

# 双曲守恒律方程的自适应人工黏性及激波识别方法研究

陈璧，申义庆

(中国科学院力学研究所高温气体动力学国家重点实验室，北京海淀区 100190)

**摘要** 本文将自适应人工黏性方法与激波识别方法相结合，用于求解双曲守恒律方程。自适应人工黏性方法具有形式简单，概念清晰以及运算量小等优点；但是较难兼顾有效抑制间断区域非物理振荡与减小光滑区域耗散的双重需求，因此自适应人工黏性方法捕获的激波区域较宽且对人工黏性系数比较敏感。结合有效的激波识别方法能有效地克服自适应人工黏性方法的上述缺点，使我们能精确地在间断附近添加足够的人工黏性，而对于光滑区域完全消除不必要的耗散。数值试验表明，由于人工黏性影响区域变小，人工黏性系数可取范围变大。本文使用的自适应人工黏性方法的人工黏性系数正比于弱局部残差。弱局部残差在激波区域很大( $\sim \Delta$ ，其中 $\Delta$ 为空间离散和时间离散的最小尺度)，在接触间断区域较小( $\sim \Delta^\alpha$ ，其中 $\alpha$ 接近于2)，在光滑区域非常小( $\sim \Delta^4$ )。激波识别器采用的是 $\tau_5$ 识别器。

**关键词** 双曲守恒律，自适应人工黏性，激波识别，弱局部残差

## 引言

众所周知，双曲守恒律方程存在间断解，例如，激波，接触间断。在间断附近，线性方法可能产生非物理振荡，甚至数值溢出。因此，一个好的数值方法必须具有非线性稳定性。为了保证数值格式的非线性稳定性，我们需要使用适当限制器或者添加一定的人工黏性。然而，在设计多维高阶格式时，限制器将变得十分复杂且运算量大。相应地，我们也可以通过在间断区域添加适当人工黏性来保证数值稳定性，并且不会增加过多运算量。

利用人工黏性自动捕获激波的思想最先由 Von Neumann 和 Richtmyer<sup>[1]</sup>提出，并成功地计算了一维非定常无黏流动中的激波问题。自此之后，人们对其进行深入研究并发展出了多种不同的人工黏性方法且得到了广泛的应用。设计精确且鲁棒的人工黏性方法的主要难点在于如何确保在间断区域添加足够大的人工黏性以抑制非物理振荡，对于光滑区域则不添加或添加非常小的人工黏性而不影响计算精度。并且，如果间断附近添加的人工黏性太大，间断区域将被拉宽甚至抹平，降低了间断区域的分

辨率。另外，为了满足数值解的相容性，人工黏性必须随网格尺度趋于零而消失。因此，为了达到整体的高分辨率，人工黏性应该通过特定开关函数自适应的添加在计算区域，识别器应具有在间断区域取较大值，且能确定合适的人工黏性大小。Kurganov 和 Liu<sup>[2]</sup>发展的基于弱局部残差的自适应人工黏性方法，使用弱局部残差构造相应标识器能较好的区分间断区域与光滑区域，但过度区域较宽，且人工黏性是在整个计算区域添加，所以耗散较大。

本文将自适应人工黏性方法与激波识别方法相结合，通过激波识别方法能够更为精确的区分间断区域和光滑区域，在间断区域采用与弱局部残差成正比的自适应人工黏性方法添加适当人工黏性，在光滑区域则不添加。由于人工黏性只在较小的区域起作用，所以整体的数值耗散较小，并且人工黏性系数的取值范围变大。数值试验表明，自适应人工黏性方法与激波识别方法相结合，相比单纯的自适应人工黏性方法，计算结果更精确。

## 1 数值方法

我们考虑一维双曲守恒律方程组

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{f}(\mathbf{u})_x = \mathbf{0} \quad (1)$$

添加自适应人工黏性项后，方程写为

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{f}(\mathbf{u})_x = C(\varepsilon(\mathbf{u})\mathbf{u}_x)_x \quad (2)$$

其中， $C$  为可调的人工黏性系数， $\varepsilon(\mathbf{u})$  为非负量，其大小根据  $\mathbf{u}$  的局部特性自动调整。在数值计算中，我们使  $\varepsilon(\mathbf{u})$  正比于弱局部残差，其取值在接近激波区域非常大；在接触间断附近较小；而在光滑区域非常小。

