

# 三维时空守恒(CE/SE)算法数值研究

张德良

中国科学院力学研究所, 高温气体动力学国家重点实验室(筹), 北京海淀区 100190

**摘要:** 本文主要介绍了一种改进的三维 CE/SE 算法, 给出了三维 CE/SE 算法交错网格差分格式, 并对三维 Riemann 问题、双楔面激波反射问题, 激波绕多个障碍物流动问题进行了数值实验。数值结果表明, 我们提出的三维 CE/SE 算法交错网格格式具有格式简单、计算精度高、效果好的优点。

**关键词:** 三维 CE/SE、交错网格、激波、数值模拟

## 0 引言

计算流体力学 (Computational Fluid Dynamics, 简称 CFD) 是 20 世纪 60 年代伴随着计算机科学迅速崛起而形成的一门新兴学科。在过去几十年里计算流体力学得到了相当大发展, 已经深入到流体力学各个领域, 计算流体力学数值算法已成为研究流体力学三大方法 (分析、实验和数值模拟) 之一。

目前计算流体差分格式主要有中心格式、FDS 格式、FVS 格式、AUSM 类格式以及 TVD 与 ENO 类格式。经过多年发展, 上述格式已经基本成熟并且在工程中得到广泛的应用, 取得了较好计算效果。特别是 TVD 类型的差分格式发展已相当成熟, 于是人们纷纷期望尽快摆脱 TVD 思想的束缚, 发展一些新概念、新思想的计算方法。近年来, 国内外已经逐步出现了一些新的高精度算法, 虽然这些算法还不够成熟, 不能像上述这些算法那样在计算流体力学界占主导地位, 但是它们对计算流体力学的影响和作用已经逐渐显露出来。

时一空守恒元解元算法(CE/SE Method)[1、2]就是近年来兴起的一种具有代表性的一种新的数值算法。无论从概念上还是从方法论上都与传统的数值算法有着本质的区别。它把时间与空间完全统一起来同等看待, 并从守恒型方程的积分形式出发, 通过设立守恒元和解元, 使格式局部和全局都严格保证其物理意义上的守恒律。同时, 它把流动量及其对空间的偏导数都作为独立变量同时求解, 从而减少了数值计算过程中的误差。因此 CE/SE 算法具有: 构

造简单, 便于边界处理; 格式通用性好; 计算精度高等优点。此外, 它除了利用简单的 Taylor 展开外, 无需任何其他数值逼近技术, 也不需要任何单调性限制或特征分解技术, 在推广到多维格式时无需使用算子分裂法, 它是一种真正的多维格式。

十余年来我们对 CE/SE 算法进行了深入研究, 改造了原来 CE/SE 算法网格结构, 提出了六面体网格结构和正位网格思想, 使得算法更加简单明了, 并和预处理法、杂交粒子 Level Set 法等结合成功地捕捉了多种流体流动界面。在改进算法的同时, 我们把 CE/SE 算法广泛地推广应用于流体力学的各个领域: 超声速流动与激波传播、化学反应流动 (燃烧与爆轰) [3, 4]、不可压缩粘性流动 (溃坝流、双层方腔流流动、液滴坠落与破碎、不稳定性[5])、多相流动 (多相爆轰[6])、多孔介质与空隙介质流动[7], 最后, 我们还把它成功地推广应用于超高速撞击问题 (流体弹塑性) [8]。

## 1 CE/SE 差分格式

本文的三维 CE/SE 差分格式是在原有的改进的 CE/SE 二维差分格式基础上推广得到的。

考虑直角坐标系下非定常守恒型 Euler 方程组:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial E(U)}{\partial x} + \frac{\partial F(U)}{\partial y} + \frac{\partial G(U)}{\partial z} = 0 \quad (1.1)$$

其中:

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ e \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ (e+p)u \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ (e+p)v \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho w \\ \rho w^2 + p \\ (e+p)w \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

利用 Gauss 散度定理将方程微分形式化为积分形式：

$$\oint_{S(V)} \mathbf{H}_m \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (1.3)$$

$$\mathbf{H}_m = (E_m, F_m, G_m, U_m) \quad (m=1\sim5) \quad (1.4)$$

其中  $S(V)$  是四维时空求解区域边界， $d\mathbf{s} = \mathbf{n} \cdot d\sigma$ ， $\mathbf{n}$  是  $S(V)$  的外法向单位矢量， $d\sigma$  是  $S(V)$  上的微元体积。

