

工业标准气动计算的基础及其理论基础和推论并用于 CFD

高智 申义庆

LHD, 中国科学院力学研究所, 北京 100190

摘要 抛物化(P)NS 方程组计算是工业标准气动计算的基础, Anderson 在专著“Hypersonic and High Temperature Gas Dynamics”(2006 年)中写道“The PNS method is in very widespread use; indeed, it forms the basis of an industry-standard computer program, which is used by virtually all major aerodynamic laboratories and companies”. PNS 方程是上世纪六七十年代针对不同具体流动提出的, 因此有一些粘性项略有差异的不同 PNS 形式; 当时 PNS 描述什么样的基本流动并不清楚, PNS 缺少相应的流体力学基本理论。九十年代, 高智提出了粘性/无粘干扰剪切流动 (ISF) 理论 (包括层流、扰动流和湍流理论), 解答了上述两个基本问题。ISF 由粘性剪切层和与它相互作用的相邻无粘外流所组成; ISF 理论引入 ISF 最佳坐标系即贴分界面正交坐标系, 在 ISF 最佳坐标系中, 粘性层的运动规律是流向对流占优、法向对流扩散相竞争; 给出运动规律的数学定义式和 ISF 控制方程组 (即一种 PNS); 主要推论: 给出粘性层速度和长度尺度律, 提出验证 NS 数值解的分界面判据和壁面判据、湍流模型壁面判据。ISF 理论、ISF 最佳坐标系、尺度律和壁面判据均已用于 CFD 的网格生成、局部热流突增计算、NS 数值解可信度验证, 并被称为高氏 ISF 理论、高氏壁判据。值得强调, 高超声速流中热流突增等现象被文献 (Annu. Rev. Fluid Mech. 2006, 38:1-157) 称为 “unknown-unknown” 现象, 是困扰高超声速流计算的难题; NS 方程组解的存在唯一性没有得到数学证明, NS 数值解可信度的评估至关重要, 验证 NS 数值解可信度的壁判据方法不仅是一个理论方法, 且与以壁面摩阻等为特征量的常用网格收敛性方法相比具有明显的优点。

关键词 气体动力学, 计算流体力学, 粘性/无粘干扰流动, 高超声速流动

引言

流体力学、计算流体力学 (CFD) 的研究应面向国家的需求^[1,2], 因此工业标准计算是 CFD 研究的核心和重中之重; 高超、超声速流动工业标准 CFD 计算的基础是抛物化 Navier-Stokes (PNS) 方程计算, Anderson 在其专著 “Hypersonic and High Temperature Gas Dynamics”^[3] (2006 年) 中指出 “The PNS method is in very widespread use; indeed, it forms the basis of an industry-standard computer

program, which is used by virtually all major aerodynamic laboratories and companies.” PNS 方程是上世纪六七十年代人们针对一些具体流动提出的, 因此有一些粘性小项略有差异的不同 PNS 形式, 对它们的称呼也不相同。近半个世纪以来, PNS 得到广泛应用, 以美国为例, 研发了不少 PNS-空间推进算法 (SMA) 软件, 如^[4-9]; 美国 NASA 的三维流动模拟, 既有 NS 软件又有 TLNS 和 PNS 软件, 如见^[9,10]; 薄层 (Thin Layer) NS 是 PNS 的一种, 在高雷诺 (Re) 数绕流的近壁流动计算中, 通常使用贴体正交曲线坐

标系和网格,在这种条件下,NS 方程组中的粘性项只有壁面法向二阶粘性导数项能够准确计算,其他粘性项通常算不出来,这就是 NS 应被简化为 TLNS 的物理原因^[11-13]。

对工业标准 CFD 计算,通常认为 1%量级的计算误差可以接受是允许的^[14,15],对此计算精度,在精度、简单性、易维护、鲁棒性和效率等因素的综合考虑下,二阶精度格式提供了最好的折衷选择^[10,14]。现今绝大多数 CFD 计算软件、特别是商用软件(例如 FLUENT, Phoenics 等)均以二阶计算精度格式为主打或核心格式^[10,16];二阶精度格式计算高 Re 数流动,除了漩涡、大分离流动区外,NS 计算其实就是 TLNS 计算,可见,PNS 计算将在更长的时期内成为工业标准气动计算的基础。

作为工业标准气动计算基础的 PNS 方法,它的早期研究(从上世纪六十年后期到九十年代)全力发展空间推进算法(SMA)但没有提出理论,集中表现在:PNS 描述什么样的基本流动并不清楚,PNS 没有与它匹配的流体力学基本理论。九十年代高智提出粘性/无粘干扰剪切流动(ISF)理论,^[17-19]该理论不仅给出了上述两个“基本”的正确答案,且它提出的 ISF 组成、ISF 粘性层运动规律和尺度律、分界面判据和壁面判据等对 CFD 计算具有重要的作用;它们并已得到一些应用^[20-26]。例如,高超声速绕流中严重的局部热流突增等现象,能够导致飞行器局部严重受损,甚至使飞行器坠毁^[27]。ISF 粘性层尺度律给出的小尺度结构不仅揭示了一些物理量局部突变的流动机理、且提供了计算它们的正确途径。又如,NS 方程组解的存在唯一性至今没有得到数学证明,因此 NS 数值解的可信度的验证就成为大家必须面对的一个基本难题^[28-30]。ISF 理论的推论给出了分界面判据和壁面判据,它们分别为

流场中自由 ISF 和近壁粘性/无粘干扰流动 NS 数值解可信度的验证和确认提供了有效的理论途径;壁面判据方法与以壁面摩阻等为特征量的网格收敛性分析的常用验证方法相比具有明显的优点。

本文首先讨论 PNS 方法何以成为工业标准气动计算的基础,其次评述 PNS 方法的理论基础-粘性/无粘干扰剪切流动(ISF)理论,包括层流、扰动流和湍流理论及其推论,最后介绍 ISF 理论及其推论在 CFD 中的已有应用、讨论未来的可能应用。

1. PNS 方法何以成为工业标准气动计算的基础

抛物化 Navier-Stokes (PNS) 方程组是上世纪六七十年代人们针对一些存在主流方向(x-方向)的具体流动(参见图 1)提出的,对 x 为一坐标轴正交坐标系中的 NS 方程组,丢掉一些粘性小项得到 PNS 方程组;人们对粘性小项的取舍略有不同且对它们的称呼也不同,现在 PNS, 扩散抛物化(DP)NS 和薄层(TL)NS 的称呼比较通用,总之它们是数学性质相同的一类方程组。PNS 方程组的数学性质是:若流向马赫数 $M_s > 1$, 它们数学上为双曲-抛物型,若 $M_s < 1$ 它们为椭圆型。因此,对高超和超声速绕流,定常 PNS 初边值问题数学上适定,可沿 x-方向对 PNS 实施空间推进求解,使计算维数减少一维,大大减少了对计算机 CPU 时间和存储的要求,PNS 的这一性质使它在计算机尚不发达的二十世纪具有重大应用价值,即使在计算机高度发展的时代,PNS 方法仍然是从流体力学角度提出的计算气动特性的快速算法,对工程计算十分重要和有用,发达国家特别是美国研发了不少 PNS 空间推进计算软件,如见^[4-10],得到广泛应用^[3-10]。