### 1.1 弱局部残差

对于方程(1)，在计算区域  $X \times [0, T]$ ，根据定义，弱解满足积分方程

$$\mathbf{E}(\mathbf{u}, \phi) = \int_{t=0}^T \int_X \{ \mathbf{u}(x, t) \phi_t(x, t) + \mathbf{f}(\mathbf{u}(x, t)) \phi_x(x, t) \} dx dt + \int_X \mathbf{u}(x, 0) \phi(x, 0) dx = 0$$

对于所有的测试函数  $\phi(x, t) \in C_0^1(X \times [0, T])$  都成立。若对于计算区域  $X \times [0, T]$  中离散点的数值解为  $\mathbf{u}_{j+1/2}^n$ ，并且引入分段常数近似函数  $\mathbf{u}^\Delta(x, t)$ ，其表达式为

$$\mathbf{u}^\Delta(x, t) = \mathbf{u}_{j+1/2}^n, \quad (x, t) \in [x_j, x_{j+1}] \times [t^{n-1/2}, t^{n+1/2})$$

相应地， $\mathbf{E}(\mathbf{u}^\Delta, \phi)$  可以认为是  $\mathbf{u}^\Delta$  对应于  $\phi$  的弱残差。显然，由于  $\phi$  不确定，我们尚不能直接计算出  $\mathbf{E}(\mathbf{u}^\Delta, \phi)$ 。然而，根据文献[3,4,5]中的方法，可以借助局部测试函数  $\phi_{j+1/2}^{n-1/2}$  构造出全局测试函数  $\phi$ ，相应地，可以引入相应的弱局部残差，如文献[2]中使用的弱局部残差为

$$\mathbf{E}_{j+1/2}^{n-1/2} = \frac{1}{6} \left[ \mathbf{u}_{j+3/2}^n - \mathbf{u}_{j+3/2}^{n-1} + 4 \left( \mathbf{u}_{j+1/2}^n - \mathbf{u}_{j+1/2}^{n-1} \right) + \mathbf{u}_{j-1/2}^n - \mathbf{u}_{j-1/2}^{n-1} \right] \Delta x + \frac{1}{4} \left[ \mathbf{f} \left( \mathbf{u}_{j+3/2}^n \right) - \mathbf{f} \left( \mathbf{u}_{j+3/2}^{n-1} \right) + \mathbf{f} \left( \mathbf{u}_{j+1/2}^n \right) - \mathbf{f} \left( \mathbf{u}_{j+1/2}^{n-1} \right) \right] \Delta t \quad (3)$$

弱局部残差在激波区域很大，在接触间断区域较小，在光滑区域非常小。且具有如下性质<sup>[3,4,6]</sup>

$$\left\| \mathbf{E}_{j+1/2}^{n-1/2} \right\| \sim \begin{cases} \Delta, & \text{near shock waves,} \\ \Delta^\alpha, & \text{near shock waves, } 1 < \alpha \leq 2 \\ \Delta^p, & \text{near shock waves,} \end{cases} \quad (4)$$

其中  $p = \min\{r+2, 4\}$ ， $r$  为数值格式精度的阶数。

### 1.2 激波识别方法

文献[7]提出利用 WENO 格式中光滑因子之间的关系来判断一个五结点模板是否光滑的引理，即

若  $\tau_5 > \min\{IS_1, IS_2, IS_3\}$  成立，则模板  $S^5$  认为是不光滑的；否则， $S^5$  是光滑的。

其中， $\tau_5 = |IS_1 - IS_2|$ 。  $\tau_5$  具有如下特性：

(1) 对于五结点模板  $S^5 = \{x_{j-2}, \dots, x_{j+2}\}$ ，

若  $S^5$  包含间断，则有  $\tau_5 \ll IS_k, k=1, 2, 3$ ；

(2) 若方程的解在某个子模板  $S_k^3$  是光滑的，而在整个模板  $S^5$  上是间断的，则对于最光滑的模板有  $IS_k \ll \tau_5$ ；

(3)  $\tau_5 \leq \max\{IS_1, IS_2, IS_3\}$ 。

利用上述引理判断间断区域，不涉及可调参数，避免了人为因素的影响和问题相关性。

### 1.3 自适应人工黏性与激波识别方法

将自适应人工黏性方法与激波识别方法相结合的一维非线性守恒方程半离散格式为

$$\frac{d}{dt} \bar{\mathbf{u}}_j = - \frac{\mathbf{H}_{j+1/2} - \mathbf{H}_{j-1/2}}{\Delta x} + \left( \frac{C_{j+1/2} \varepsilon_{j+1/2} \Delta \bar{\mathbf{u}}_{j+1/2} - C_{j-1/2} \varepsilon_{j-1/2} \Delta \bar{\mathbf{u}}_{j-1/2}}{(\Delta x)^2} \right) \quad (5)$$