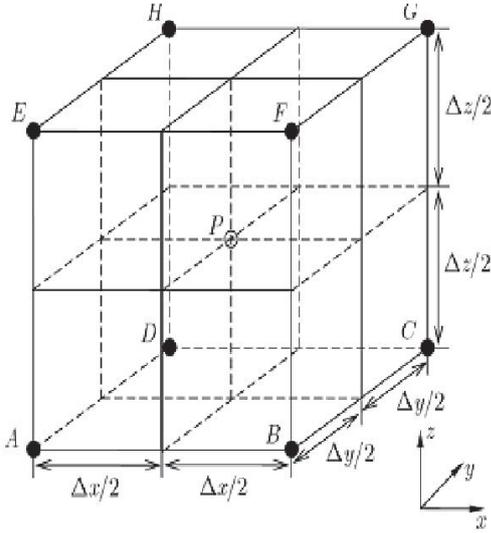


图 1.1 空间网格示意图

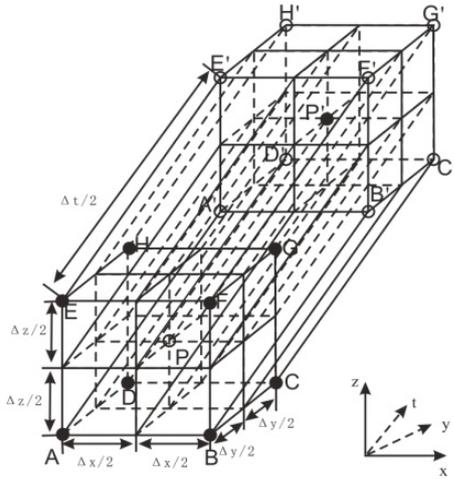


图 1.2 守恒元示意图

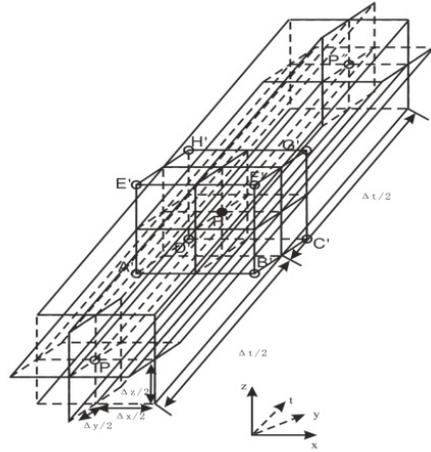


图 1.3 解元示意图

将时间和空间统一进行网格划分，空间网格如图 1.1 所示。在求解每一个网格点时定义一个守恒元(CE)(图 1.2) 和解元(SE)(图 1.3),守恒元和解元都是由一系列长方体构成。

对于解元中任意一点的物理量用解元基点(图 1.3 中心的小黑点, 记为  $P'$ ) 的 Taylor 展开表示, 距离基点  $(dx, dy, dz, dt)$  的点的物理量可表示为:

$$U_m(dx, dy, dz, dt)_{P'} = (U_m)_{P'} + (U_{mx})_{P'} dx + (U_{my})_{P'} dy + (U_{mz})_{P'} dz + (U_{mt})_{P'} dt \quad (1.5)$$

$$E_m(dx, dy, dz, dt)_{P'} = (E_m)_{P'} + (E_{mx})_{P'} dx + (E_{my})_{P'} dy + (E_{mz})_{P'} dz + (E_{mt})_{P'} dt \quad (1.6)$$

$$F_m(dx, dy, dz, dt)_{P'} = (F_m)_{P'} + (F_{mx})_{P'} dx + (F_{my})_{P'} dy + (F_{mz})_{P'} dz + (F_{mt})_{P'} dt \quad (1.7)$$

$$G_m(dx, dy, dz, dt)_{P'} = (G_m)_{P'} + (G_{mx})_{P'} dx + (G_{my})_{P'} dy + (G_{mz})_{P'} dz + (G_{mt})_{P'} dt \quad (1.8)$$

