

# "高智"壁判据方法能替代通常的 网格收敛分析方法吗?

高智

中国科学院力学研究所, 高温气体动力学国家重点实验室(筹), 北京海淀区 100190

**摘要:** 最近, 一些作者建议把“高智”壁判据方法作为通常网格收敛性分析的一种巧妙替代。网格收敛性分析的目的是获得网格无关数值解, 对 CFD 计算这是最起码的要求, 是数值计算必须做的工作, 这已是 CFD 计算人员的共识。因此, 用壁判据方法替代通常的网格收敛分析是一件 CFD 大事, 值得深究和更多的数值实践。在本文的进一步探讨中, 提出新的零法向速度流面判据, 它的两个重要特例是已有的“高智”壁判据和无粘流壁判据。应当指出, 已找到的若干 NS 方程组精确解(称作“解析真解”)准确满足壁判据, 有了这么多严格的数学旁证, 故可以认为满足壁判据的 NS 数值解就是 NS 近似“数值真解”;而且通过一次 NS 计算便可知壁判据的不满足程度和 NS 数值解相对其“数值真解”的偏离情况。常用的其它网格收敛分析方法没有上述优点, 壁判据方法是最好的网格收敛分析方法, 值得 CFD 计算工作者关注、使用并加以发展。文中也讨论了零法向速度流面判据的理论基础—ISF 理论和理论的重要推论及它们在 CFD 计算中的应用问题。

**关键词** 粘性/无粘干扰剪切流动 壁判据 计算流体力学 网格收敛性分析

## 引言

近几十年来, 计算流体力学(CFD)飞速发展, CFD 计算和软件在航空、航天、能源、环境和水利等诸多工程技术领域中得到了广泛的应用。正像钱学森指出的<sup>[1]</sup>: 今日力学要用计算机去回答一切宏观的实际科学技术问题, 流体力学也是这样。然而, 由于流体力学基本方程的非线性性质, 致使 CFD 的基础理论和算法都存在一些尚未解决好的难题。人们自然要问: 计算机算出的浩瀚数值海洋, 可靠性, 可信度如何? 关于 CFD 数值模拟, 美国 CFD 研究人员曾广泛流传过“除了做计算的人, 每个人都不相信计算结果, 而除了做试验的人, 每个人都相信试验结果”的笑话<sup>[2]</sup>。可信度问题成为上世纪末本世纪初 CFD 研究的热门课题, 人们提出了 CFD 计算验证(verification)和确认(validation)的系统研究<sup>[3-5]</sup>, 例如提出的验证方法主要有实验对照, 精确解比较、制造解比较和网格收敛性分析等方法。通过网格收敛性分析获得网格无关解是对数值计算起码的要求; 发达国家 CFD 研究人员曾制定了 CFD 的一

项政策, 即计算必须做网格收敛性分析获得网格无关解, 否则计算论文不予发表。网格收敛性分析是通过计算本身验证计算结果优劣的有效通用方法, 但网格收敛性分析需要粗、中和细网格多次重复计算, 对于大型计算, 许多 CFD 研究人员认为难以承受网格收敛性计算。因此寻找新的有效验证方法具有理论和实际价值。

文<sup>[6-8]</sup>建议用“高智”壁判据计算代替网格收敛性分析, 他们通过计算得到如下结论: “高智”壁判据方法实际上是网格收敛性分析的一种巧妙的替代, 它从理论上找到一个网格收敛性分析的标准、即“高智”壁判据; “高智”壁判据的吻合程度可以代表网格收敛性的程度。要替代网格收敛性分析这一计算必须做且已通用的方法, 是一件大事, 需要充分研究和更多的计算实践。本文从理论角度对此作进一步的探讨, 包括壁判据的理论基础—干扰剪切流(ISF)理论, “高智”判据计算替代网格收敛性分析的进一步讨论, 提出新的零法向速度流面判据, 粘性和无粘流壁判据是它的两个特例; ISF 理论其它主要推论在流动计算中的应用和结束语。

## 1、网格收敛性分析

在 CFD 计算的验证和可信度评估中，最常用且必须做的就是网格收敛性计算（分析）。流动计算的网格收敛性分析，至少要在粗、中、细三套以上的网格上重复计算；当网格加密到所监控的特征物理量不再随网格加密而变化或变化很小时，就认为计算获得了网格无关解，即获得该计算所能得到的最佳数值结果，监控的特征物理量计有驻点温度和热流，壁面压力系数分布、壁面摩擦系数分布、壁面热传导 Nusselt 数 (Nu) 分布，或流场中特定位置（点、线或面）上的速度、温度等。

