U}^{(2)})] \end{cases} \quad (22)$$

### 2.3 HLLC 近似黎曼求解器

在单元的边界上，状态量的定义并不唯一，需要使用近似黎曼求解器求解界面上的通量。有许多不同的求解器，例如 Godunov,

LF, Roe, Engquist-Osher, HLL 和 HLLC 等。HLLC 求解器将解近似为三个波：左行波，右行波和中间的接触间断。该求解器对于接触间断的求解有非常好的结果，因而本文可以采用 HLLC 求解器。在非结构网格中，HLLC 通量可以写作如下的形式[5]:

$$F^{HLLC} = \begin{cases} F^{*L} & 0 \leq s_m \\ F^{*R} & s_m < 0 \end{cases} \quad (23)$$

上标的通量定义如下:

$$\begin{cases} F^{*L} = F(\mathbf{U}^L, \vec{n}) + s_L(\mathbf{U}^{*L} - \mathbf{U}^L) \\ F^{*R} = F(\mathbf{U}^R, \vec{n}) + s_R(\mathbf{U}^{*R} - \mathbf{U}^R) \end{cases} \quad (24)$$

其中，

$$\begin{cases} s_L = \min(u_n^L - a^L, \tilde{q} - \tilde{c}) \\ s_R = \max(u_n^R - a^R, \tilde{q} + \tilde{c}) \end{cases} \quad (25)$$

上式中， $a^L, a^R$  和  $\tilde{a}$  分别是左行声速、右行声速和平均声速。在刚性气体状态方程下，声速的表达式为:

$$a = \sqrt{\gamma \frac{p + \pi}{\rho}} \quad (26)$$

为了离散方程 (3)，将其写成另外一种形式：

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} + \nabla \cdot \Lambda - \Pi \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (27)$$

数值通量为：

$$\Lambda = \mathbf{u} \cdot \Theta \quad (28)$$

这样，HLLC 通量可以很容易地应用于方程(3)中。对流方程中的 HLLC 格式的具体表达式可参考相关文献。

## 数值算例

按照上述算法，本文计算了六个不同的可压缩多介质流体算例，分别为二维涡演化算例，气-气界面对流问题，气-气激波管问题，界面平移问题，水下气泡爆炸问题和圆柱容器内激波与物质界面相互作用问题。程序采用 fortran 编写，使用 easymesh 划分三角形网格。

### 3.1 二维涡演化算例

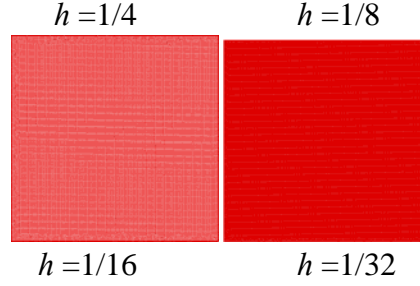
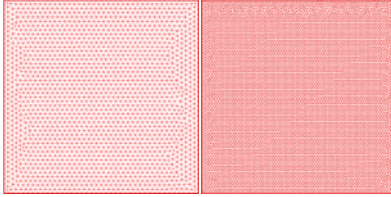


图 2 采用 easymesh 得到的三角形网格

二维涡演化问题[20]是一个用来验证不同算法精度的经典算例。该问题为单相流动，流场中只包含一种流体。平均流动为 $\{\rho, u, v, p\}=\{1,1,1,1\}$ ，在平均流动中加入等熵扰动，扰动量为：

$$(\delta u, \delta v) = \frac{\varepsilon}{2\pi} e^{0.5(1-r^2)} (-\bar{y}, \bar{x}) \quad (29)$$

$$\delta T = -\frac{(\gamma-1)\varepsilon^2}{8\gamma\pi^2} e^{1-r^2} \quad (30)$$

此处，涡的强度为 $\varepsilon = 5$ ，比热比为 1.4。计算域为 $(0, 10) \times (0, 10)$ ，为了节省计算时间，我们选取的计算时间为 $t = 0.5$ ，选取的计算网格如图 2 所示。对密度进行误差分析，结果见表 1。