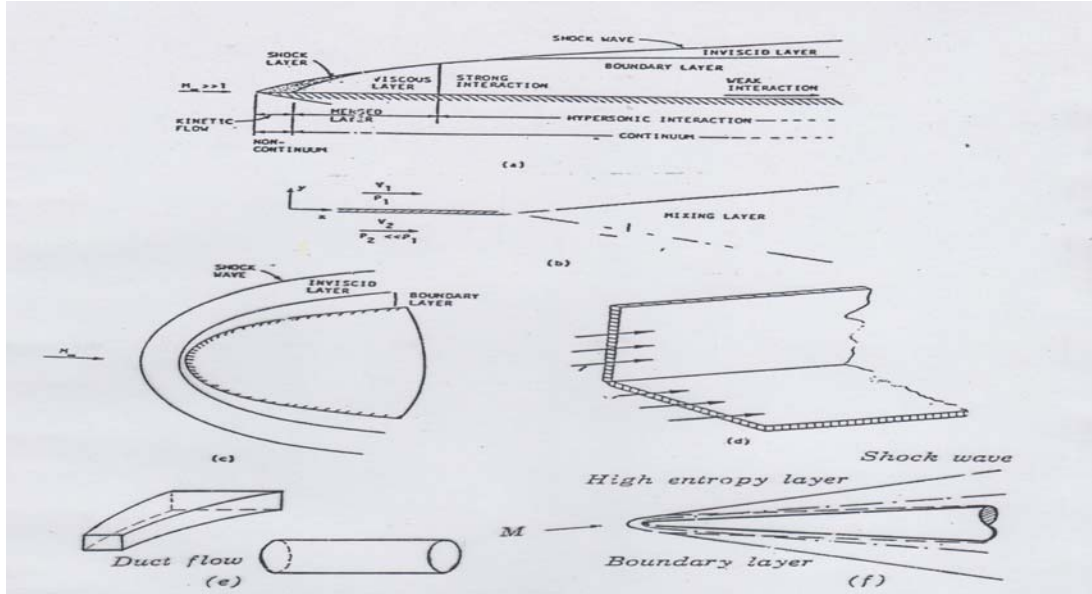


图 1 提出 PNS 方程组最初基于求解图中所示典型流动, 故有一些彼此略有差异且称呼不同的 PNS 形式

PNS 方法成为工业标准气动计算基础的另一个重要原因是: 对工业标准气动计算 1.0% 大小的计算误差可以接受或者说是允许的误差^[14,15]。在过去解析分析时代, 对工程近似分析提出了八九不离十的公认要求; 在计算机时代, 达到 98、99 不离百的精度是比较合理且现实的要求。事实上, 在贴体正交坐标系中的 NS 方程组, 边界层方程粘性项以外的其他粘性项小于 $R_e^{-1/2}$ ($R_e = \rho UL / \mu$), 对 $R_e = 10^6 \sim 10^9$ 典型情况, 其他粘性项小于或很小于 10^{-3} , 因此工业标准计算不需要计算它们。

PNS 方法成为基础的第二个原因是: 正像 Baldwin-Lomax^[11] 对 NS 方程组提出薄层 (Thin-layer) 近似的思考; 他们认为既然边界层方程粘性项以外的其他粘性项计算不出来, 为什么不丢掉它们呢? ! 这就得到 TLNS 方程组。Blottner^[12] 对众多绕流计算作了分析, 支持和证实了文^[11] 思考的正确性。强调了 NS 薄层近似的重要意义; 庄逢甘等^[13] 作了更深入的分析, 进一步强调了 DPNS (即 PNS 或 TLNS) 的重要意义和它们在 CFD 中的应用。现实情况是美国 NASA 的三维流动计算软件, 均既有 NS 软件也有 TLNS 软件。

PNS 方法未来仍是工业标准气动计算基

础的进一步的原因是: 现今绝大多数 CFD 软件^[10,16] 特别是商用 CFD 软件 (例如 Fluent, Phoenix 等) 均以二阶精度格式为主打和核心格式, 即使将来研发了以更高阶精度格式为主打和核心格式的 CFD 软件, 由于高阶格式在靠近壁面时不得不降阶, 因此不可能以高精度计算近壁粘性。近来文^[31] 计算了经典边界层流动, 并以逼近 Blasius 速度剖面为标准、考核了 33 种熟知的 CFD 格式 (包括一阶、二阶、三阶和四阶精度格式) 的好和坏; 计算表明, 33 种格式中有 20 个逼近 Blasius 剖面差, 说明它们在壁面邻域的实际计算精度不高于一阶甚至低于一阶, 这是一个具有普遍性的问题。近壁粘性流计算是高精度格式的瓶颈, 避不开又难以解决, 因此高精度格式在近壁粘性区的实际计算精度还达不到 PNS 逼近 NS 的近似精度。从气动工程计算最关心的壁面气动力和气动热物理特性来看, PNS 方法未来仍是工业标准气动计算的基础。

对于气动热物理计算, 非平衡流和组元守恒方程的计算, 误差来源主要来自反应速率常数, 反应速率常数普遍不准。例如氧的离解速率相差十倍, 电子密度将相差百倍, 氧的离解速率常数通常相差不低于十倍。因此反应速率不准引起的误差大大超出了格

式精度不同带来的误差，非平衡流计算的
实际计算精度无疑会低于 PNS 逼近 NS 的近似
精度，PNS 方法无疑是工业标准非平衡流计
算的基础；总之，基于工业需求、计算机合
理使用、物理化学模型近似，计算格式精度
及其近壁计算的精度、网格生成等诸多
因素的综合考虑，PNS 方法是 NS 方法的合理
简化、是最好的流体力学选择。

2. PNS 方法的理论基础—粘性/无粘 干扰剪切流动（ISF）理论及其推论

2.1 干扰剪切流（ISF）理论

PNS 方法研究在较长一段时期内，不清楚
PNS 到底描述什么样的基本流动，缺乏与 PNS
匹配的流体力学基本理论。上世纪九十年
代，高智提出粘性/无粘干扰剪切流动（ISF）
[17-19] 理论，解答了上述两个“基本”问题，
且该理论及其推论在 CFD 中有一些重要应
用。ISF 由粘性剪切层及与它相互作用的相

邻无粘外流所组成；ISF 理论引入 ISF 最佳
坐标系、即贴分界面正交坐标系（贴体坐
标系是一个例子）。在 ISF 最佳坐标系中，
粘性剪切层的流动规律是流向对流占优、法
向对流扩散相竞争，对二维可压缩流该规律
的数学定义式是

$$\rho u \frac{\partial f}{\partial x} \gg \frac{\partial}{\partial x} (\lambda \frac{\partial f}{\partial x}), \rho v \frac{\partial f}{\partial y} \equiv \frac{\partial}{\partial y} (\lambda \frac{\partial f}{\partial y}) \quad (1)$$