其中  $(U_m)_{P'}$ 、 $(E_m)_{P'}$ 、 $(F_m)_{P'}$ 、 $(G_m)_{P'}$ ； $(U_{mx})_{P'}$ 、 $(E_{mx})_{P'}$ 、 $(F_{mx})_{P'}$ 、 $(G_{mx})_{P'}$ ； $(U_{my})_{P'}$ 、 $(E_{my})_{P'}$ 、 $(F_{my})_{P'}$ 、 $(G_{my})_{P'}$ ； $(U_{mz})_{P'}$ 、 $(E_{mz})_{P'}$ 、 $(F_{mz})_{P'}$ 、 $(G_{mz})_{P'}$ ； $(U_{mt})_{P'}$ 、 $(E_{mt})_{P'}$ 、 $(F_{mt})_{P'}$ 、 $(G_{mt})_{P'}$  分别是解元基点  $U_m$ 、 $E_m$ 、 $F_m$  和  $G_m$  的物理量及其对  $x$  方向、 $y$  方向、 $z$  方向和  $t$  方向的导数值。

将(1.5)~(1.8)式代入(1.1)式得：

$$(U_{mt})_{P'} = -(E_{mx})_{P'} - (F_{my})_{P'} - (G_{mz})_{P'} \quad (1.9)$$

由此可知  $U_m$  的时间导数可通过  $E_m$ 、 $F_m$ 、 $G_m$  的空间导数求得，而  $E_m$ 、 $F_m$ 、 $G_m$  是  $U_m$  的函数，它们的时间和空间导数可由  $U_m$  的时间和空间导数求得。因此求解过程中需要求解的变量有  $(U_m)_{P'}$ 、 $(U_{mx})_{P'}$ 、 $(U_{my})_{P'}$ 、 $(U_{mz})_{P'}$ 。

借助守恒量的 Taylor 展开，在守恒元上求解积分表达式(1.3)可以得到数值格式：

$$(U_m)_{P'} = \frac{1}{8} \left( \bar{U} + \frac{\Delta t}{\Delta x} \bar{E} + \frac{\Delta t}{\Delta y} \bar{F} + \frac{\Delta t}{\Delta z} \bar{G} \right) \quad (1.10)$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{U} &= U_m \left( \frac{\Delta x}{4}, \frac{\Delta y}{4}, \frac{\Delta z}{4}, 0 \right)_A + U_m \left( -\frac{\Delta x}{4}, \frac{\Delta y}{4}, \frac{\Delta z}{4}, 0 \right)_B \\ &+ U_m \left( -\frac{\Delta x}{4}, -\frac{\Delta y}{4}, \frac{\Delta z}{4}, 0 \right)_C + U_m \left( \frac{\Delta x}{4}, -\frac{\Delta y}{4}, \frac{\Delta z}{4}, 0 \right)_D \\ &+ U_m \left( \frac{\Delta x}{4}, \frac{\Delta y}{4}, -\frac{\Delta z}{4}, 0 \right)_E + U_m \left( -\frac{\Delta x}{4}, \frac{\Delta y}{4}, -\frac{\Delta z}{4}, 0 \right)_F \\ &+ U_m \left( -\frac{\Delta x}{4}, -\frac{\Delta y}{4}, -\frac{\Delta z}{4}, 0 \right)_G + U_m \left( \frac{\Delta x}{4}, -\frac{\Delta y}{4}, -\frac{\Delta z}{4}, 0 \right)_H \\ \bar{E} &= E_m \left( 0, \frac{\Delta y}{4}, \frac{\Delta z}{4}, \frac{\Delta t}{4} \right)_A - E_m \left( 0, \frac{\Delta y}{4}, \frac{\Delta z}{4}, \frac{\Delta t}{4} \right)_B \\ &- E_m \left( 0, -\frac{\Delta y}{4}, \frac{\Delta z}{4}, \frac{\Delta t}{4} \right)_C + E_m \left( 0, -\frac{\Delta y}{4}, \frac{\Delta z}{4}, \frac{\Delta t}{4} \right)_D \\ &+ E_m \left( 0, \frac{\Delta y}{4}, -\frac{\Delta z}{4}, \frac{\Delta t}{4} \right)_E - E_m \left( 0, \frac{\Delta y}{4}, -\frac{\Delta z}{4}, \frac{\Delta t}{4} \right)_F \\ &- E_m \left( 0, -\frac{\Delta y}{4}, -\frac{\Delta z}{4}, \frac{\Delta t}{4} \right)_G + E_m \left( 0, -\frac{\Delta y}{4}, -\frac{\Delta z}{4}, \frac{\Delta t}{4} \right)_H \\ \bar{F} &= F_m \left( \frac{\Delta x}{4}, 0, \frac{\Delta z}{4}, \frac{\Delta t}{4} \right)_A + F_m \left( -\frac{\Delta x}{4}, 0, \frac{\Delta z}{4}, \frac{\Delta t}{4} \right)_B \\ &- F_m \left( -\frac{\Delta x}{4}, 0, \frac{\Delta z}{4}, \frac{\Delta t}{4} \right)_C - F_m \left( \frac{\Delta x}{4}, 0, \frac{\Delta z}{4}, \frac{\Delta t}{4} \right)_D \\ &+ F_m \left( \frac{\Delta x}{4}, 0, -\frac{\Delta z}{4}, \frac{\Delta t}{4} \right)_E + F_m \left( -\frac{\Delta x}{4}, 0, -\frac{\Delta z}{4}, \frac{\Delta t}{4} \right)_F \\ &- F_m \left( -\frac{\Delta x}{4}, 0, -\frac{\Delta z}{4}, \frac{\Delta t}{4} \right)_G - F_m \left( \frac{\Delta x}{4}, 0, -\frac{\Delta z}{4}, \frac{\Delta t}{4} \right)_H \\ \bar{G} &= G_m \left( \frac{\Delta x}{4}, \frac{\Delta y}{4}, 0, \frac{\Delta t}{4} \right)_A + G_m \left( -\frac{\Delta x}{4}, \frac{\Delta y}{4}, 0, \frac{\Delta t}{4} \right)_B \\ &+ G_m \left( -\frac{\Delta x}{4}, -\frac{\Delta y}{4}, 0, \frac{\Delta t}{4} \right)_C + G_m \left( \frac{\Delta x}{4}, -\frac{\Delta y}{4}, 0, \frac{\Delta t}{4} \right)_D \\ &- G_m \left( \frac{\Delta x}{4}, \frac{\Delta y}{4}, 0, \frac{\Delta t}{4} \right)_E - G_m \left( -\frac{\Delta x}{4}, \frac{\Delta y}{4}, 0, \frac{\Delta t}{4} \right)_F \\ &- G_m \left( -\frac{\Delta x}{4}, -\frac{\Delta y}{4}, 0, \frac{\Delta t}{4} \right)_G - G_m \left( \frac{\Delta x}{4}, -\frac{\Delta y}{4}, 0, \frac{\Delta t}{4} \right)_H \end{aligned}$$