表 1 精度分析（密度）

网格尺度	$L_1$ error	$L_1$ order	$L_2$ error	$L_2$ order	$L_\infty$ error	$L_\infty$ order
1/4	3.75E-4	—	1.26E-3	—	1.84E-2	—
1/8	4.85E-5	2.95	2.06E-4	2.62	5.25E-3	1.81
1/16	4.54E-6	3.42	1.82E-5	3.50	4.16E-4	3.66
1/32	4.70E-7	3.27	1.38E-6	3.73	2.52E-5	4.04

由表 1 可以发现，随着网格数量的增加，计算误差越来越小；精度分析表明，该方法可以得到三阶精度，说明该求解器可以获得高阶精度结果。

### 3.2 气-气界面对流问题

该问题为一维问题，两种不同气体沿着  $x$  方向对流，初始条件参见文献[28]。由于本文主要着眼于二维非结构网格的多介质

流体计算，因而采用二维的程序进行计算。计算域上下和左右边界采用周期性边界条件，计算结束后，沿  $y = 0.1$  取计算结果。图 4 表示计算时长为  $t = 1.0$  时，两种不同网格下的结果，从图中可以看出，物质界面两侧不会存在振荡。

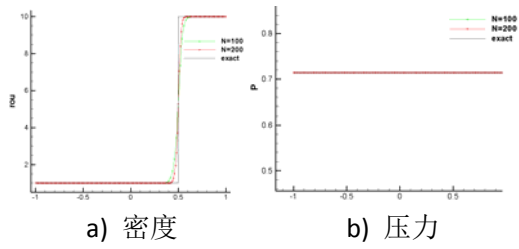


图 4 物质界面对流情况 ( $t=1.0$ )

### 3.3 气-气激波管问题

我们测试两种不同气体组成的一维气-气 Riemann 问题[28]。物质界面初始位置位于  $x = 0$  处，图 5 分别给出了  $t = 1.6$  时刻的密度，速度，压强以及比热比的结果，从图中可以看到，该方法能够很好地捕捉物质界面，在物质界面的两侧不会出现压力和速度的振荡。

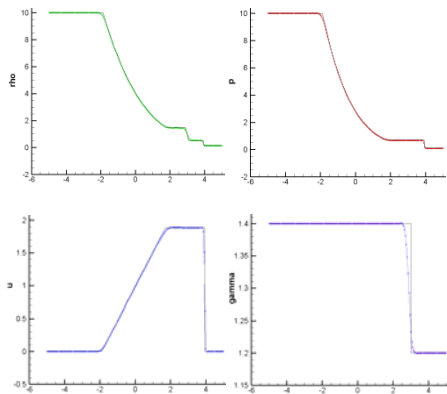


图 5 气-气 Riemann 问题（实线为精确解，点划线为数值解）

### 3.4 界面平移问题

在本算例中，计算域为扇形，扇形的内径和外径分别为 1 和 2，如图所示。在域内有另一种流体，该流体呈圆形，圆形位于  $(2.9, 2.9)$ ，半径为  $r_0 = 0.16$ 。两种流体都满足刚性气体状态方程。网格的尺度为 0.01，计算时长  $t = 0.36$ 。图 6 表示  $t = 0$  时刻和  $t = 0.36$  时刻的物质界面位置图。如前所述，圆形的界面沿着  $x-y$  轴的对角线匀速运动，从图中可以清晰地看到  $t = 0.36$  时物质界面仍然保持圆形，并且移动的位置与理论分析的结果一致。为了使结果更加清晰，我们画出了两个时刻的密度分布图。从图 7 中可以看到锐利的物质界面。除此之外，我们给出了压力和速度的分布图，从图中可以看出，