其中 $f = u, v$ 或 T ， x 和 y 为 ISF 最佳坐
标系的切向和法向坐标变量， u 和 v 为 x -
和 y -坐标方向流速分量， T 为温度， ρ 为密
度， $f = u$ 和 v 时， $\lambda = \mu$ 为粘性系数、
 $f = T$ 时， $\lambda = k$ 为热传导系数。利用定义
式（1）简化 ISF 最佳坐标系中的二维可压
缩 Navier-Stokes 组得到如下 ISF 方程组

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho e_t \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (\rho e_t + p)u \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (\rho e_t + p)v \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} 0 \\ \mu \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{4}{3} \mu \frac{\partial u}{\partial y} \\ \mu u \frac{\partial u}{\partial y} + k \frac{\partial T}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$p = \rho RT \quad (3)$$

ISF 方程组（2）和（3）显然是一种 PNS 方
程组。不过 PNS 的导出需要假定存在主流方
向如 x -方向，导出 ISF 方程组没有这一限
制，如它适用于驻点（粘性/无粘）流。

推论 1. ISF 粘性层的长度和速度尺度律^[32]，
二维流动的长度和速度尺度律可一般地表示
为^[32, 33]

$$(x_p, y_p; u_p, v_p) = (R_e^{-n_x}, R_e^{-n_y}; R_e^{-n_u}, R_e^{-n_v}) \quad (4)$$

其中

$(x_p, y_p) = (x, y)/L, (u_p, v_p) = (u, v)/U, R_e = \rho UL/\mu$ ，
利用定义式（1），连续性方程和 ISF 粘性层
内动能变化与 R_e 近似无关的假设，导出^[32]

$$(n_x, n_y; n_u, n_v) = (3q/2, (1+q)/2; q/2, (1-q)/2) \quad (5)$$

其中 $q = \ln(u_p / x_p) / \ln R_e, 0 \leq q < 1/2$ ，
 q 为粘性/无粘干扰参数。 $q = 0$ 表示驻点流
或经典边界层和与其无干扰相邻无粘外流；
 $q = 1/4$ ，ISF 粘性层为熟知的 Triple-deck
理论^[33-37]的下层粘性流，故 $q = 1/4$ 表示
Triple-deck 理论下层流和与它相互作用的
无粘外流； $q = 1/2$ ，ISF 粘性层为均匀各
向同性强粘性流，故 $q = 1/2$ 表示各向同性
强粘性流和与其强相互作用的相邻无粘外
流。需要指出，ISF 粘性层尺度律（5）和（6）
适用于自由 ISF，也适用于近壁贴体 ISF；

这就是说，近壁粘性/无粘干扰流动，包括驻点流，边界层及其相邻无粘外流，Triple-deck 流（例如分离点、再附点、尾缘点邻域、壁面窄缝、小凸起、小凹坑、小台阶邻域等特殊流动，以及粘性/无粘更强相互作用（ $q > 1/4$ ）的流动），均可用 ISF 理论来描述。

推论 2. 分界面判据和壁面判据^[19, 38-40]: 利用分界面上法向速度为零的条件，我们可以进一步简化 ISF 方程组，得到如下方程组

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (6)$$

$$\rho c_p u \frac{\partial T}{\partial x} - u \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = 0 \quad (7)$$

简化方程组 (6) 和 (7) 可用来验证自由 ISF 数值解的可信度、且可作为通过计算寻找自由 ISF 分界流面的依据，故称为分界面判据^[39, 40]利用壁面无滑移边界条件简化 ISF 方程组得到如下方程组

$$\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = 0 \quad (9)$$

文^[38]证实不可压缩流熟知的 12 个 NS 方程组的精确解准确满足方程组 (8)，合理的推论是 NS 数值解在壁面上应满足近似方程组 (8) 和 (9)，因此称该方程组为壁面判据 (WSC)，包括壁动量判据 (WMC) (8) 和壁能量判据 (WEC) (9)，也就是说 WSC、即 WMC 加上 WEC 可用来验证近壁流动 NS 数值解的可信度，自然也可用来验证 ISF 方程组数值解的可信度。

假如粘性可以忽略，分界面判据 (6) 和 (7) 简化为

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (10)$$

$$\rho c_p u \frac{\partial T}{\partial x} - u \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (11)$$

同理，壁面判据 (10) 和 (11) 可用来验证近壁流动 Euler 方程组数值解的可信度。

2.2 干扰剪切扰动流 (ISPF) 理论^[19, 41, 42]

干扰剪切扰动流 (ISPF) 是 ISF 受扰的结果，ISPF 由粘性剪切扰动层和与它相互作用的可扰无粘扰动外流组成。在 ISF 最佳坐标系中，对未扰变量，粘性扰动层的运动规律和数学定义式与 ISF 粘性层的运动规律和数学定义式完全一致。考虑不可压缩流，假定未扰动流动变量 (\bar{u}, \bar{p}) 以及 (\bar{u}, \bar{p}) 与扰动变量 (\tilde{u}, \tilde{p}) 的和 $(\bar{u} + \tilde{u}, \bar{p} + \tilde{p})$ 均满足 NS 方程组，则由变量为 $(\bar{u} + \tilde{u}, \bar{p} + \tilde{p})$ 的 NS 方程组减去变量为 (\bar{u}, \bar{p}) 的 NS 方程组、并略去 $\tilde{u} \times \tilde{u}$ 高阶小量，得到 ISPF 方程组

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + (\bar{u} \cdot \nabla) \tilde{u} + (\tilde{u} \cdot \nabla) \bar{u} + \frac{1}{\rho} \nabla \tilde{p} = \gamma \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} \quad (12)$$

$$\text{div} \tilde{u} = 0 \quad (13)$$

ISPF 方程组是 Herbert 等^[43, 44]研究边界层稳定性非平行流效应时在 1987 年提出的，并称作抛物化稳定性方程 (PSE)；其实 PSE 并未真正抛物化，文^[42]证明二维可压缩流 PSE 的数学性质与 ISF 方程组即 PNS 的数学性质一致，即未扰动流向马赫数 $M_s > 1$ 时，PSE 数学上为双曲-抛物型， $M_s < 1$ 时 PSE 数学上为椭圆型。因此 PSE 是称呼并不正确，应称为扩散抛物化稳定性方程组 (DPSE)、最好称 ISPF 方程组；因为边界层稳定性只是 ISPF 稳定性的一个特例。

推论 1: ISPF 扰动粘性层关于扰动量的尺度律与 ISF 粘性层的尺度律相一致。

推论 2: 对近壁 ISPF，由于壁面上 $\vec{u} = \vec{u} = 0$ ，故扰动变量 (\tilde{u}, \tilde{p}) 在壁面上应满足如下方程，同样称作扰动量壁面判据

$$\nabla \tilde{p}_w = [\gamma \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\tilde{u})]_w, \frac{\partial}{\partial y} (\lambda \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y})_w + \mu [(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y})^2 + (\frac{\partial \tilde{w}}{\partial y})^2]_w = 0 \quad (14)$$