利用解元物理量在交界处的连续性，可以得到  $U_m$  的空间导数：

$$\begin{aligned} (U_{mx})_{P'}^- &= -\frac{1}{2\Delta x} \left[ U_m \left( 0, 0, 0, \frac{\Delta t}{2} \right)_A + U_m \left( 0, 0, 0, \frac{\Delta t}{2} \right)_D \right. \\ &\left. + U_m \left( 0, 0, 0, \frac{\Delta t}{2} \right)_E + U_m \left( 0, 0, 0, \frac{\Delta t}{2} \right)_H - 4(U_m)_{P'} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (U_{mx})_{P'}^+ &= +\frac{1}{2\Delta x} \left[ U_m \left( 0, 0, 0, \frac{\Delta t}{2} \right)_B + U_m \left( 0, 0, 0, \frac{\Delta t}{2} \right)_{C_{P'}} \right. \\ &\left. + U_m \left( 0, 0, 0, \frac{\Delta t}{2} \right)_F + U_m \left( 0, 0, 0, \frac{\Delta t}{2} \right)_G - 4(U_m)_{P'} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (U_{my})_{P'}^- &= -\frac{1}{2\Delta y} \left[ U_m \left( 0, 0, 0, \frac{\Delta t}{2} \right)_A + U_m \left( 0, 0, 0, \frac{\Delta t}{2} \right)_B \right. \\ &\left. + U_m \left( 0, 0, 0, \frac{\Delta t}{2} \right)_E + U_m \left( 0, 0, 0, \frac{\Delta t}{2} \right)_F - 4(U_m)_{P'} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (U_{my})_{P'}^+ &= +\frac{1}{2\Delta y} \left[ U_m \left( 0, 0, 0, \frac{\Delta t}{2} \right)_C + U_m \left( 0, 0, 0, \frac{\Delta t}{2} \right)_D \right. \\ &\left. + U_m \left( 0, 0, 0, \frac{\Delta t}{2} \right)_H + U_m \left( 0, 0, 0, \frac{\Delta t}{2} \right)_G - 4(U_m)_{P'} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (U_{mz})_{P'}^- &= -\frac{1}{2\Delta z} \left[ U_m \left( 0, 0, 0, \frac{\Delta t}{2} \right)_A + U_m \left( 0, 0, 0, \frac{\Delta t}{2} \right)_B \right. \\ &\left. + U_m \left( 0, 0, 0, \frac{\Delta t}{2} \right)_C + U_m \left( 0, 0, 0, \frac{\Delta t}{2} \right)_D - 4(U_m)_{P'} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (U_{mz})_{P'}^+ &= +\frac{1}{2\Delta z} \left[ U_m \left( 0, 0, 0, \frac{\Delta t}{2} \right)_E + U_m \left( 0, 0, 0, \frac{\Delta t}{2} \right)_F \right. \\ &\left. + U_m \left( 0, 0, 0, \frac{\Delta t}{2} \right)_G + U_m \left( 0, 0, 0, \frac{\Delta t}{2} \right)_H - 4(U_m)_{P'} \right] \end{aligned} \quad (1.11)$$