该方法能够很好地捕捉到物质界面，并且界面两侧的压力和速度都没有振荡。

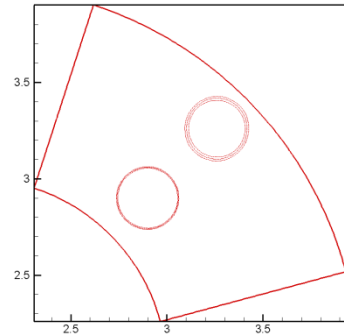


图 6 界面平移问题

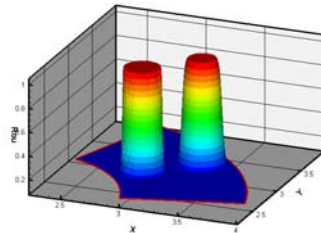
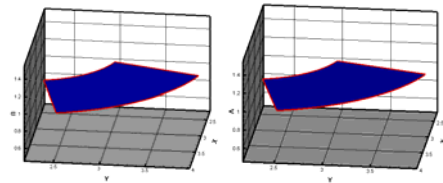


图 7 界面平移问题密度分布



a)  $x$  方向速度    b)  $y$  方向速度  
图 8 界面平移问题速度分布图

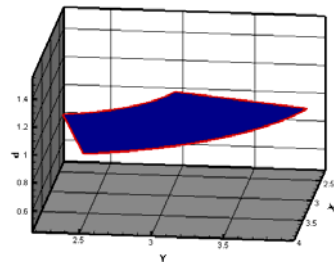


图 9 界面平移问题压力分布

### 3.5 水下气泡爆炸问题

该问题为二维轴对称问题，由于初始的压力不同，气泡内部为高压区，静止的气泡在水下会爆炸。计算区域为  $(0, 1) \times (0, 1)$  和网格如图 10 所示，气泡的半径为  $r_0 = 0.2$ ，气泡外被水包围，气泡和水的初始状态参见 [28]。



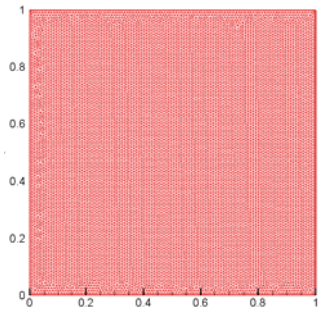
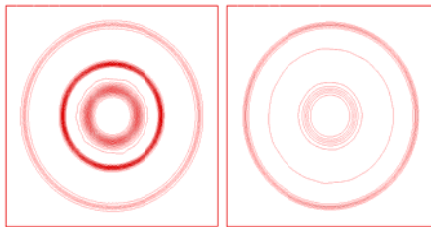
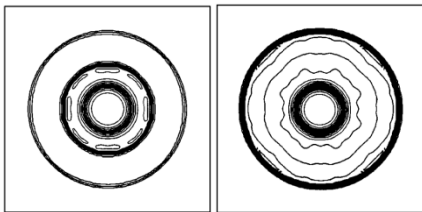


图 10 水下爆炸问题的计算域和网格划分情况

计算网格尺度为  $h = 0.01$ ，网格如图所示，计算时长为  $t = 0.058$ 。气泡在水下爆炸时，在水气交界面上会产生一道向外传播的激波和向内传播的膨胀波，物质界面位于二者中间。图 11 给出了密度和压力的等值线图，将本文的结果与 Shyue 中采用相同的控制方程和单元网格尺度的结果进行标记，可见本文可以准确捕捉激波和物质界面的位置，高阶精度结果比低阶精度的结果要好很多；此外，从图中截取  $y = 0.5$  线上的值，从密度和压力的剖面图中可以发现，本文的结果与文献[4]中的参考解吻合地很好，因此利用该方法进行可压缩多介质流体的数值模拟是有效的。



a) 密度图 b) 压力图



c) 密度图 d) 压力图

图 11 密度和压力的比较 ( $t = 0.058$ )