讨论：网格收敛性分析的实质是：当监控物理量随网格加密不再变化或变化很小时，NS 方程组数值解达到计算误差最小，达到网格无关解即获得了 NS 方程组的近似“数值真解”。监控物理量达到网格无关解与 NS 数值解达到“数值真解”的等价性，粗略地看应具有等价性；不过能否给出严格的数学证明仍是一个大问题，不要说严格数学证明就连等价性的数学旁证迄今为止都没有一个。另一方面，作者已经证实<sup>[9]</sup>，已找到的 NS 方程组若干精确解（为对照起见亦称它们为 NS “解析真解”），它们准确满足作者提出的壁动量/能量判据<sup>[12]</sup>，因此提供了 NS 解满足壁判据与 NS 解为 NS “真解”两者等价性的若干严格的数学旁证。据此作者推断 NS “数值真解”亦应准确满足壁动量/能量判据，NS 数值解不满足壁判据的程度反映了它偏离 NS “数值真解”的偏离程度，随着网格加密，壁判据得到满足或近似得到满足，此时的 NS 数值解即为 NS 近似“数值真解”。根据作者的上述思路，文<sup>[6-8,21,22]</sup>对激波/边界层干扰流动计算进行了数值实验。证实壁判据方法有效、且比通常的网格收敛分析方法具有明显的优点，文<sup>[6-8]</sup>并建议用高智壁判据方法替代通常用的网格收敛分析方法。这是一个很好的建议，因为壁判据方法实质上是检验 NS 数值解相对 NS “数值真解”的偏离，并通过网格加密减小偏离，达到网格无关解即达到 NS 近似“数值真解”的方法，因此是当今所有的网格收敛分析方法中最佳的方法，值得 CFD 计算人员关注并大力开发和使用。

有必要提到，壁判据是根据作者提出的干扰剪切流 (ISF) 理论<sup>[10-12]</sup>导出的，ISF 是物理量变化梯度仅次于激波且必须计算它的内部结构的流动区域；ISF 的数学定义和它的准确计算都必须使用 ISF 最佳坐标系和最佳网格，例如近壁 ISF 的最佳坐标系和最佳网格就是贴体正交坐标系和贴体正交网格等。壁判据方法把算前应该使用什么样的网格和算后才可获得 NS “数值真解”两者直接相关联，无疑对 NS 计算十分关键，再次显示了流体理论、ISF 理论对 CFD 计算的指导作用。对近壁 ISF 以外的流动区域，假如自由 ISF，描述和准确计算它的最佳坐标系和最佳网格并非贴体正交坐标系和贴体正交网格，说明要保证 NS 计算能获得 NS “数值真解”的一个必要前提是：使用自适应的结构/非结构混合网格，且必须是流体理论指明的最佳网格。

## 2、文<sup>[6-8]</sup>的建议：用“高智”壁判据方法替代通常的网格收敛性分析方法

“高智”壁判据包括动量判据 MC 和能量判据，它们分别为

$$MC - j = \left[ -\frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u_j}{\partial y} \right) \right] / \frac{\rho U^2}{x_L},$$

$$j = 1 (x_1 = x), 2 (x_2 = y), 3 (x_3 = z);$$

$$(u_j) = (u, v, w) \quad (1)$$

$$EC = \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \mu \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \right.$$

$$\left. - p \sum \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right\} / \frac{\rho U^3}{x_L} \quad (2)$$

文<sup>[6-8]</sup>认为；壁判据是“高智”干扰剪切流 (ISF) 理论导出的理论结果，文<sup>[9]</sup>证实已找到 NS 方程组精确解 E(NS) 的若干流动，如不可压驻点流动，斜驻点流动，收缩和扩张渠道流动等，准确满足壁动量判据，即有壁判据精确解 E(MC)。对未找到或找不出 NS 方程组精确解，亦称真解（仍记作 E(NS)）的流动，其数值解 D(NS)、D(MC)、D(EC) 和真解 E(NS)、E(MC)、E(EC) 之间存在如下关系