其中  $(U_{mx})_{P'}^-$ 、 $(U_{mx})_{P'}^+$ 、 $(U_{my})_{P'}^-$ 、 $(U_{my})_{P'}^+$ 、 $(U_{mz})_{P'}^-$ 、 $(U_{mz})_{P'}^+$  是守恒元中  $P'$  点空间导数的差商，对它们作加权平均得到  $U_m$  的导数值：

$$\begin{aligned} (U_{mx})_{P'} &= W[(U_{mx})_{P'}^-, (U_{mx})_{P'}^+, \alpha] \\ (U_{my})_{P'} &= W[(U_{my})_{P'}^-, (U_{my})_{P'}^+, \alpha] \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$(U_{mz})_{P'} = W[(U_{mz})_{P'}^-, (U_{mz})_{P'}^+, \alpha]$$

加权平均函数  $W$  为：

$$W[x_-, x_+, \alpha] = \frac{|x_+|^\alpha x_- + |x_-|^\alpha x_+}{|x_+|^\alpha + |x_-|^\alpha} \quad (1.13)$$

如果不存在强间断取  $\alpha = 0$ ；对于有强间断存在的情况，通常情况下取  $\alpha = 1 \sim 2$  以抑制数值振荡。

## 2 数值算例

### 2.1 一维激波管问题

为了验证上述推导的三维 CE/SE 差分格式可靠性，我们首先对具有精确解的一维激波管[9]的算例进行了数值模拟。在一根尺寸为  $2.0 \times 0.2 \times 0.2$  的激波管中充满了理想气体，在中部有一隔膜将气体分成了两部分， $t=0$  时刻两部分气体状态为：

$$(\rho, u, v, w, p) = \begin{cases} (1.0, 0, 0, 0, 1.0), & 0 \leq x \leq 1 \\ (0.125, 0, 0, 0, 0.1), & 1 < x \leq 2 \end{cases} \quad (2.1)$$

计算开始时隔膜突然打开，两部分气体开始自由混合。计算网格为  $300 \times 300 \times 300$ ，为了验证算法，我们将结果与一维三阶 ENO 格式[10]用 300 网格计算得到的结果进行了比较，如图 2.1 所示。

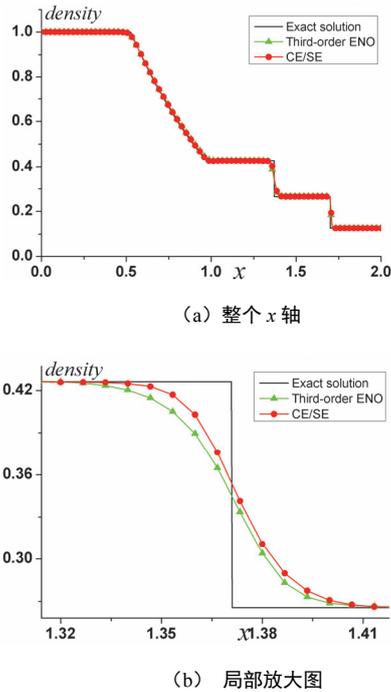


图 2.1 一维激波管问题密度分布比较 (精确解、CE/SE、ENO)

计算结果表明，在同样的网格数量条件下，采用 CE/SE 差分格式的计算结果精度要高于 3 阶 ENO 差分格式的结果，并与精确解吻合得很好。这表明采用我们所推导的三维 CE/SE 差分格式进行计算是可靠的。

### 2.2 三维黎曼问题

现把上述的一维 Riemann 问题推广到三维黎曼问题。在一个三维立方体 ( $2.0 \times 2.0 \times 2.0$ ) 区域内用隔膜将气体分成状态不同的八个部分，相邻的部分具有不同密度和温度，法向速度和压力相等，而切向速度大小相等方向相反，这符合接触间断的基本特性。当计算启动，隔膜自动消失，在接触间断的附近将会产生复杂的三维涡结构，激波间断、接触间断与涡结构相互作用，流动将会变得非常复杂。图 2.2 给出了