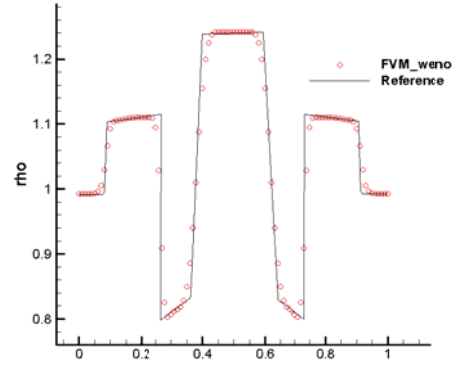


图 12  $t = 0.058$  时刻，沿  $y = 0.5$  直线上的密度与参考解的比较

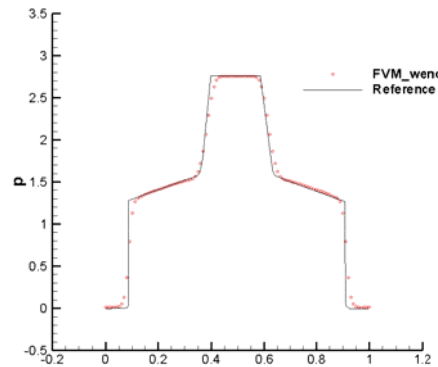


图 13  $t = 0.058$  时刻，沿  $y = 0.5$  直线上的压力与参考解的比较

### 3.6. 圆柱容器内激波和物质界面相互作用

一半径为 0.8 的圆柱形容器初始时刻位于  $(0, 0)$  位置，初始时刻，两种理想气体（空气和氦气）分别位于容器的左右两侧，物质界面位于  $x = 0$  的位置。容器突然以速度  $u = 1$  向右垂直于物质界面运动，在左侧边界会形成一个弧形的激波，在右侧边界会形成一个膨胀波。

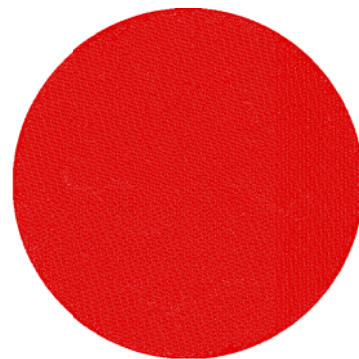


图 14 计算域以及计算网格示意图

该算例中存在空气中右行的半圆形激波，氦气中左行的膨胀波和中间的物质界面。

如图 15 所示, 最开始在左侧边界形成激波, 该激波向右传播并与左行的物质界面相作用; 之后, 激波继续向右运动, 在  $t = 0.50$  时刻, 激波在氦气内形成一个弓形激波, 如图 16 所示, 右行激波同时导致物质界面开始向右移动。当右行的激波遇到容器的壁面之后, 就会反射回来; 反射回来的激波会重新与物质界面碰撞并再次进入空气中。通过图 17 ( $t = 0.75$ ), 清晰地看到该过程。随着时间推进, 物质界面开始卷起, 出现 Richtmyer-Meshkov (RM) 不稳定性现象。此时, 反射激波位于物质界面的左侧。通过图 18 ( $t = 1.0$ ) 可以看到该过程; 并且, 由于 RM 不稳定性产生的小尺度结构也可以在图中清晰地观察到。可见, 该方法能够高分辨率无振荡的计算复杂流场。