其中， $\Delta \bar{\mathbf{u}}_{j+1/2} = \bar{\mathbf{u}}_{j+1} - \bar{\mathbf{u}}_j$ ，

$$\varepsilon_{j+1/2} = \max \left( \left| \mathbf{E}_{j-1/2}^{n-1/2} \right|^{(i)}, \left| \mathbf{E}_{j+1/2}^{n-1/2} \right|^{(i)}, \left| \mathbf{E}_{j+3/2}^{n-1/2} \right|^{(i)} \right),$$

$\left| \mathbf{E}_{j+1/2}^{n-1/2} \right|^{(i)}$  为该矢量的第  $i$  个分量。黏性通量  $C_{j+1/2} \varepsilon_{j+1/2} \Delta \bar{\mathbf{u}}_{j+1/2} / \Delta x$  跟  $x_{j+1/2}$  附近的弱局部残差成正比。为了增强人工黏性系数的调节效果，我们取

$$C_{j+1/2} = C / \varepsilon_{\max},$$

其中

$$\varepsilon_{\max} = \max \{ \varepsilon_{j+1/2} \}$$

结合激波识别方法，我们最终得到

$$C_{j+1/2} = \begin{cases} C / \varepsilon_{\max}, & \text{if detector}(j) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (6)$$

其中， $\text{detector}(j)$  为自定义函数，若对于  $S_j^5 = \{x_{j-2}, \dots, x_{j+2}\}$  和  $S_{j+1}^5 = \{x_{j-1}, \dots, x_{j+3}\}$  同时满足  $\tau_5 > \min(IS_1, IS_2, IS_3)$ ，则  $\text{detector}(j)$  返回真，否则返回假。

## 2 数值算例

本节中，我们通过计算不同算例将自适应人工黏性与激波识别方法与文献[2]中的自适应人工黏性方法进行对比。在下文的所有算例中，AAVM 代指文献[2]中的自适应人工黏性方法，AAVM+Detector 则指代本文所讨论的自适应人工黏性与激波识别方法。时间格式采用 2 阶 Runger-Kutta 推进。

### 2.1 对流方程

考虑 1-D 波动方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (7)$$

初始条件为

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (8)$$

边界条件为周期边界条件。考虑以下三点格式

$$\bar{u}_j^{n+1} = \bar{u}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( f_{j+\frac{1}{2}}^n - f_{j-\frac{1}{2}}^n \right) + \Delta t \left( \frac{C_{j+\frac{1}{2}} \varepsilon_{j+\frac{1}{2}}^n \Delta \bar{u}_{j+\frac{1}{2}}^n - C_{j-\frac{1}{2}} \varepsilon_{j-\frac{1}{2}}^n \Delta \bar{u}_{j-\frac{1}{2}}^n}{(\Delta x)^2} \right) \quad (9)$$

其中， $f_{j+1/2}^n = [f(\bar{u}_{j+1}^n) + f(\bar{u}_j^n)]/2$ 。为了满足 TVD 性质，有如下条件

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \left| \frac{f(\bar{u}_{j+1}^n) - f(\bar{u}_j^n)}{\Delta \bar{u}_{j+\frac{1}{2}}^n} \right| \leq \frac{2\Delta t C_{j+\frac{1}{2}} \varepsilon_{j+\frac{1}{2}}^n}{(\Delta x)^2} \leq 1$$

考虑 CFL 条件

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \left| \frac{f(\bar{u}_{j+1}^n) - f(\bar{u}_j^n)}{\Delta \bar{u}_{j+\frac{1}{2}}^n} \right| \leq 0.5$$

因此我们可设

$$C_{j+\frac{1}{2}} = \frac{(\Delta x)^2}{4\Delta t \varepsilon_{\max}^n} \quad (10)$$