三维 Riemann 问题数值结果，计算结果完全说明上述的三维 CE/SE 差分格式是有效的。

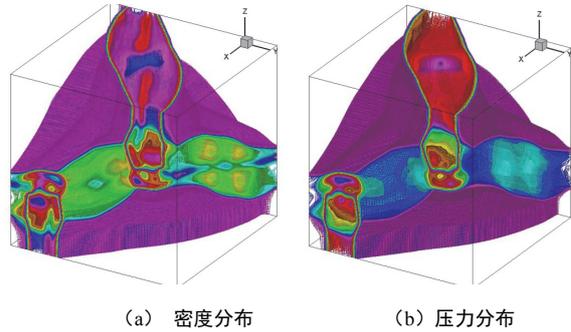


图 2.2 三维 Riemann 问题数值结果 ( $200 \times 200 \times 200$  网格,  $t=0.2$ )

### 2.3 三维后台阶激波绕射问题

二维后台阶问题已经有很多学者进行了计算，并和实验结果进行了对比，但是三维后台阶问题目前还没有实验和计算结果。这里我们用本文的三维 CE/SE 算法对该问题进行了数值模拟。计算区域是一个  $2.0 \times 2.0 \times 2.0$  的立方体区域，在区域的一个角落放置一个  $1.0 \times 1.0 \times 1.0$  的立方体台阶。计算网格为  $200 \times 200 \times 200$ ，激波马赫数取 1.3。

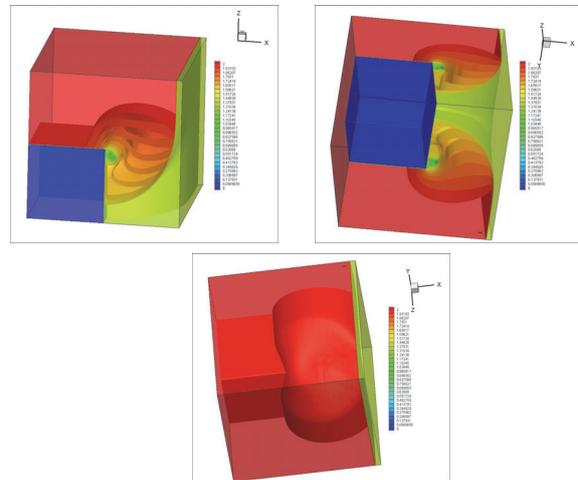


图 2.3 三维激波绕后台阶流动问题数值结果 (不同角度密度分布  $t=1.5$ )

图 2.3 三维激波绕后台阶流动问题数值结果，它给出了不同角度激波绕后台阶时的绕射流场。为了便于比较，我们在三维计算流场中取出了二维激波绕后台阶流场的计算结果，它和实验结果相当好的吻合，这再次验证了我们的三维 CE/SE 差分格式的有效性。

当激波从台阶绕过时将会形成两个扇形的涡结构，两个涡在台阶交界处会发生相互作用，这时会形成很复杂的流场，它比二维后台阶问题要复杂得多。

### 2.4 三维激波双楔面反射问题

三维激波双楔面反射问题是一个很好的三维激波反射问题。目前已有一些学者通过理论[11]、实验[12]和计算手段对该问题进行了探索，得到了一些很有价值的结论。计算模型如图 2.4 所示，计算区域尺寸为  $2.0 \times 2.0 \times 2.0$ ，在距离入口平面 ADHE0.5 处放置两个楔面，水平楔面的倾角为  $\alpha$ ，垂直楔面倾角为  $\beta$ ，ON 是两个楔面的交线。初始时刻在入口处有一平面激波。计算中网格数为  $200 \times 200 \times 200$ 。

图 2.5 给出  $\alpha=45^\circ, \beta=45^\circ, Ms=2.85$  的计算结果。图 2.5a 为数值计算的密度分布，图 2.5b 为实验的密度分布。比较可以看出三维 CE/SE 差分格式的计算结果和实验室非常吻合的。在激波绕过双楔面过程中，在两个楔面上将分别形成两个马赫杆，这与二维理论也是符合的。在楔面交线附近，由于两个马赫杆相互作用，将会形成一个向前倾的三维马赫杆结构。