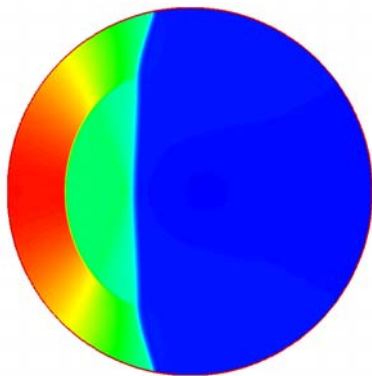


图 15  $t = 0.25$ 时刻密度云图

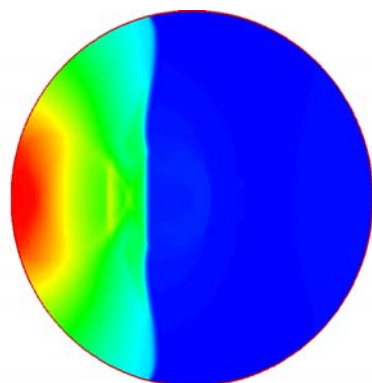


图 16  $t = 0.50$ 时刻密度云图

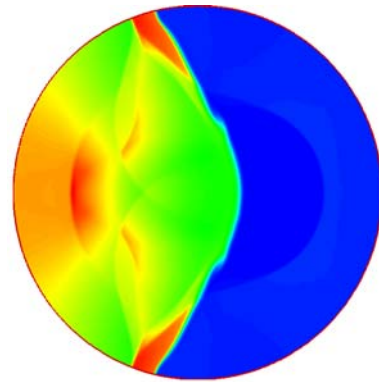


图 17  $t = 0.75$ 时刻密度云图

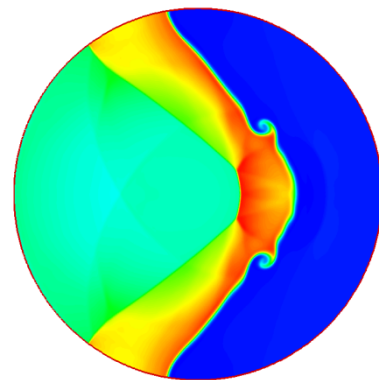


图 18  $t = 1.0$ 时刻密度云图

## 结论

本文发展了基于非结构网格的可压缩多介质流体的高精度 WENO 有限体积方法求解器。三阶精度 WENO 有限体积法用于离散三角形网格单元, 欧拉方程和关于物性参数的对流方程组成的准守恒形式方程组作为模型方程; 状态方程采用了刚性气体状态方程。重构二次多项式过程中, 采用加权最小二乘重构; 由低阶重构到高阶重构时, 直接推导出了系数矩阵逆矩阵的代数表达式, 避免了数值求逆矩阵的运算, 提高了计算效率, 也使得算法更加鲁棒。多个数值试验表明, 该算法可以获得高阶精度结果, 同时在物质界面附近不会出现压力和速度的振荡。多个数值算例表明该算法在间断附近无速度和压力的振荡, 在光滑区能获得高阶精度结果, 在非结构网格中鲁棒性好。

参考文献:

- [1] C. W. Hirt and B. D. Nichols, "Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries," *Journal of computational physics*, vol. 39, pp. 201-225, 1981.
- [2] R. P. Fedkiw, T. Aslam, B. Merriman, and S. Osher, "A non-oscillatory Eulerian approach to interfaces in multimaterial flows (the ghost fluid method)," *Journal of computational physics*, vol. 152, pp. 457-492, 1999.
- [3] S. Osher and J. A. Sethian, "Fronts propagating with curvature-dependent speed: algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations," *Journal of computational physics*, vol. 79, pp. 12-49, 1988.
- [4] K.-M. Shyue, "An efficient shock-capturing algorithm for compressible multicomponent problems," *Journal of computational physics*, vol. 142, pp. 208-242, 1998.
- [5] H. Zheng, C. Shu, and Y. Chew, "An object-oriented and quadrilateral-mesh based solution adaptive algorithm for compressible multi-fluid flows," *Journal of computational physics*, vol. 227, pp. 6895-6921, 2008.
- [6] W. Li and Y.-X. Ren, "High - order k - exact WENO finite volume schemes for solving gas dynamic Euler equations on unstructured grids," *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 70, pp. 742-763, 2012.
- [7] K. Xu, "BGK-based scheme for multicomponent flow calculations," *Journal of computational physics*, vol. 134, pp. 122-133, 1997.
- [8] R. Abgrall, "How to prevent pressure oscillations in multicomponent flow calculations: a quasi conservative approach," *Journal of computational physics*, vol. 125, pp. 150-160, 1996.
- [9] S. Karni, "Multicomponent flow calculations by a consistent primitive algorithm," *Journal of computational physics*, vol. 112, pp. 31-43, 1994.
- [10] R. Saurel and R. Abgrall, "A multiphase Godunov method for compressible multifluid and multiphase flows," *Journal of computational physics*, vol. 150, pp. 425-467, 1999.
- [11] V. T. Ton, "Improved shock-capturing methods for multicomponent and reacting flows," *Journal of computational physics*, vol. 128, pp. 237-253, 1996.
- [12] H. Zheng, C. Shu, Y. Chew, and N. Qin, "A solution adaptive simulation of compressible multi - fluid flows with general equation of state," *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 67, pp. 616-637, 2011.
- [13] R. Nourgaliev, T.-N. Dinh, and T. Theofanous, "Adaptive characteristics-based matching for compressible multifluid dynamics," *Journal of computational physics*, vol. 213, pp. 500-529, 2006.
- [14] C. Wang, H. Tang, and T. Liu, "An adaptive ghost fluid finite volume method for compressible gas-water simulations," *Journal of computational physics*, vol. 227, pp. 6385-6409, 2008.
- [15] Z. Wang, "High-order methods for the Euler and Navier-Stokes equations on unstructured grids," *Progress in Aerospace Sciences*, vol. 43, pp. 1-41, 2007.
- [16] J. A. Ekaterinaris, "High-order accurate, low numerical diffusion methods for aerodynamics," *Progress in Aerospace Sciences*, vol. 41, pp. 192-300, 2005.
- [17] X.-D. Liu, S. Osher, and T. Chan, "Weighted essentially non-oscillatory schemes," *Journal of computational physics*, vol. 115, pp. 200-212, 1994.