$$E(NS) = D(NS) + \varepsilon,$$

$$E(MC) = D(MC) + \varepsilon_m,$$

$$E(EC) = D(EC) + \varepsilon_e \quad (3)$$

诸误差  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon_m$  和  $\varepsilon_e$  来源于离散误差、格式截断误差、理论近似误差、机器舍入误差等，一般来说，随着网格的加密，误差会逐渐减小，文<sup>[6-8]</sup>对激波层流分离边界层干扰流动的计算证实了上述结论，他们认为误差减小到  $|\varepsilon_m| \cong 0.1, |\varepsilon_e| \cong 0.1$ ，可以认为获得了网格无关解，参见图 1 和图 2。

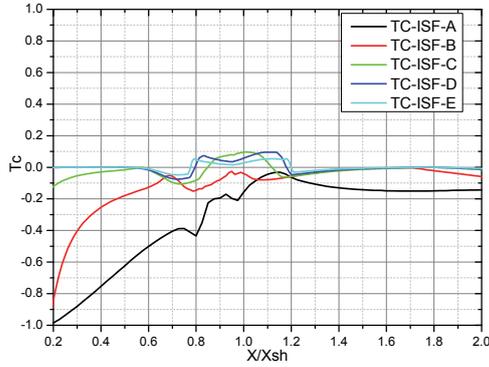


图 1 网格均匀加密条件下  $T_e$  随流向距离  $x/x_{sh}$  的变化 ( $x_{sh} = 0.08$ )

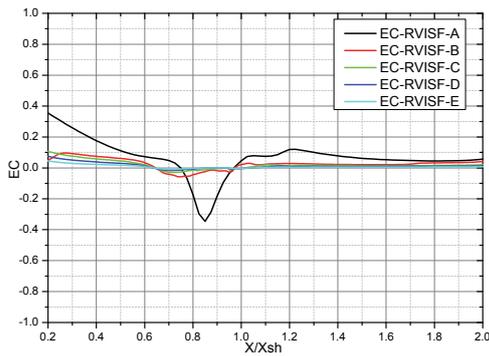


图 2 网格均匀加密条件下， $E_e$  随  $x/x_{sh}$  的变化

图 1 和图 2 是文<sup>[8]</sup>给出的激波/边界层分离干扰流动（马赫数  $M=2.15$ ，单位长度雷诺数  $R_e = 0.96 \times 10^5$ ，来流静温  $T_\infty = 157^\circ K$ ，激波角  $\theta = 30.8^\circ$ ）的计算结果，分离点和再附点的计算位置和实验位置相符合，分别在  $x/x_{sh} = 0.78$  分离、在  $x/x_{sh} = 1.28$  再附；从图 1 和图 2 可知，网格加密到 caseD ( $721 \times 61$ ) 后，数值解在分离/再附干扰流动区域 ( $0.7 \leq x/x_{sh} \leq 1.4$ ) 及下游区域达到网格无关解，而在干扰区域上游例如  $x/x_{sh} = 0.2$  位置，由于前缘干扰效应，网格加密到 caseD 数值解仍未达到网格无关。

与常用的其它网格收敛性分析相比，若把微分方程壁判据 MC 和 EC 视作网格收敛性分析

的特征物理量，则满足壁判据的收敛计算相当于通常的网格收敛性分析；前者的优点是计算一次即可知道数值解相对“真解”（网格无关解）的偏离程度；而后者的特征物理量（如壁面摩擦系数分布，壁面传热率系数分布等）都需要数值解求出，因此一般需要多次计算，至少需要粗、中、细网格三次计算才能确定数值解相对网格无关解即“真解”的偏离程度。因此，文<sup>[6-8]</sup>的结论是：对近壁流动，即内外绕流流动，“高智”壁判据方法实际上是网格收敛性分析的一种巧妙替代，从理论上找到一个网格收敛性的评价准则，即“高智”壁判据，“高智”壁判据的吻合程度可以代表网格收敛性的程度。通常的网格收敛性分析方法与“高智”壁判据方法的简要比较见表 1。

文<sup>[6-8]</sup>亦认为迄今还没有可用于检验全流场计算的通用评价准则和可替代网格收敛性分析的新方法。

最后指出，壁判据方法也是检验计算方法（包括格式、边界格式、边界处理等）和网格设计整体质量优劣的一个很好的检验方法，例如贺<sup>[22]</sup>和陈<sup>[23]</sup>关于二维激波/边界层干扰流动计算表明：他们设计的算法明显比常用的 Fluent 计算好许多，参见附录 A。