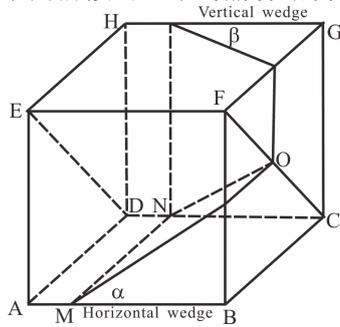


图 2.4 三维激波双楔面反射计算模型

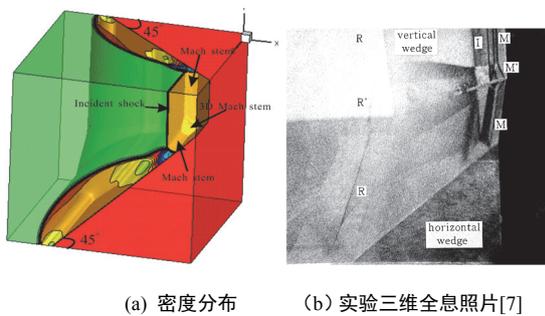


图 2.5 三维激波双楔面反射问题密度分布与实验比较

### 2.5 激波通过多障碍物坑道问题

为了把我们的三维 CE/SE 差分格式推广应用于实际的过程问题，我们对防护工程中的激波在坑道中通过多个障碍物时复杂流场进行了计算和预报。计算模型如图 2.6 所示，在一个  $4.0 \times 1.0 \times 1.0$  的坑道内放置 4 个尺寸均为  $0.4 \times 0.3 \times 0.3$  的障碍物。初始时刻有一个平面激波正好到达坑道入口处。计算采用  $200 \times 200 \times 200$  网格，激波马赫数取为 3.0。

在激波通过坑道过程中，激波遇到障碍物将会产生正激波、斜激波反射，漩涡以及它们之间的相互作用。图 2.7 给出了激波通过多障碍物坑道时的计算结果。图 2.7a,b 给出了不同时刻 ( $t=0.8, 1.3$ ) 激波绕过多个障碍物时的三维复杂流场。图 2.7c 给出了  $t=1.3, y=0.5$  时二维密度分布。图 2.7d 给出了  $t=1.3, z=0.25$  时二维密度分布。

通过上述计算可以对激波在通过具有多个障碍物的坑道时的压力、密度和速度进行分析，并给出合理的预报，为防护工程设计和施工提供一定的依据，并进行适当的优化。

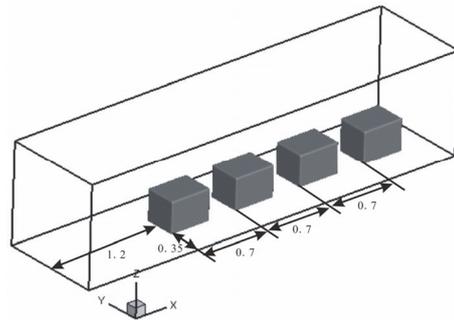
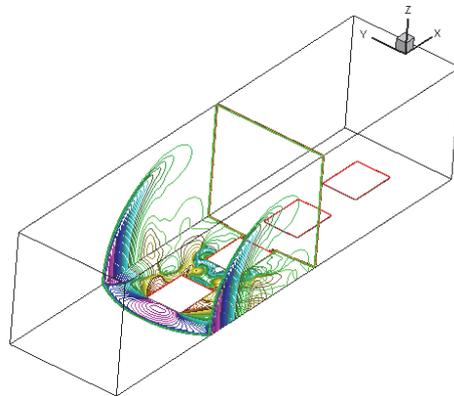