其中， $\varepsilon_{\max}^n = \max\{\varepsilon_{j+1/2}^n\}$ ，这样即可保证在接近激波区域(其中  $\varepsilon_{j+1/2}^n \sim \varepsilon_{\max}^n$ )所添加的人工黏性足以抑制数值振荡。为了方便调节人工黏性系数，在实际计算中，我们取

$$C_{j+\frac{1}{2}} = C \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t \varepsilon_{\max}^n}$$

其中， $C$  为可调参数。CFL 条件给出的  $C$  值为 0.25。

#### 2.1.1 精度测试

我们使用 1-D 对流方程(7)来测试 AAVM 算法和 AAVM+Detector 算法的精度，初始条件为

$$u_0(x) = \sin(2\pi x) \quad (11)$$

即正弦波，计算区域为  $[0,1]$ ，周期性边界条件，CFL 数为 0.1，计算时间  $t = 2.0$ ， $C = 0.25$ 。对于光滑解，AAVM 算法由于不能完全消除人工黏性对光滑区域的影响，所以实际计算精度要低于数值格式应有精度(在此算例中使用二阶中心差分构建数值通量，所以该数值格式理论上应为二阶精度)；AAVM+Detector 算法由于使用了有效的激波识别方法，避免了人工黏性对光滑区域的影响，所以实际计算精度接近格式的理论精度，如表 1 所示。由此我们可以看出 AAVM 算法比 AAVM+Detector 算法耗散大。

#### 2.1.2 计算结果

为了进一步测试两种方法的耗散特性，我们通过增大计算时间，重新计算了正弦波算例，初边值条件与精度测试中的条件相同，网格数为 200，CFL 数为 0.1， $t = 10.0$ ， $C = 0.25$ ，计算结果如图 1 所示。从图中我们可以看出 AAVM 算法的计算结果波幅明显变小，耗散较大；AAVM+Detector 计算结果与精确解基本重合，耗散效应小。

表 1 误差以及精度验证

网格数 $N$	AAVM		AAVM+Detector	
	$L_1$ 误差	$L_1$ 阶数	$L_1$ 误差	$L_1$ 阶数
50	0.4688E+00	-	0.2083E-01	-
100	0.2285E+00	1.037	0.5209E-02	2.000
200	0.9350E-01	1.289	0.1303E-02	1.999

400	0.3787E-01	1.304	0.3258E-03	2.000
800	0.1486E-01	1.350	0.8144E-04	2.000

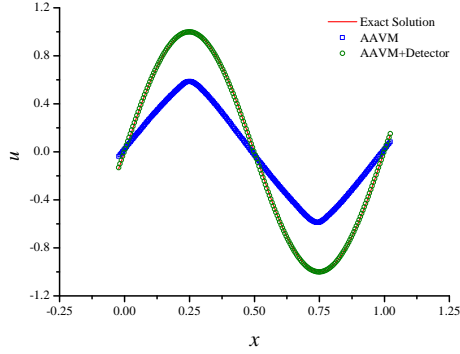


图 1 正弦波计算结果对比(t = 10.0)

为了测试两种算法对不同间断的捕获能力，我们使用由高斯波、三角波、方波以及半椭圆波组成的组合波做初始条件进行计算，波形表达式为

$$u(x,0) = \begin{cases} \frac{1}{6}[G(x,\beta,z-\delta)+4G(x,\beta,z)+G(x,\beta,z+\delta)], & x \in [-0.8,-0.6] \\ 1, & x \in [-0.4,-0.2] \\ 1-|10(x-0.1)|, & x \in [0,0.2] \\ \frac{1}{6}[F(x,\alpha,a-\delta)+4F(x,\alpha,a)+F(x,\alpha,a+\delta)], & x \in [0.4,0.6] \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (12)$$

其中， $G(x,\beta,z) = e^{-\beta(x-z)^2}$ ， $F(x,\alpha,a) = \sqrt{\max(1-\alpha^2(x-a)^2, 0)}$ ， $z = -0.7$ ， $\delta = 0.005$ ， $a = 0.5$ ， $\alpha = 10$ ， $\beta = \ln 2 / (36\delta^2)$  为常数。图 2 给出了时间  $t = 2$  时的解，计算网格数为 200，CFL 数为 0.1， $C = 0.25$ 。从图中可以看出，AAVM+Detector 算法的计算结果比 AAVM 算法对于不同类型的间断都有较明显的改善，尤其是对于半椭圆波，AAVM+Detector 算法计算效果较好。