### 3、壁判据的理论基础：干扰剪切流动 (ISF) 理论<sup>[10-13]</sup>

“高智”壁判据方法是验证计算结果的理论方法，它的理论基础则是高智提出的粘性/无粘干扰剪切流动 (ISF) 理论<sup>[10-12]</sup>。ISF 由粘性剪切层和相邻无粘外流组成，粘性剪切层的流动规律是流向对流占优，法向对流扩散相竞争，该规律的数学表示对二维流动为：

$$v \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cong \frac{\partial}{\partial y} (\delta \frac{\partial \varphi}{\partial y}) \quad (4)$$

$$u \frac{\partial \varphi}{\partial x} \gg \frac{\partial}{\partial x} (\delta \frac{\partial \varphi}{\partial x}) \quad (5)$$

其中  $x, y$  方向表示 ISF 粘性层的流向和法向坐标变量， $u, v$  为  $x$ - 和  $y$ - 方向流速分量， $\varphi = (u, v, T)$ ， $\varphi$  为  $u, v$  时  $\delta = \mu$  (粘性系数)， $\varphi$  为温度  $T$  时， $\delta = k$  (热传导系数)。

表 1 网格收敛性分析方法和“高智”壁判据方法的简要比较

方法	目的	判断是否真解所依据的物理量和关系	算前的物理量和关系	预测偏离真解程度所需计算
通常的网格收敛分析方法	获得网格无关解 (简称真解)	壁面摩擦阻、热传导分布等	物理量准确值算前未知, 一次计算不知偏离物理量准确值的程度	知道偏离真解程度的计算次数至少三次
“高智”壁判据方法	获得网格无关解 (简称真解)	壁面物理变量的控制方程组	控制方程组算前已知, 一次计算知道偏离控制方程组的程度	知道偏离真解程度的计算只需一次
通常的网格收敛分析方法	获得网格无关解 (简称真解)	流场中特定位置 (如线或面) 速度, 温度分布等	物理量准确值算前未知, 一次计算不知偏离物理量准确值的程度	知道偏离真解程度的计算至少三次
零法向速度流面判据方法	获得网格无关解 (简称真解)	零法向速度流面物理变量的控制方程组	控制方程组算前已知, 但零法向速度流面位置算前未知; 一次计算知道偏离程度	知道偏离真解偏离零法向速度流面程度的计算只需一次

注：对 NS 方程计算的验证，零法向速度流面是自由 ISF 理论找到的最佳验证流面，它也是准确计算自由 ISF 必须使用的流面；零法向速度流面判据的两个重要特例是“高智”壁判据和无粘流壁判据。

文<sup>[13]</sup>给出 ISF 粘性层的物理尺度、即流向和法向的长度尺度和速度尺度为

$$\begin{aligned}
 (x_s, y_s; u_s, v_s) &= (R^{-n_x}, \\
 R_e^{-n_y}; R_e^{-n_u}, R_e^{-n_v}) &= (R_e^{-\frac{3}{2}q}, \\
 R_e^{-\frac{1}{2}(1+q)}; R_e^{-\frac{1}{2}q}, R_e^{-\frac{1}{2}(1-q)}) & \quad (6)
 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
 R_e &= \rho UL / \mu \\
 q &= \ln(u_s / x_s) / \ln R_e = -n_u + n_x
 \end{aligned}$$

随参数  $q$  取值不同，对近壁 ISF 可为驻点流，边界层及相邻无粘外流，分离点邻域粘性/无粘流 ( $q=1/4$ )，各向同性 ( $q=1/2$ ) 强粘性剪切流等。因此，近壁 ISF 是内外绕流场近壁粘性/无粘流的普适理论概括。应当指出，物理尺度关系 (6) 并无固壁的限制，ISF 理论同样适用于无固壁的自由干扰剪切流动，像混合层流，射流等。

#### 4、替代通常的网格收敛性分析的新考虑：零法向速度流向判据

对自由 ISF，例如混合层 (mixing layer) 及其相邻无粘外流，射流边界层 (jet boundary or halfjet) 及其无粘外流和自由射流 (free jet) 及其相邻无粘外流，前两种 ISF，已证明<sup>[14]</sup>混合层两侧无穷远处的法向速度满足： $v_{\infty} \leq 0, v_{-\infty} > 0$ ，参见图 3。