扰动量壁面判据 (PWSC) 可用来验证 ISPF 方程组即 DPSE 方程组数值解的可信度。对于 ISPF 的未扰变量 (\tilde{u}, p) , 它们的尺度律和壁面判据就是 ISF 的尺度律和壁面判据。顺便指出, Herbert^[44] 称 PSE 方法 (即 ISPF 方法) 形成了工业标准稳定性分析的基础。

2.3 干扰剪切和湍流 (ISTF) 理论^[18, 19, 39]

ISTF 类似于 ISF, ISTF 由粘性湍流层和

$$\overline{\rho v \frac{\partial f}{\partial y}} \cong \frac{\partial}{\partial y} (\lambda \frac{\partial \overline{f}}{\partial y} - \overline{\rho v' f'}) \quad (15)$$

$$\overline{\rho u \frac{\partial f}{\partial x}} \gg \frac{\partial}{\partial x} (\lambda \frac{\partial \overline{f}}{\partial x} - \overline{\rho u' f'}), \quad \overline{\rho w \frac{\partial f}{\partial z}} \gg \frac{\partial}{\partial z} (\lambda \frac{\partial \overline{f}}{\partial z} - \overline{\rho w' f'}) \quad (16)$$

其中 $\overline{f} = (\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}; \overline{T})$, $\overline{u}, \overline{v}$ 和 \overline{w} 是流速分量 u, v 和 w 的时间平均量, \overline{T} 是温度 T 的时间平均量, $f' = (u', v', w'; T')$ 是 f 的脉动量; 当 $f = u, v$ 和 w 时 $\lambda = \mu$, 当 $f = T$ 时 $\lambda = k$, μ 和 k 为粘性和热传导系数。应当指出对于 Favre 滤波的大涡模拟 (LES) 方程组, ISTF 粘性湍流层的数学定义式仍可用式 (15) 和 (16), 但需要把式中的 Reynolds 湍流应力更换为 LES 的亚格子尺度应力。而当用 RANS/LES 混合湍流模型 [45, 46]、或用 RANS/DES 混合湍流模型时, 这里 DES 为脱体涡模拟 [47]; 由于近壁处通常用 RANS, ISTF 的无粘湍外流用 LES, 大的漩涡区用 DES。因此定义式 (15) 和 (16) 对

$$(\nabla \overline{p})_w = \frac{\partial}{\partial y} (\mu \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} - \overline{\rho v' u'})_w \quad (17)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (\lambda \frac{\partial \overline{T}}{\partial y})_w + \mu [(\frac{\partial \overline{u}}{\partial y})^2 + (\frac{\partial \overline{w}}{\partial y})^2 + \frac{\partial}{\partial y} (\overline{u' u'} + \overline{w' w'})]_w - \rho c_p \frac{\partial}{\partial y} (\overline{v' T})_w + \frac{\partial}{\partial y} (\overline{v' p'})_w = 0 \quad (18)$$

湍流 WMC 和湍流 WEC 可用于验证近壁湍流 RANS 方程组数值解的可信度。对湍流方程模型, ISTF 理论同样可以给出湍流模型壁面判据, 例如, 对不可压湍流 Prandtl 混合长模型, 壁面判据为

与它相互作用的相邻无粘湍流所组成; 在 ISF 最佳坐标系中, ISTF 粘性湍流层的运动规律仍然是流向对流占优、法向对流扩散相竞争; 如对可压缩湍流, 对 ISF 最佳坐标系中 NS 方程组取 Favre 平均的 Reynolds 平均 (RA) NS (RANS) 方程组描述湍流时, 上述运动规律的数学定义式为

RANS/LES, RANS/DES 混合湍流模型同样适用。

推论 1: ISTF 粘性湍流层的尺度律, 假定我们引进湍流粘性系数 μ_t , $\mu_t \partial u / \partial y = \partial (-\rho v' u') / \partial y$, 则 ISTF 粘性湍流层长度和速度尺度律近似为 ISF 粘性层的尺度律 (4) 和 (5), 但式中的粘性系数 μ 要用有效粘性系数 μ_{eff} 来代替, $\mu_{eff} = \mu + \mu_t$ 。

推论 2: 类似于 ISF 的分界面判据和壁面判据 (WSC), 湍流壁动量判据 (WMC) 和壁能量判据 (WEC) 分别为

$$\frac{\partial \overline{p}}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} [(\mu \frac{\partial \overline{u}}{\partial x}) + \rho l_p^2 \left| \frac{\partial \overline{u}}{\partial x} \right| \frac{\partial \overline{u}}{\partial x}]_w = 0 \quad (19)$$

其中 l_p 为 Prandtl 混合长。又如相应于 $k - \varepsilon$ 湍流模型和温度脉动能 $k_\theta = T'^2 / 2$ 模型的壁判据分别为^[33]

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{p_{kt}} \right) \frac{\partial k}{\partial y} \right]_w + \left(\tau_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)_w + (S_K)_w = 0 \quad (20)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{p_{\varepsilon t}} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right]_w + c_\varepsilon \left(\frac{\varepsilon}{x} \tau_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)_w + (S_\varepsilon)_w = 0 \quad (21)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{a_t}{p_{\theta r}} \frac{\partial k_\theta}{\partial y} \right)_w + \frac{q_t}{\rho c_p} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} + \varepsilon_\theta = 0 \quad (22)$$

其中 k, ε 为湍能和耗散率, k_θ 为温度脉动能, $p_{kr}, p_{\varepsilon r}$ 和 $p_{\theta r}$ 是与 k, ε 和 k_θ 对应的湍流 Prandtl 数, τ_t 湍流应力, $q_t = -\rho c_p a_t \bar{T} / \partial y$, μ 为湍流粘性系数, a_t 为湍流热传导系数, ε_θ 为与 ε 对应的温度脉动耗散率, c_ε 经验常数, S_k 和 S_ε 为源项。对于湍流方程模型, 湍流模型壁判据可用来验证模型方程数值解的可信度; 并可从壁判据的角度, 评估不同湍流方程的优劣, 优化湍流模型中的经验参数和常数。对于代数湍流模型, 如上述 Prandtl 混合长模型, 湍流模型壁判据可用来优化模型参数, 如优化 Prandtl 混合长。

3. 干扰剪切流 (ISF) 理论及其推论在 CFD 中的应用

3.1 ISF 方程组即 PNS 方程组在 CFD 中的应用

正如 Anderson^[3] 指出的 ISF 方程组即 PNS 方程组已得到广泛的应用, 并已成为工业标准气动计算的基础。对高 R_e 数绕流计算, 方程组必须在近壁 ISF 最佳坐标系即贴体正交坐标系中写出, 且计算必须使用贴体正交网格, 这是准确捕捉近壁粘性的必要基础, 否则即使网格很密, 计算格式的精度高也难以准确捕捉近壁粘性; 这是大家公认的常识。同理, 对流场中的自由 ISF, 例如底部流和外部无粘流之间的 ISF、大分离区回流和外部无粘流之间的自由 ISF, 若需要准确捕捉这些自由 ISF 中的粘性效应, 则 PNS