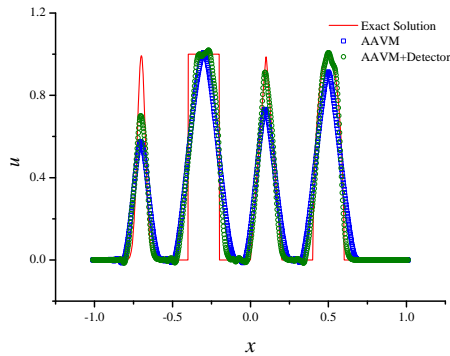


图 2 组合波计算结果对比(t = 2.0)

## 2.2 一维 Euler 方程

我们考虑理想气体一维 Euler 方程组

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{U})}{\partial x} = \mathbf{0} \quad (13)$$

其中， $\mathbf{U} = (\rho, \rho u, \rho E)^T$ ，

$$\mathbf{f}(\mathbf{U}) = (\rho u, \rho u^2 + p, \rho u H)^T$$

$$\rho E = \rho H - p = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho u^2, \quad \gamma = 1.4$$

计算中，我们采用如下中心迎风型数值通量<sup>[8]</sup>

$$\mathbf{H}_{j+\frac{1}{2}} = \frac{a_{j+\frac{1}{2}}^+ \mathbf{f}\left(\mathbf{u}_{j+\frac{1}{2}}^-\right) - a_{j+\frac{1}{2}}^- \mathbf{f}\left(\mathbf{u}_{j+\frac{1}{2}}^+\right) + a_{j+\frac{1}{2}}^+ a_{j+\frac{1}{2}}^- \left[ \frac{\mathbf{u}_{j+\frac{1}{2}}^+ - \mathbf{u}_{j+\frac{1}{2}}^-}{a_{j+\frac{1}{2}}^+ - a_{j+\frac{1}{2}}^-} - \mathbf{q}_{j+\frac{1}{2}} \right]}{a_{j+\frac{1}{2}}^+ - a_{j+\frac{1}{2}}^-} \quad (14)$$

其中，

$$\mathbf{u}_{j+\frac{1}{2}}^+ = \frac{1}{60}(-3\bar{u}_{j-1} + 27\bar{u}_j + 47\bar{u}_{j+1} - 13\bar{u}_{j+2} + 2\bar{u}_{j+3}),$$

$$\mathbf{u}_{j+\frac{1}{2}}^- = \frac{1}{60}(-3\bar{u}_{j+2} + 27\bar{u}_{j+1} + 47\bar{u}_j - 13\bar{u}_{j-1} + 2\bar{u}_{j-2}),$$

$$a_{j+\frac{1}{2}}^+ = \max \left\{ \lambda_N \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \left( \mathbf{u}_{j+\frac{1}{2}}^- \right) \right), \lambda_N \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \left( \mathbf{u}_{j+\frac{1}{2}}^+ \right) \right), 0 \right\},$$

$$a_{j+\frac{1}{2}}^- = \max \left\{ \lambda_1 \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \left( \mathbf{u}_{j+\frac{1}{2}}^- \right) \right), \lambda_1 \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \left( \mathbf{u}_{j+\frac{1}{2}}^+ \right) \right), 0 \right\},$$

$\lambda_1 < \dots < \lambda_N$  为 Jacobian 矩阵的  $N$  个特征值。

$$\mathbf{q}_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{a_{j+\frac{1}{2}}^+ - a_{j+\frac{1}{2}}^-} \min \text{mod} \left( \mathbf{u}_{j+\frac{1}{2}}^+ - \mathbf{u}_{j+\frac{1}{2}}^-, \mathbf{u}_{j+\frac{1}{2}}^+ - \mathbf{u}_{j+\frac{1}{2}}^- \right)$$

$$\mathbf{u}_{j+\frac{1}{2}}^* = \frac{a_{j+\frac{1}{2}}^+ \mathbf{u}_{j+\frac{1}{2}}^+ - a_{j+\frac{1}{2}}^- \mathbf{u}_{j+\frac{1}{2}}^- - \left[ \mathbf{f}\left(\mathbf{u}_{j+\frac{1}{2}}^+\right) - \mathbf{f}\left(\mathbf{u}_{j+\frac{1}{2}}^-\right) \right]}{a_{j+\frac{1}{2}}^+ - a_{j+\frac{1}{2}}^-}$$

minmod 函数定义为

$$\min \text{mod}(a, b) = \frac{1}{2} [\text{sgn}(a) + \text{sgn}(b)] \min(|a|, |b|)$$