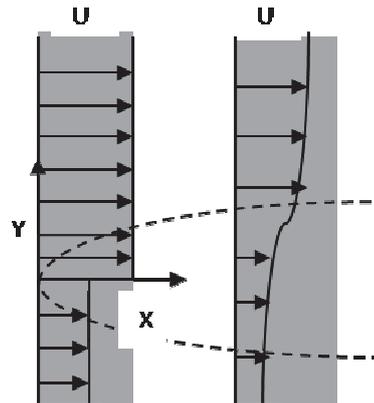


图 3 气流混合层速度分布

故在粘性混合层中存在  $v=0$  的流面；对二维自由射流，流动的对称面在粘性层中，对称面上  $v=0$ 。利用 ISF 基本控制方程组<sup>[10-12]</sup> (参

见下节)，我们导出自由 ISF 零法向速度流面上诸物理量  $(\rho, u, v, p, T)$  满足如下方程组：

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0 \quad (8)$$

$$\rho c_p u \frac{\partial T}{\partial x} - u \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = 0 \quad (9)$$

其中  $y$ 、 $x$  分别为零法向速度流面的法向和流向坐标变量。为与壁面判据类比，零法向速度流面方程组 (7) — (9) 同样称作零法向速度流面判据。对近壁 ISF 计算，壁判据方法是网格收敛性分析的一种巧妙替代<sup>[6-8]</sup>，对自由 ISF 计算，零法向速度流面判据同样应是网格收敛性分析的一种巧妙替代。两者主要的区别是：零法向速度流面位置及其法向不像壁面位置及其法向那样，计算前通常并不知道需要通过网格自适应计算找出它们，文<sup>[12]</sup>称贴零法向速度流面的正交坐标系为描述自由 ISF 的最佳坐标系或最佳网格线。众所周知准确计算边界层流动必须使用贴体正交坐标系，同理，准确计算自由 ISF 必须使用自由 ISF 最佳坐标系(即贴零法向速度流面之贴流面正交坐标系)。文<sup>[15]</sup>对二维不可压 ISF 的计算表明：使用偏离自由 ISF 最佳坐标系  $45^\circ$  角的正交坐标系计算自由 ISF，最大速度梯度  $(\partial u / \partial y)_{\max}$  和最大温度梯度  $(\partial T / \partial y)_{\max}$  分别减小了 50% 和 40%，非最佳网格计算不能捕捉自由 ISF 强粘性剪切特性，参见图 4 和图 5，当然这是不允许的计算误差。此外，自由 ISF 计算非最佳坐标系也将导致自由 ISF 邻域流动和下游流动的计算误差，例如分离流及底部流之自由 ISF 的较大计算误差，将导致分离流本身以及下游和尾迹流动的计算误差。上述分析说明流场中自由干扰剪切流 (ISF) 计算使用最佳坐标系，使用最佳网格的必要性；充分说明在网格收敛性分析中采用网格自适应技术捕捉零法向速度流面的必要性。零法向速度流面判据方法和通常的网格收敛性分析方法的简要比较参见表 1。