方程组和 NS 方程组必须在贴分界面正交坐标系中写出, 且计算时要使用贴分界面正交网格。这就是说如果流场中存在一些 ISF, 且诸 ISF 各自的法向彼此偏离较大, 而计算又要捕捉诸 ISF 各自的粘性效应时, ISF 方程组和 NS 方程组必须写在诸 ISF 各自的最佳坐标系中, 且计算中使用诸 ISF 各自最佳坐标系相应的最佳正交网格, 这是 ISF 理论阐明的理想计算方案, 实际计算应当逼近这一理想方案。

3.2 ISF 最佳坐标系在计算网格设计中的应用

ISF 理论表明计算 ISF 应使用网格线与 ISF 最佳坐标轴方向一致的正交网格, 简称计算 ISF 的最佳网格。为了说明计算 ISF 使用 ISF 最佳网格的必要性, 文^[20, 21] 利用 NS 方程组计算了不可压二维混合层流, 计算网格使用贴混合层分界面正交网格 (即 ISF 最佳网格) 和该网格体系逆时针转动 $15^\circ, 30^\circ$ 和 45° 的正交网格 (称非最佳网格), 参见图 2-图 5, 计算结果表明: 与最佳网格计算结果相比, 转动 45° 非最佳网格下算出的最大速度梯度和最大温度梯度, 仅是前者最大梯度的 40% 和 50%, 远大于工业标准 1.0% 量级的允许误差; 说明对于近壁 ISF 的 NS 计算, 若使用偏离最佳贴体正交网格体系较大的网格体系, 某些物理量的计算误差同样会远大于工业标准允许误差。

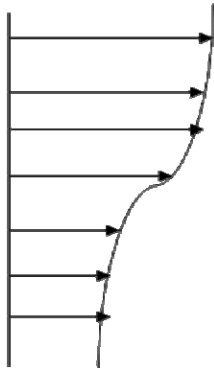


图 2 二维混合层流动

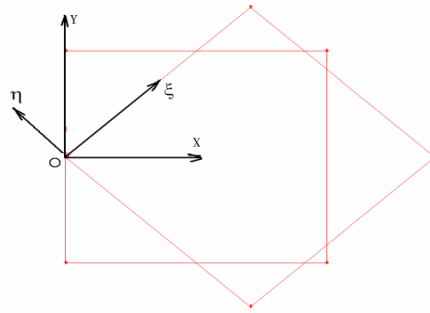


图 3 贴混合层分界面最佳网格和非最佳网格示意图

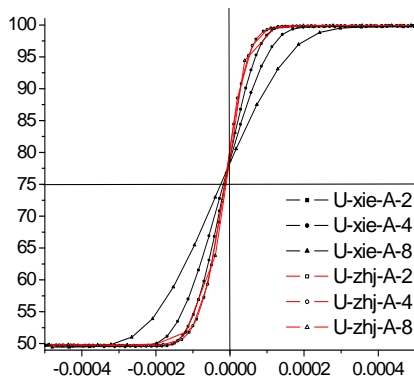


图 4 不同网格设计时的速度剖面比较

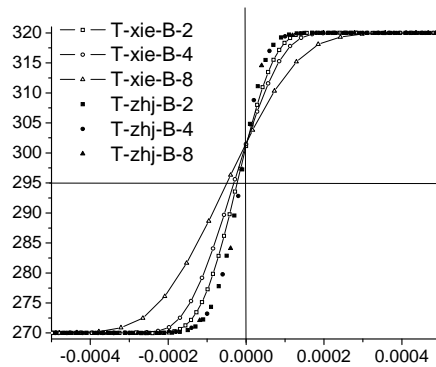


图 5 同时存在速度和温度扩散时的温度剖面图

3.3 ISF 粘性层长度尺度律用于选择网格间距

在流场和 ISF 的 NS 计算中，即使采用了 ISF 最佳网格体系，网格间距仍然是影响计算精度的重要因素，网格间距大小如何选取并无一定的规则。通常采用不同网格间距下多次计算寻找合适或称最佳网格间距。ISF 粘性层长度尺度律显然可以作为选择网格间距的一种选择规则^[23, 32]，文^[22]将该选择规则用于高超声速层流绕流计算，算例是空心圆柱裙 ($M_\infty = 11.35, R_{e\infty} = 3.56 \times 10^5 / \text{米}$) 和尖双锥 ($M_\infty = 9.59, R_{e\infty} = 1.44 \times 10^5 / \text{米}$) 绕流，计算结果表明：当取流向和法向网格间距分别为 l_x 和 l_y 时，可获得较好的数值结果，壁面 Stanton 数和壁面压力系数均与试验更好相符，这里 l_x 和 l_y 分别是干扰参数 $q = 1/4$ 时 ISF 粘性层的长度尺度，参看式 (4) 和式 (5)。ISF 粘性层长度尺度律能否成为选择网格间距的有效选择规则显然需要更多计算的证实，特别是对湍流计算，即根

据有效粘性系数(参见节 2.3)下的粘性湍流层长度尺度律来选择网格间距时，能否获得与层流计算一样的好结果，有待计算的证实。

3.4 ISF 粘性层局部小尺度结构用于计算物理量突变现象

ISF 粘性层尺度律表明：当粘性/无粘干扰严重、干扰参数 $q \geq 1/4$ 时，在壁上的小窄缝、小凸起、小凹坑、小台阶、分离点和再附点邻域 ISF 粘性层将形成流向和法向厚度分别为 $R_e^{-3/8}$ 和 $R_e^{-5/8}$ 的局部小尺度结构^[32-37]，此时 $q = 1/4$ ；当强激波入射 ISF 时，在入射点邻域 ISF 粘性层将形成流向厚度 l_x 和法向厚度 l_y 分别为 $R_e^{-3/8} > l_x > R_e^{-3/4}$ 和 $R_e^{-5/8} > l_y > R_e^{-3/4}$ 的局部小尺度结构，此时 $1/4 < q < 1/2$ 。ISF 粘性层局部小尺度结构的形成必然导致某些物理量如热流、压力梯度等的突变。例如对层流 ISF 和 $R_e = 10^6$ 的情况进行估算，与经典边界层热流相比，当 $q = 1/4$ 和 $1/2$ 时，局部热流分别增大约

5.5 倍和 33 倍,上述估算不仅与试验结果定性相符、且在一定程度上定量相符^[23, 48]。又如对湍流 ISF, 利用有效粘性系数 $\mu_{eff} = \mu + \mu_t$ 近似下的 ISF 粘性湍流层的尺度律, 同样可对 ISTF 粘性湍流层局部热流突增等突变物理量随干扰参数 q 的变化作出估计。

