粘弹性条带中的缺陷不敏感现象*

陈磊† 陈少华

（中国科学院力学研究所， 100190 北京）

摘要 自然界的一类生物材料比如骨头、牙齿和贝壳等在长期的演化历史中获得了非常令人瞩目的力学特性，缺陷不敏感就是其中一种。目前弹性结构中的缺陷不敏感现象已经得到了相当多的研究与讨论，但是与时间相关的粘弹性系统的缺陷不敏感特性还鲜有报道，而对于粘弹性性质明显的生物材料，这方面的研究又尤为重要。本文致力于研究一个含有与裂纹的受拉伸粘弹性条带的缺陷不敏感特性，分别基于 Griffith 模型与 Dugdale 模型给出了粘弹性条带缺陷不敏感宽度的解析表达，揭示了粘弹性材料缺陷不敏感的影响因素。

关键词：生物材料, 缺陷不敏感, 断裂力学, 粘弹性, 加载速率

一、引言

骨头、牙齿、贝壳等一类生物材料在长期的演化历程中体现出跨越宏观、微观与纳观的多分级结构，这些微结构的功能性令人惊奇。科学家们发现，当这种微结构的特征尺度足够小的时候，材料会出现缺陷不敏感的现象[1,2]。这种现象引起了研究人员的广泛关注，它不仅可以解释骨头、牙齿等生物材料的超高断裂强度，也可以解释壁虎、树蛙等生物的惊人粘附能力[3]。

H.Gao等人在 2005 年研究了一个弹性微尺度条带的断裂问题[2]，H.Yao等人在 2006 年用弹性粘附模型研究了壁虎的鲁棒粘附[4]。在实验上Kumar等人用纳米级薄片拉伸实验验证了缺陷不敏感[5]，分子动力学模拟也得出了类似的结果[5]。

二、模型

考虑一个宽 $2W$ 含 $2a$ 长中心裂纹的粘弹性条带受随时间变化的均匀远场拉伸 $\sigma_\infty f_\sigma(t)$。假设条带的粘弹性本构模型为标准线性固体，则单轴拉伸的微分型本构与积分本构分别可以表达为

$$\sigma + p_1\dot{\sigma} = q_0\varepsilon + q_1\dot{\varepsilon} \ , \tag{1}$$

$$\varepsilon(t) = J(t) * d\sigma(t) = \sigma(0)J(t) + \int_{0^+}^{t} J(t-\tau)\frac{\partial\sigma(\tau)}{\partial\tau}d\tau \ , \tag{2}$$

三、Griffith 模型

* 国家自然科学基金：(10972220、10732050、11021262).

†报告人简介：1972-，固体力学，研究员：chenshaohua72@gmail.com

基于 Griffith 模型，应用粘弹性-弹性的对应原理，得到了粘弹性的能量释放率的解析表达，若要材料发生缺陷不敏感，需要令粘弹性的能量释放率始终小于材料的断裂能 Γ，于是我们得到了粘弹性材料的缺陷不敏感条件：

$$\frac{\left[(1-\beta)\sigma_s\sqrt{\pi a}F(\beta)\right]^2 f_\sigma(t)}{\kappa}\mathrm{L}^{-1}\left[\frac{\bar{f}_\sigma(s)(1+p_1 s)}{(q_0+q_1 s)}\right]\le\Gamma \tag{3}$$

考虑对任意的初始裂纹长度上述条件都成立，则进一步得出缺陷不敏感宽度的解析表达

$$\frac{W_{ft}}{l_{ft}}=\min_{0\le\beta<1}\left(\frac{\kappa}{\pi\beta(1-\beta)^2F^2(\beta)}\right)\frac{1}{f_\sigma(t)\mathrm{L}^{-1}\left[\frac{\bar{f}_\sigma(s)(1+p_1 s)}{(1+q_1 s/q_0)}\right]}\Bigg|_{t=t_0} \tag{4}$$

四、Dugdale 模型

在Griffith模型的基础上，考虑裂纹尖端附近的内聚力区与张开位移，我们建立了粘弹性条带断裂的Dugdale模型，内聚力区长度为l，应用扩展的对应原理[6]，可以得到粘弹性条带裂纹张开位移(COD)的解析表达，若要材料发生缺陷不敏感，需令粘弹性的COD始终小于分子的有效作用距离δ_c，进而得到了粘弹性材料的缺陷不敏感条件

$$\delta(t)=\frac{8W\sigma_s}{\pi\kappa}\left[J(t)I(c(0))+\int_{0^+}^{t}J'(t-\tau)\frac{\partial I(c(\tau))}{\partial\tau}d\tau\right]\le\delta_c \tag{5}$$

考虑对任意的初始裂纹长度上述条件都成立，则进一步得出曲线不敏感宽度的解析表达

$$\frac{W_{ft}}{l_{ft}}=\min_{0\le\beta<1}\left\{\frac{\pi\kappa}{8\left[\tilde{J}(t_0)I(c(0))+\int_{0^+}^{t_0}\tilde{J}'(t_0-\tau)\frac{\partial I(c(\tau))}{\partial\tau}d\tau\right]}\right\}\Bigg|_{t=t_0} \tag{6}$$

五、结论

分别基于 Griffith 准则与 COD 准则给出了粘弹性条带缺陷不敏感宽度的解析表达，揭示了粘弹性材料缺陷不敏感的影响因素。进一步的典型结果表明：算例加载速率越高，缺陷不敏感尺寸越大，即缺陷不敏感现象越容易发生，而弹性问题与加载速率无关，这可用来解释生物材料在不同的加载速率下亦能保持其强度的鲁棒性。

参 考 文 献

1 Gao, H., Ji, B., Jäger, I. L., Arzt, E., and Fratzl, P., 2003. Materials Become Insensitive to Flaws at Nanoscale: Lessons from Nature. Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. 100, 5597-5600.

2 Gao, H., Chen, S., 2005. Flaw Tolerance in a Thin Strip Under Tension. J. Appl. Mech. 72, 732–737.

3 Gao, H., Wang, X., Yao, H., Gorb, S., Arzt, E., 2005. Mechanics of Hierarchical Adhesion Structures of Geckos. Mech. Mater. 37, 275-285.

4 Yao, H., Gao, H., 2006. Mechanics of Robust and Releasable Adhesion in Biology: Bottom-up Designed Hierarchical Structures of Gecko. J. Mech. Phys. Solids 54, 1120-1146.

5 Kumar, S., Li, X. Y., Haque, A., Gao, H. J., 2011. Is Stress Concentration Relevant for Nanocrystalline Metals? Nano Lett. 11, 2510-2516.

6 Graham, G. A. C., 1968. Correspondence Principle of Linear Viscoelastiicity Theory for Mixed Boundary Value Problems Involving Time-Dependent Boundary Regions. Q. Appl. Math. 26, 167-174.