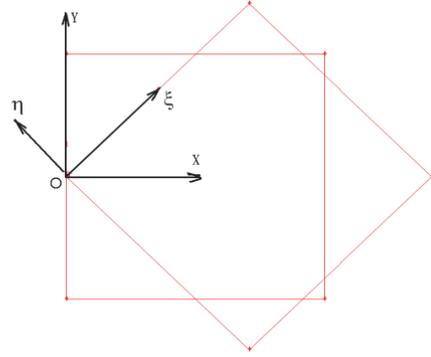


图 4 气流混合层计算使用的不同正交坐标系

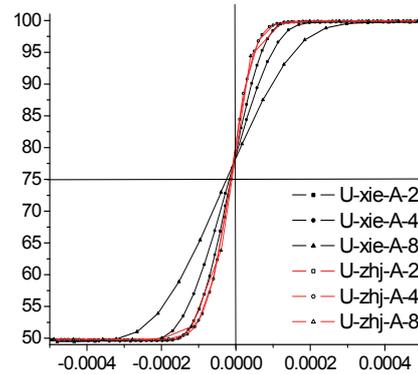


图 5 气流混合层计算使用不同正交坐标系时切向速度的法向分布

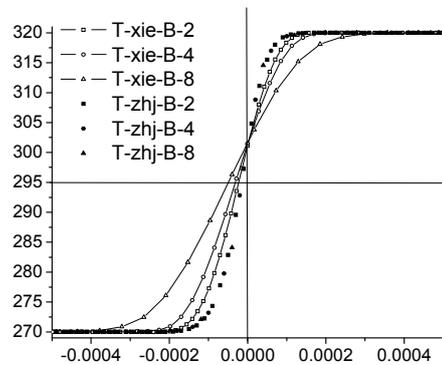


图 6 气流混合层计算使用不同正交坐标系时温度的法向分布

零法向速度流面判据，即方程组(7)–(9)的两个重要特例：一个是无滑移 ( $u = 0$ ) 壁判据，在方程组(7)–(9)中令  $u = 0$  它们简化为壁判据，即方程组 (1) 和 (2)；另一个是粘性可以忽略，即无粘流零法向速度流面判据，对不可渗透壁，这就是无粘流壁判据，它们为如下方程组：

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + p) = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (11)$$

$$\rho c_p u \frac{\partial T}{\partial x} - u \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (12)$$

对无粘流计算，无粘流壁判据(10)–(12)无疑是网格收敛性分析的一种巧妙替代。总之，对粘性(NS)和无粘(Euler)流动计算，零法向速度流面判据(7)–(9)是网格收敛性分析的一种普适性的巧妙替代，它是网格收敛性计算达到网格无关解的一个理论标准，该判据的满足程度代表了网格收敛性计算逼近网格无关解的程度。应当强调，通常的网格收敛性分析需要多次重复计算（至少需要粗、中、细网格三次计算）才能知道数值解相对网格无关解的偏离程度，而使用零法向速度流面判据，计算一次即知道数值解相对网格无关解的偏离程度。因此在CFD计算可信度评估研究中，零法向速度流面判据的使用值得期待。此外指出，从物理角度看，NS方程组描述全域流动，零法向速度流面(ZNVS)方程组描述自由ISF中特征流面上的流动，因此，NS和ZNVS方程组同时得到满足且数值误差最小的数值解自然应是流动的“数值真解”，即网格无关解。这是因为ISF是物理量变化梯度仅次于激波，但其内部结构又必须计算的核心流动，满足ZNVS方程组因此为NS计算的可信度提供了必要的“保险”。简略的比喻是：流动数值解为真解的必要条件是NS方程组计算的数值误差达到最小，充分条件则是ZNVS方程组计算的数值误差（包括NS方程计算误差和ZNVS方程离散误差）达到最小。

## 5、ISF理论及推论在流动计算中的其他应用

探讨零法向速度流面判据在CFD计算中的应用时，必须提到ISF理论本身及其它一些推论，因为它们是彼此紧密相关的一个整体，还因为现今的流动数值模拟研究，十分忽视流体理论的应用，因此有必要多说几句。

### 5.1 ISF方程组的应用

利用二维ISF数学定义式(4)和(5)化简完全NS方程组，得到ISF控制方程组

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (13)$$

$$\rho(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}) + \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(\mu \frac{\partial u}{\partial y}) \quad (14)$$

$$\rho(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y}) + \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(\mu \frac{\partial v}{\partial y}) \quad (15)$$

$$\rho c_p(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y}) - (u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y}) =$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(k \frac{\partial T}{\partial y}) + \mu(\frac{\partial u}{\partial y})^2 \quad (16)$$

$$p = \rho RT \quad (17)$$

应该提到类似的方程组早在上世纪六七十年代后期已经提出，例如Baldwin-Lomax的薄层(TL)NS方程组，Davis的粘性激波层(VSL)方程组，Radam-Rubin的抛物化NS(PNS)方程组，高智的简化NS方程组等；它们彼此略有差异，但数学性质相同，通常称它们为PNS方程组。庄逢甘、张涵信<sup>[16]</sup>称高智的简化NS为first PNS方程组。PNS空间推进计算已得到广泛应用，Anderson在名著<sup>[17]</sup>中总结到：“The PNS is in very widespread use; indeed, it forms the basis of an industry-standard computer program, which is used by virtually all major aerodynamic laboratories and companies.”不幸的是这类PNS的导出假定了存在主流方向，它们到底描述什么样的流动比较含糊，例如PNS可描述的驻点流、斜驻点流等流动均因存在主流方向的假定而被排除在外。ISF方程组则不同，它描述的流动领域明确就是ISF，当然ISF方程组亦可称作PNS方程组，为区别起见，文<sup>[6]</sup>称ISF方程组为“高智”PNS方程组。应当指出，PNS方程组今后仍将被广泛应用，因为对近壁流动的描述它最恰当。