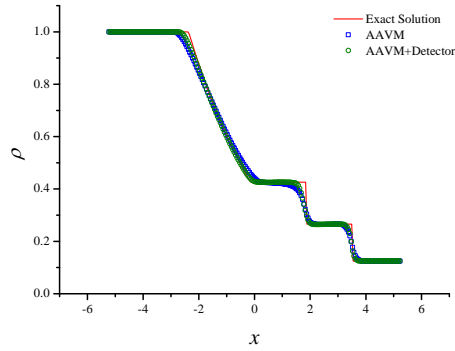
说明：由于 AAVM 算法必须利用上一步的解才能进行求解，所以我们只是从第二个时间步才使用该算法，至于第一个时间步的计算方法我们可以采用任意一种无振荡算法，为了简便，本文的算例计算中，第一个时间步采用 Steger-Warming 分裂结合一阶迎风格式计算得出。激波识别方法以密度为基础进行判别。

### 2.2.1 激波管问题

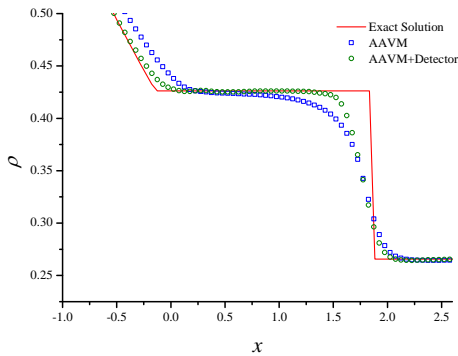
激波管问题的初始条件为

$$(\rho, U, p) = \begin{cases} (1, 0, 1) & -5 \leq x \leq 0 \\ (0.125, 0, 0.1) & 0 < x \leq 5 \end{cases} \quad (15)$$

计算网格数为 200, CFL 数为 0.1,  $t = 2.0$ ,  $C = 0.05$ 。计算结果如图 3-图 5 所示。



(a)



(b)

图 3 激波管问题  $t = 2.0$  时刻密度分布  
(图 b 为图 a 的局部放大图)

从图 3 中可以看出, AAVM+Detector 算法与 AAVM 算法相比, 在光滑区域和间断区域都更接近于精确解, 分析其原因是因为 AAVM+Detector 方法使用了可靠的激波识别方法, 消除了不必要的耗散, 所以提高了数值逼近精度。图 4 和图 5 分别给出了时间  $t = 2.0$  时的速度分布和压力分布, 从中我们也得出类似的结论。