对壁面上小台阶、小凸起、小凹坑、小窄缝附近尺度为 $(R_e^{-3/4}, R_e^{-3/8})$ Triple-deck 理论区域的近似和数值计算已有一些, 如见^[35-37], 但是在大范围流场的 NS 计算中, 利用 ISF 粘性层尺度律作指导数值模拟物理量局部突变的研究尚未看到。必须强调, 对高超声速流准确计算气动力、热局部突变特性十分必要、具有重要的理论意义和工程应用价值。Bertin and Cummings^[27] 根据哥伦比亚 (Columbia) 航天器再入大气飞行中坠毁和 1967 年 X-15 飞行器在飞行马赫数达到 6.7 时局部器件受损等事故的分析, 得到如下结论: “These locally severe, critical heating rates or unexpected deviations to the force and moments acting on the vehicle often occur due to viscous/inviscid interactions. These critical environments are the result of “ unknown-unknown ” or “gotchas”..... Numerical simulation of hypersonic flows is a challenging subject...” . 因此, 准确计算气动力, 热局部突变的位置和突变强度十分重要, 否则会导致高超飞行器局部器件受损甚至使飞行器坠毁。NS 计算中准确预测小尺度结构的位置、并在此位置处在流向、法向甚至侧向

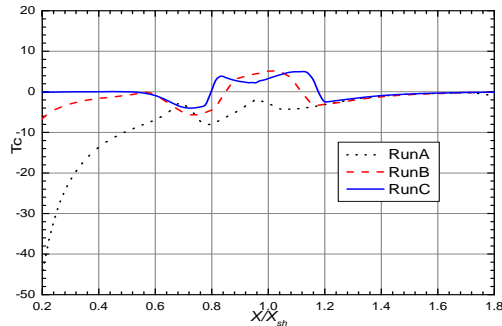


图6 壁面动量判据用于验证激波边界层

局部加密网格都是计算应解决的难题。

3.5 壁面判据用于验证近壁流动 NS 数值解的可信度

Navier-Stokes (NS) 方程组解的存在唯一性并未得到数学证明, NS 数值解是否可信就成为公认的疑问? NS 数值解的可信度问题因此是 CFD 研究的一个关键, 从上世纪末开始, NS 数值解可信度的验证和确认形成了 CFD 研究的一个热点^[28-30]。高智已证实^[38] 12 个熟知的不可压缩流 NS 方程组精确解准确满足壁面判据 (WSC), 合理的推论是 NS 方程组数值解在壁面上应满足壁面判据 (WSC), 因此壁面判据可用来验证绕物体流动 NS 数值解的可信度。该结论的正确性已得到一些 NS 数值解的证实, 这些数值解包括: 二维不可压驻点流^[24]、超声速二维激波/边界层干扰流动^[23, 25]、超声速激波/边界层干扰包含二次涡流动^[26]、高超声速二维压缩拐角流动^[38]、高超声速空心柱裙近壁粘性/无粘干扰流动^[22]、高超声速尖双锥绕流^[22] 等; 壁判据验证 NS 数值解可信度的验证情况参见图 6-图 11。对这些可信度验证计算的初步分析如下: 切向壁动量判据 (WMC) 符合很好, 法向壁动量判据 (WMC) 符合差一些, 主要原因是该判据中的项本身很小为 $O(R_e^{-(1+3q)/2})$, 壁面邻域网格设计和格式精度又难以保证高精度计算; 壁能量判据 (WEC) 符合情况有时出现问题如见^[22, 24], 相比之下, WMC 验证计算都没有出现问题, 这是因为速度壁面条件已包含在 WMC 方程中, 而温度壁面条件不在 WEC 方程之中。

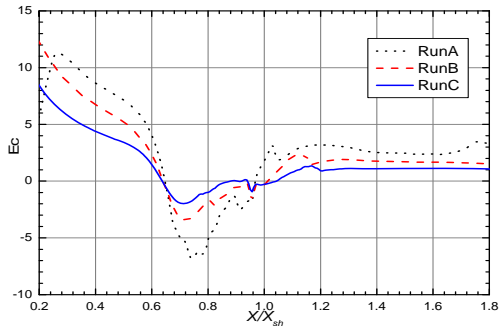


图7 壁面能量判据用于验证激波边界

干扰流动 NS 数值解

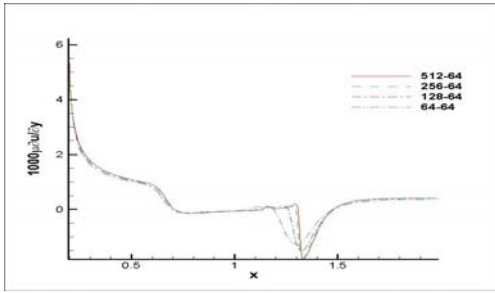


图 8 具有二次涡激波/边界层干扰流动 NS 数值解的壁面压力系数网格收敛分析验证

层干扰流动 NS 数值解

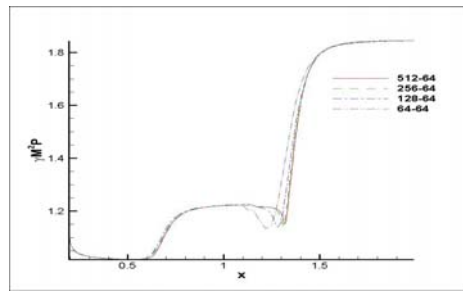


图 9 具有二次涡激波/边界层干扰流 NS 数值解的壁面摩擦系数网格收敛分析验证

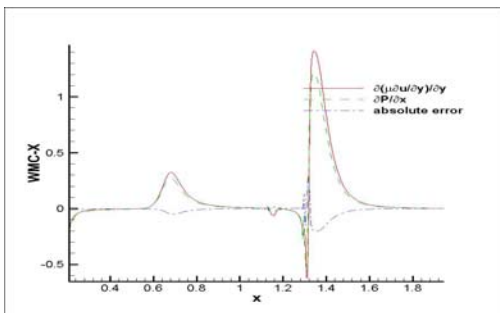


图 10 壁切向动量判据验证具有二次涡激波/边界层干扰流动 NS 数值解

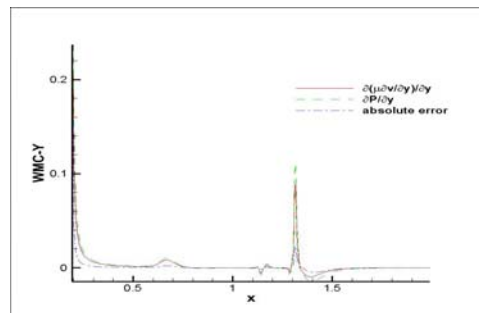


图 11 壁法向动量判据验证具有二次涡激波/边界层干扰流动 NS 数值解

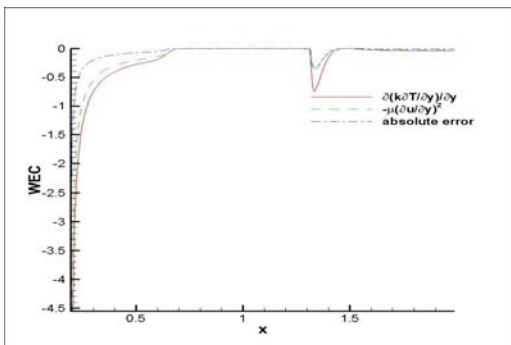


图 12 壁能量判据验证具有二次涡激波/边界层干扰流动 NS 数值解

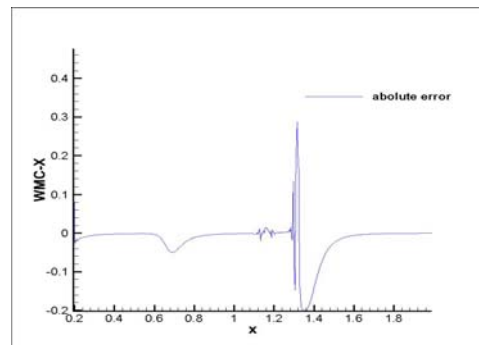


图 13 壁切向动量判据验证具有二次涡激波/边界层干扰流动 NS 数值解的绝对误差

壁判据验证方法的要点是：若 NS 数值解满足壁判据 (WSC)、则该数值解为 NS 真解、也就是网格无关解；若 NS 数值解不满足 WSC，则可通过加密网格计算使 NS 数值解实现满足 WSC，WSC 得到满足时的 NS 数值解即为网格无关解或 NS 真解。由于 WSC 为方程，