- [18] B. Cockburn, G. E. Karniadakis, and C.-W. Shu, *The development of discontinuous Galerkin methods*: Springer, 2000.
- [19] Z. J. Wang, "Spectral (finite) volume method for conservation laws on unstructured grids. basic formulation: Basic formulation," *Journal of computational physics*, vol. 178, pp. 210-251, 2002.
- [20] C.-W. Shu, *Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws*: Springer, 1998.
- [21] A. Harten, B. Engquist, S. Osher, and S. R. Chakravarthy, "Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes, III," *Journal of computational physics*, vol. 71, pp. 231-303, 1987.
- [22] G.-S. Jiang and C.-W. Shu, "Efficient implementation of weighted ENO schemes," *Journal of computational physics*, vol. 126, pp. 202-228, 1996.
- [23] O. Friedrich, "Weighted essentially non-oscillatory schemes for the interpolation of mean values on unstructured grids," *Journal of computational physics*, vol. 144, pp. 194-212, 1998.
- [24] C. Hu and C.-W. Shu, "Weighted essentially non-oscillatory schemes on triangular meshes," *Journal of computational physics*, vol. 150, pp. 97-127, 1999.
- [25] C. Ollivier-Gooch and M. Van Altena, "A high-order-accurate unstructured mesh finite-volume scheme for the advection-diffusion equation," *Journal of computational physics*, vol. 181, pp. 729-752, 2002.
- [26] E. F. Toro, M. Spruce, and W. Speares, "Restoration of the contact surface in the HLL-Riemann solver," *Shock waves*, vol. 4, pp. 25-34, 1994.
- [27] P. Batten, N. Clarke, C. Lambert, and D. Causon, "On the choice of wavespeeds for the HLLC Riemann solver," *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 18, pp. 1553-1570, 1997.
- [28] E. Johnsen and T. Colonius, "Implementation of WENO schemes in compressible multicomponent flow problems," *Journal of computational physics*, vol. 219, pp. 715-732, 2006.

## **RESEARCH A Unstructured WENO Method for Compressible Multi-fluids Flow**

ZHAO Wengeng, ZHENG Hongwei

State Key Laboratory of High Temperature Gas Dynamics, Institute of Mechanics, CAS, No.15 Beisihuanxi Road, Beijing 100190, China

**Abstract** A high-order accurate WENO finite volume method based on unstructured grids for compressible multi-fluids flow is proposed in this paper. The third order accuracy WENO finite volume method based on triangle cell is used to discrete compressible Euler equation and the stiffened equation of state is adopted. The primitive variables instead of the conservative variables are reconstructed. The weighted least square method, which is more robust than the least square method, is used in the reconstruction. During the procedure of solving linear weights for WENO, we deduce the

detail algebraic expression of inverse matrix of coefficient in advance so that the procedure of matrix inversion is avoided. Several examples are presented to examine this algorithm. Numerical results show that there is no spurious oscillation of velocity and pressure across the interface and high-order accurate result can be achieved.

**Key words** Compressible Multiphase Flows, WENO Finite Volume Method, High-Order Accuracy, Unstructured Grids