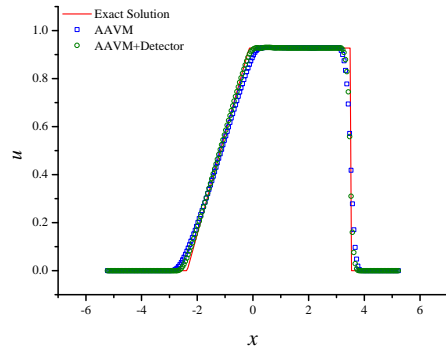


图 4 激波管问题  $t = 2.0$  时刻速度分布

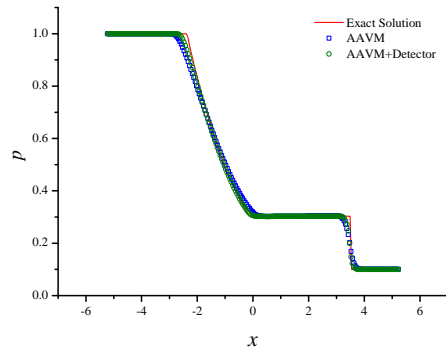


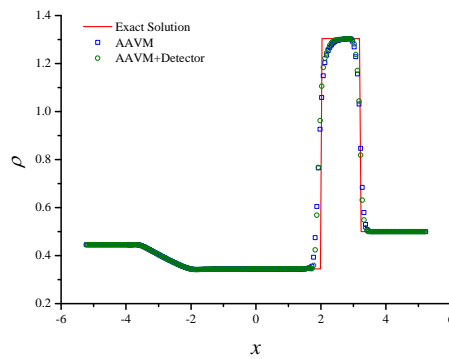
图 5 激波管问题  $t = 2.0$  时刻压力分布

### 2.2.2 Lax 问题

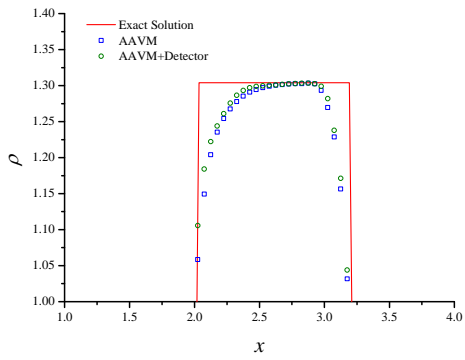
Lax 问题的初始条件为

$$(\rho, U, p) = \begin{cases} (0.445, 0.698, 3.528) & -5 \leq x < 0 \\ (0.500, 0.000, 0.571) & 0 \leq x \leq 5 \end{cases} \quad (16)$$

网格数为 200, CFL 数取 0.1, 计算时间  $t = 1.3$ ,  $C = 0.05$ 。



(a)



(b)

图 6 Lax 问题  $t = 1.3$  时刻密度分布

(图 b 为图 a 的局部放大图)

从图 6 中可以看出, AAVM+Detector 算法比 AAVM 算法, 对计算精度有一定改善。但改善效果不如激波管问题明显。图 7 和图 8 为相对应的速度分布和压力分布。

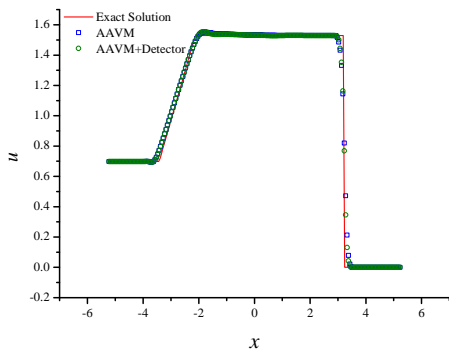


图 7 Lax 问题  $t = 1.3$  时刻速度分布

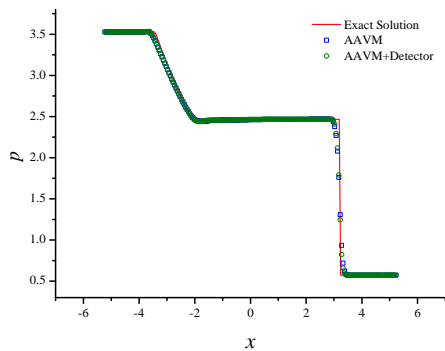


图 8 Lax 问题  $t = 1.3$  时刻压力分布

### 2.2.3 Shu-Osher 问题

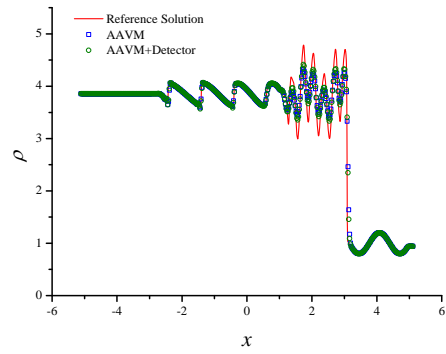
Shu-Osher 问题为运动激波与密度波相互干扰问题。该模型主要用于测试算法的分辨

率, 包括对激波和小尺度结构的识别能力。求解 1-D Euler 方程, 其初始条件如下

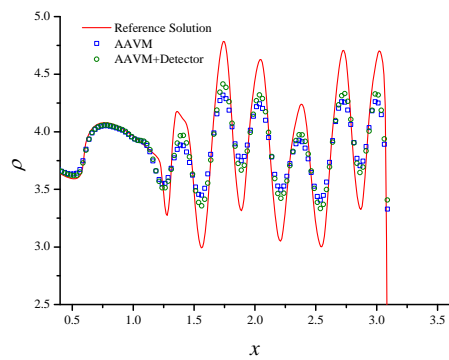
$$(\rho, U, p) = \begin{cases} (3.857143, 2.629369, 31/3), & -5 \leq x < -4 \\ (1 + 0.2 \sin(5x), 0, 1), & -4 \leq x < 5 \end{cases} \quad (17)$$

图 9 给出了网格数为 400, CFL 数为 0.1,  $t = 2.0$ ,  $C = 0.03$  条件下的计算结果。图中红色实线为参考解, 它是通过五阶 WENO 格式使用 1000 个网格计算得出。