因此只要在一套网格上做一次 NS 计算便可知道该 NS 数值解偏离 NS 真解的偏离程度，与通常采用的网格收敛分析验证方法相比，这是 WSC 方法的一个突出优点。通常的网格收敛分析方法^[28-30]选取某些特征量或分布，如壁面摩擦系数分布、壁面 Stanton 数分布

等作验证标准，通过网格加密及修正、重复 NS 计算、直到特征量或分布达到收敛时得到网格无关 NS 数值解即真解；因此该方法至少需要三次 NS 计算才能知道网格无关解的走向。

3.6 湍流模型壁判据的应用

在湍流工程计算中，不论 RANS 方法，还是 RANS 和 LES 或 DES 混合方法^[45-47]，在紧邻固壁邻域多采用 RANS 方法和雷诺应力模型。湍流模型壁判据，参见节 2 和方程 (17) - (22)，既可用于验证湍流方程模型计算的可信度，也可以从满足湍流模型壁判据的角度，优化湍流模型参数（如 Prandtl 混合长）和经验常数。例如对 Prandtl 混合长湍流模型^[33]和 Balowin-Lomax 代数应力模型^[11]，由近壁湍流模型壁判据方程 (19)，求得经典湍流边界层 $(\partial p / \partial x)_w = 0$ 的优化 Prandtl 混合长 l_{op} 为^[39]

$$l_{op} = \left(\frac{\mu y}{5.79 \rho u_\tau} \right)^{1/2} \quad (23)$$

而 Prandtl 混合长 l_p 近似为^[15]

$$l_{op} = \begin{cases} 0.4y & y \leq y_c \\ const & y > y_c \end{cases} \quad (24)$$

其中 $u_\tau = (\tau_w / \rho)^{1/2}$ 为动力速度， τ_w 为壁面摩擦力， $y_c = 0.15\delta - 0.20\delta$ ， δ 为边界层厚度。理论上，Prandtl 混合长 l_p 适用于经典湍流边界层，优化混合长 l_{op} 能否适应 ISTF 粘性层，这里 $(\partial p / \partial x)_w \neq 0$ ，尚未得到验证，按理对流向长度尺度显著变化的 ISTF，最好在流向也引入新的长度尺度。

3.7 壁判据给出了新的压力壁面条件

在粘性流体力学中，压力并无自然的边界条件，经典边界层理论给出的近似公式

$$\left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)_w = 0 \quad (25)$$

已成为公认的压力壁面条件，在 NS 计算中得到普遍的使用。ISF 理论和 ISTF 理论给出了新的压力壁面条件，对层流为

$$\left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)_w = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right)_w \quad (26)$$

对湍流，取 RANS 方程时为

$$\left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} \right)_w = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} - \overline{\rho v' v'} \right)_w \quad (27)$$

对不可压层流 ISF，压力壁面条件 (26) 右端项的数量级估计为 $R_e^{-(1-3q)/2}$ ， $q = 0, 1/4, 1/3$ 和 $1/2$ 时右端项数量分别为 $R_e^{-1/2}$ ， $R_e^{-1/8}$ ， R_e^0 和 $R_e^{1/4}$ 。湍流压力壁面条件右端项比层流右端项大。因此对于干扰参数 $q \neq 0$ 的 ISF 流动区域，压力壁面条件应该考虑使用式 (26) 和式 (27)。

4. 结束语

抛物化 NS(PNS)方程得到了广泛的应用，PNS 方法已成为工业标准气动计算的基础^[3]。粘性/无粘干扰剪切流动 (ISF) 理论不仅阐明了 PNS 描述什么样的基本流动，且提供了 PNS 的流体力学的基本理论；特别是 ISF 理论及其推论在 CFD 计算中有诸多的应用，例如对高 R_e 数流动 NS 计算的坐标系选取和网格设计提供了指导和建议；揭示了气动力热局部突变的流动机理和计算它们的正确的途径；对近壁大范围粘性/无粘干扰流动 NS 计算，提供了新的压力壁面条件；特别是对 NS 数值解的可信度的验证和确认，提供了壁面判据 (WSC) 新方法，提供了优化湍流模型参数的新方法，这些应用和方法已得到初步的数值验证。ISF 理论在干扰参数为零即粘性/无粘无干扰时为经典边界层理论。边界层理论在 CFD 计算中的用途和作用，Schlichting 和 Gersten 在专著^[33]中作了简要的说明：“However numerical methods in computing flows at high

Reynolds numbers only become efficient if the particular layered(i.e. thin layer) structure of the flow, as given by the asymptotic theory, is taken into account, as occurs if a suitable grid is used for computation. Boundary-layer theory will therefore retain its fundamental place in the calculations of high Reynolds number flows.”对 CFD 计算, ISF 理论具有与边界层理论同样的地位和作用, 且用途更多, 因此值得大家关注、并在高 R_e 数流动 NS 计算中加以应用。

每当谈到抛物化 NS(PNS)方法是工业标准气动计算的基础时, 我们都会想起我国气动界已故领导人庄逢甘先生。庄先生在世时一直倡导和推动 PNS 方法的研究和工程应用, 早在改革开放初期, 他就找高智了解 1967 年提出简化 NS 方程及应用计算的情况; 1987 年他与张涵信在美国 AIAA 学术会议上发表了“中国的计算流体力学”的论文, 前言中介绍了高智提出简化 NS 方程并与中科院计算中心研究人员合作应用于高超声速绕流计算, 该论文称高智提出的简化 NS 方程为 first PNS; 后来他又在空气动力学学报发表了“扩散抛物化 NS 方程组的意义及在计算流体力学中的应用”的论文; 在我国气动界极力倡导和推动 PNS 方法的工程应用计算, 直到他去世前两三年仍在鼓励年轻同志开发具有自主知识产权, 能够提供工程应用的 PNS 空间推进计算软件。