图 2.6 计算几何模型



(a)  $t=0.8$

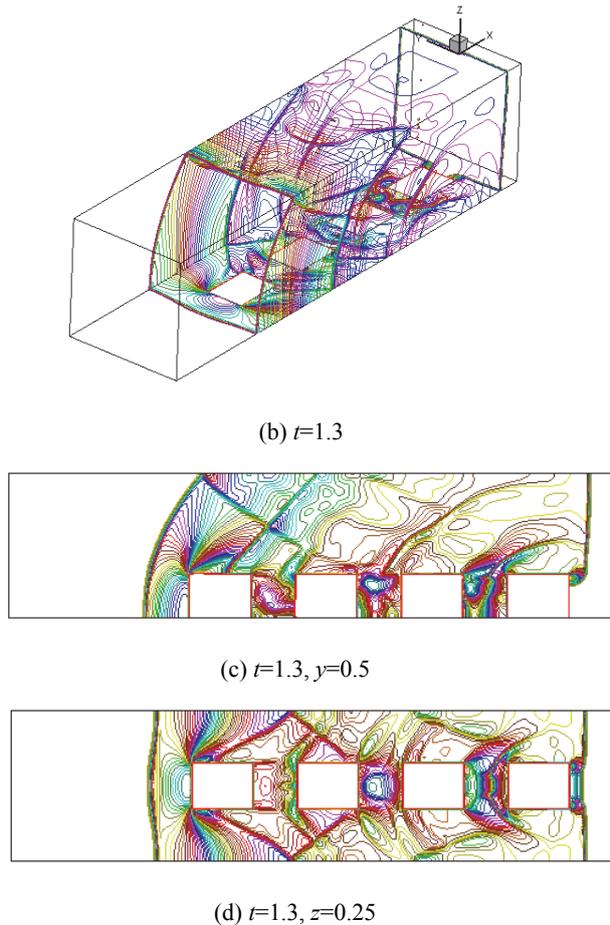


图 2.7 激波穿过多障碍物通道问题计算结果

### 3 结论

本文推导并给出了一种改进的三维 CE/SE 差分格式。该格式继承了原有的 CE/SE 差分格式优点：捕捉激波不需要 Riemann 求解器，多维问题不需要算子分裂，是一种真正的多维格式。从多个算例的计算结果可以看出，本文三维 CE/SE 差分格式能够处理比较复杂的边界条件，具有相当高的精度，能够准确捕捉各种激波结构。

三维 CE/SE 差分格式虽然是在守恒型 Euler 方程基础上提出来的，但只要作很小修改，也

很容易把它推广到 N-S 方程的差分格式。其次该格式本身具有有限体积格式的特点，容易推广到一般的非结构网格。因此该格式有着广泛的适用范围。

### 参考文献

1. S.C. Chang, S.T. John Yu, A. Himansu, X.Y. Wang, C.Y. Chow and C.Y. Loh, The Method of Space-Time Conservation Element and Solution Element – A New Paradigm for Numerical Solution of Conservation Laws, *Computational Fluid Dynamics Review*, 1, 206 (1998), Edited by M. Hafez and K. Oshima, World Scientific Publisher.
2. S.C. Chang, X.Y. Wang and C.Y. Chow, The Space-Time Conservation Element and Solution Element Method: A New High-Resolution and Genuinely Multidimensional Paradigm for Solving Conservation Laws, *Journal of Computational Physics*, 156, 89-136, 1999.
3. G. Wang, D. L. Zhang, K. X. Liu, An Improved CE/SE Scheme and Its Application to Detonation Propagation, *Chinese Physics Letters*, 24(12), 3563-3566, 2007.
4. Wang Gang, Zhang De-Liang, Liu Kai-Xin: Numerical Study on Critical Wedge Angle of Cellular Detonation Reflections, *Chinese Physics Letters*, 27 (2) 2010.
5. 张德良, 王景焘, 王刚: 高阶精度 CESE 算法及其应用, *计算物理*, 2009, 26 (2): 211-220.
6. G. Wang, D. L. Zhang, K. X. Liu, J. T. Wang, An Improved CE/SE Scheme for Numerical Simulation of Gaseous and Two-Phase Detonations, *Computers & Fluids*, 39, 168-177, 2010.
7. 杨多兴, 张德良, 曾荣树, 李国庆, 刘耀炜, 沙海军: 基于时空守恒元和解元 (CESE) 方法的空隙介质多相流动计算, *地球物理学报*, 53 (1): 189-196, 2010.
8. J. T. Wang, K. X. Liu, D. L. Zhang, A New CE/SE Scheme for Multi-Material Elastic-Plastic Flow and Its Application, *Computers & Fluids*, 38, 544-551, 2009.
9. G. A. Sod, A Survey of Several Finite Difference Methods for Systems of Non-linear Hyperbolic Conservation Laws, *Journal of Computational Physics*, 27, 1-31, 1978.
10. Harten, ENO Schemes with Sub-cell Resolution, *Journal of Computational Physics*, 83, 148-184, 1980.
11. G. Ben-Dor, Glass II Non-stationary Oblique Shock Wave Reflections: Actual Isopycnics and Numerical Experiments, *AIAA J*, 16, 1146-1153, 1978.
12. T. Meguro, K. Takayama, O. Onodera, Three-Dimensional Shock Wave Reflection Over a Corner of Two Intersecting Wedges, *Shock Waves*, 7, 107-121, 1997.