从图 9 中可以看出, AAVM+Detector 算法与 AAVM 算法相比, 对计算精度有较为明显的提高, 尤其是在激波后密度脉动较为剧烈的区域 AAVM+Detector 算法计算结果更加接近参考解。究其原因, 得益于算法的低耗散性。



(a)



(b)

图 9 Shu-Osher 问题  $t = 2.0$  时刻密度分布

(图 b 为图 a 的局部放大图)

## 2 结 论

本文通过将自适应人工黏性方法与激波识别方法相结合，对传统的自适应人工黏性方法进行了改进。通过有效的激波识别方法，能够精确的区分光滑区域与间断区域，有利于我们对两个区域根据其特点进行更为有效的处理。对于间断区域，需要添加适当人工黏性以抑制非物理振荡，因此，我们采用与弱局部残差成正比的自适应人工黏性方法；对于光滑区域，要求耗散尽量小，所以我们在光滑区域不添加黏性。数值试验表明，增加激波识别处理的自适应人工黏性方法与没有激波识别处理的算法相比，数值逼近效果有较明显改善。

### 参考文献

- 1 Neumann J, Richtmyer R. A method for the numerical calculation of hydrodynamic shocks. *J. Appl. Phys.*, 1950, 21 : 232 - 237
- 2 Kurganov A, Liu Y. New adaptive artificial viscosity method for hyperbolic systems of conservation laws, *Journal of Computational Physics*, 2012, 231(24) : 8114-8132
- 3 Constantin L, Kurganov A. Adaptive central-upwind schemes for hyperbolic systems of conservation laws, in: *Hyperbolic Problems: Theory, Numerics, Applications*. Osaka: Yokohama Publishers, 2006
- 4 Karni S, Kurganov A. Local error analysis for approximate solutions of hyperbolic conservation laws. *Adv. Comput. Math.*, 2005, 22 : 79 - 99
- 5 Kurganov A, Noelle S, Petrova G. Semi-discrete central-upwind scheme for hyperbolic conservation laws and Hamilton-Jacobi equations. *SIAM J. Sci. Comput.* 2001 (23) : 707 - 740.
- 6 Karni S, Kurganov A, Petrova G. A smoothness indicator for adaptive algorithms for hyperbolic systems. *J. Comput. Phys.* 2002, 178 : 323 - 341
- 7 Shen YQ, Zha GC. Generalized finite compact difference scheme for shock/complex flowfield interaction, *Journal of Computational Physics*, 2011, 230 : 4419 - 4436
- 8 Kurganov A, Lin CT, On the reduction of numerical dissipation in central-upwind schemes, *Commun. Comput. Phys.*, 2007, 2 : 141 - 163

## RESEARCH ON ADAPTIVE ARTIFICIAL VISCOSITY AND SHOCK DETECTING METHOD FOR HYPERBOLIC SYSTEMS OF CONSERVATION LAWS

CHEN Bei SHEN Yiqing

(Key Laboratory of High Temperature Gas Dynamics, Institute of Mechanics, C A S, No.15 Beisihuanxi Road, Beijing 100190, China)

**Abstract** In this paper, we combine the adaptive artificial viscosity method with the shock detecting method for solving hyperbolic system of conservation laws. The Adaptive artificial viscosity method is simple, conceptual clear and computational inexpensive; however it is difficult to balance guarantying nonlinear stability of the scheme which needs to add sufficient artificial viscosity and reducing dissipation which requires minimal artificial viscosity, so the adaptive artificial viscosity method usually overly smears the shock region and is sensitive to artificial viscosity coefficient. Combining with an effective shock detecting method, the adaptive artificial viscosity method can accurately add enough artificial viscosity in the vicinity of discontinuities, and completely eliminate the unnecessary dissipation for the smooth area. Numerical experiments show that, since the region affected by the artificial viscosity has become smaller, the possible range of artificial viscosity coefficient becomes wider. In this paper, the adaptive artificial viscosity coefficients are proportional to the size of the weak local residual, which is sufficiently large ( $\sim \Delta$ , where  $\Delta$  is a discrete small scale) in the shock regions, much smaller ( $\sim \Delta^\alpha$ , where  $\alpha$  is close to 2) near the contact waves, and very small ( $\sim \Delta^4$ ) in the smooth parts of the computed solution. The  $\tau_5$  shock detector is used.

**Key words** hyperbolic system of conservation laws, adaptive artificial viscosity, shock detecting, weak local residual