仅以此文缅怀庄逢甘先生。

注：本项目得到国家自然科学基金项目(11272324, 11272325)资助。

参考文献

- [1] 美国国家理论与应用力学委员会流体力学的研究：面向国家需求. 力学进展, 2006, 36(4):619-625
- [2] Van Leer B. Computational Fluid Dynamics: science or toolbox? AIAA Paper, 2001-2520, 2001
- [3] Anderson JD Jr. Hypersonic and High-Temperature Gas Dynamics (2nd ed.) [M] AIAA Education Series 2006
- [4] Kanl VK . etal AFWAL PNS Code AFWAL-JR-83-3118, 1983
- [5] WIND (Version 5.0) User' s Guide. The NPARC Alliance, NASA Glenn Research Center, USAF Arnold EDC, 2003
- [6] GASP 4.0 User Manual, Aero soft, Inc. 2002
- [7] VIPER, Software and Engineering Associates, Inc. 2003
- [8] FPNS Code, Aero technologies, Inc.
- [9] VULCAN CFD Code NASA, Hypersonic Airbreathing Propulsion Branch.
- [10] NASA Langley, 2012. CFD resources at NASA Langley: Computational Fluid Dynamics. <http://aac.larc.nas.gov/tsab/cfdlare>
- [11] Baldwin BS, Lomax H. Thin-layer Navier-Stokes approximation and algebraic model for separated turbulent flows[R]. AIAA paper 78-0257, 1978
- [12] Blottner FG. Significance of the thin-layer Navier-Stokes approximation[A]. In: Cebeci T. ed. "Numerical and physical Aspects of Aerodynamic flow III". (pp. 184-205) Springer-Verlag, New York 1986
- [13] 庄逢甘, 张德良. 扩散抛物化 (DP) NS 方程组的意义及其在计算流体力学 (CFD) 中的应用. 空气动力学学报, 2003, 21(1): 1-10
- [14] Ferziger JH, Peric M. Computational Methods for Fluid Dynamics (2nd Ed.) Springer, 2003
- [15] Hoffman KA, Chiang ST. Computational Fluid Dynamics for Engineers. Vol I-Vol III (4th Ed.) Engineering Education System. 2001
- [16] Vos JB, Rizzi A, Darracq D, Hirschel EH. Navier-Stokes solvers in European aircraft design. Prog. Aerospace Sci. 2002, 38: 601-697
- [17] 高智. 粘性/无粘干扰流动理论. 力学学报, 1990, 22(1): 9-19
- [18] 高智. 二维粘性/无粘干扰剪切端流理论, 中国科学(A辑). 1992, 22(6):605-615
- [19] 干扰剪切流 (ISF) 理论、扩散抛物化 (DP) NS 方程方程和壁面判据及它们的应用. 中国力学文摘, 2007, 21(3):13-22
- [20] 于勇. 二维混合层计算的网格设计-ISF 理论的一个应用. Jour. BIT 在评审中
- [21] Yu Y. Gao' s interacting shear flow (ISF) theory and its inferences and their applications in CFD[J]. Jour. BIT 2013, 22(1):120-130
- [22] Yu. Y, Zhang HR. A guidance to grid size design for CFD numerical simulation of hypersonic flows. Procedia Engineering. 2013 7th APCATS 2013
- [23] 徐新文. 评估 CFD 计算可信度的壁判据方法: 分析和应用. 北京理工大学, 硕士学位论文, 2012
- [24] Yu Y. New CFD validation method with application to verify computation of near wall flow[J]. Jour. Beijing Institute of Technology, 2010, 19(3):259-263
- [25] 贺旭照. 二维激波/边界层分离干扰流动数值模拟可信度的壁判据验证. 私人通信
- [26] 刘升平, 申义庆. 有二次涡激波边界层干扰流动数值解的壁判据验证. 高温气体动力学国家重点实验室 2013 年夏季研讨会, 2013
- [27] Bertin JJ, Cummings RM. Critical hypersonic aerothermodynamics phenomena, Annu. Rev. Fluid Mech. 2006, 38:129-157
- [28] Rizzi JV. Towards establishing creditability in Computational Fluid Dynamics (CFD) Simulations. AIAA Jour. 1998 36(5):668-675

- [29] Oberkampf WL, Trucano TG. Validations methodology in computational fluid dynamics AIAA paper 2000-2549, 2000
- [30] 邓小刚, 宗文刚, 张来平. 计算流体力学(CFD)的验证与确认. 力学进展 2007, 37(2):279-288
- [31] 董海涛, 姚冰等. CFD 差分格式的二维数值粘性对边界层的影响研究, 第15届全国计算流体力学会议论文集(77-84页), 2012. 8, 山东烟台
- [32] 高智. 强粘性层流动理论及其对粘性流动计算的应用. 空气动力学学报, 2001, 19(4):420-426
- [33] Schlichting H, Gersten K. Boundary-Layer Theory. Springer, 2000
- [34] Stewartson K. Some recent studies in triple-deck theory. In: T.Cebeci(Ed.): Numerical and physical aspects of aerodynamics Flows. Springer-Verlag, (pp.129-143) 1982
- [35] Davis. R. T, Werle MT. Progress in interacting boundary-larger computations at high Reynolds number. In:T.Cebeci(Ed.): Numerical and Physical Aspects of Aerodynamic Flows. Springer-Verlag, New York (pp:187-210) 1982
- [36] Inger GR, Triple-deck theory of supersonic laminar viscous/inviscid interaction due to wall temperature jumps. Progress in Aerospace Science, 2007, 43:42-63
- [37] Agrawal S Messite AF. Turbulent boundary larger interaction with a shock wave at a compression corner. J. Fluid Mech. 1984, 143:23-46
- [38] 高智. 壁面判据用于粘性流计算可信度评估. 空气动力学学报, 2008, 26(3):378-393
- [39] 高智. 高智壁面判据方法能替代常用的网格收敛性分析方法么? 2012年夏季学术讨论会议文集(113-122页), 高温气体动力学国家重点实验室(筹), 2012, 8 吉林延吉
- [40] Gao zhi. The basis of an industry-standard aerodynamic computation and its theoretical basis with inference and applications. Procedia Engineering 2013, 7th APCATS 2013
- [41] 高智. 对流扩散相互作用尺度结构的不变性. 力学学报, 1992, 24(6):661-670
- [42] 李明军, 高智. 抛物化定稳定性方程(PSE)椭圆性质的分析和应用, 应用数学学报, 2003, 24(11):1179-85
- [43] Herbert Th, Bertolotti, FP. Stability analysis of non-parallel boundary layer. Bull. American Phys. Soc. 1987, 32(8):2097-2112
- [44] Herbert T. Parabolized stability equations. Annu. Rev. Fluid Mech. 1997, 29:245-283
- [45] Jochen Frohlich, Dominic von Terzi. Hybrid LES/RANS methods for the simulation of turbulent flows. Progress in Aerospace Science, 2008, 44:349-377
- [46] 高瑞泽等. 新型动态 LES/RANS 混合方法. 第15届全国计算流体力学会议论文集(112-118页) 2012, 山东烟台
- [47] Spalart PR, etal. A new version of detached-eddy simulation, resistant to ambiguous grid densities. Theoretical and Computational Fluid Dynamics, 2006, 20(3):181-195
- [48] 李素循. 典型物型高超声速绕流特性. 国防工业出版社, 北京, 2007