### 5.2 ISF强粘性层物理尺度的应用

ISF强粘性层物理尺度的演化规律（参见式(6)）无疑是网格生成必须考虑的规律，特别是它阐明了壁面附近热流和压力梯度局部突增的流动机理。例如对二维层流ISF，当 $R_e = 10^6$ 时，分离点邻域热流是边界层热流的 $R_e^8 \approx 5.5$ 倍，各向同性粘性层局部热流是边界层热流的

$R_e^{\frac{1}{4}} \approx 33$  倍。文<sup>[2]</sup>指出高超声速绕流中局部热流突增是“unknown—unknown”的流动现象。局部热流突增的预测十分重要，否则会导致飞行器壁的局部严重破坏<sup>[2]</sup>。上述 ISF 物理尺度理论推算出的局部热流突增，不仅与实验定性相符、且有一定的定量相符，参见文<sup>[18]</sup>提供的试验结果。

类似地，ISF 粘性层小尺度结构的局部性质将引起压力梯度  $\partial p / \partial x$  和  $\partial p / \partial y$  的局部突增，这意味着近壁粘性流的失稳、转捩和分离现象，值得关注和研究。总之，在近壁粘性层小尺度的局部区域必须在法向和流向同时加密网格，否则算不出热流和压力梯度局部突增现象。

### 5.3 描述自由 ISF 的最佳坐标系

自由 ISF 与近壁 ISF 的一个主要区别是：描述后者的最佳坐标系是贴体正交坐标系；描述自由 ISF 最佳坐标系则是零法向速度流面与其法向组成的正交坐标系，该流面及其法向在计算前通常并不知道，需要通过网格自适应计算且满足零法向速度方程组来找到最佳坐标系。很显然，寻找自由 ISF 最佳坐标系的网格自适应计算与零法向速度流面判据的收敛性计算完全是同一件事。准确计算自由 ISF 使用最佳坐标系的绝对必要性如前所述，因此，对自由 ISF 和流场计算，用零法向速度流面判据计算替代通常的网格收敛性分析不仅有节省机时的好处而且从理论上说很有必要。

### 5.4 ISF 的若干精确解

对不可压 ISF，例如驻点流、斜入射驻点流、收缩和扩张渠道流动等，文<sup>[19-21]</sup>已找到 ISF 方程组的精确解析解，它们也是 NS 方程组的精确解。这类精确解析解流动的共同特点是对流动的数学提法不需要规定下游边界条件，这意味着对这些局部区域流动（包括不可压和可压流动）能够算出它们的精确数值解。一方面用这些精确数值解检验全流场计算的数值结果，无疑优于用驻点特征物理量的网格收敛性分析。另一方面，这些局部区域 NS 精确数值解即“数值真解”必须能够数值地准确复制 NS “解析真解”，因此它们也必须准确满足壁判据；这就是说对这些情况，NS 数值解满足壁判据与它们为 NS “数值真解”具有一致性或称等价性。对于

找不到 NS “解析真解”的复杂流动的计算验证，从这些特殊流动得到的上述结论值得借鉴和使用；使用办法是：粗网格 NS 数值解不满足壁判据，加密网格直到 NS 数值解满足或近似满足壁判据，此时的 NS 数值解为 NS 近似“数值真解”。

### 5.5 干扰剪切湍流（ISTF）和湍流模型壁判据<sup>[11,12]</sup>

干扰剪切湍流（ISTF）与层流干扰剪切流（ISF）类似，ISTF 由粘性剪切湍流和相邻外部无粘湍流所组成；粘性剪切湍流的运动规律仍然是法向对流扩散相竞争、流向对流占优，该规律的数学表达式，以不可压缩湍流为例，取 Reynolds 时间平均量时为

$$\begin{aligned} \bar{v} \frac{\partial \bar{f}}{\partial y} &\cong \frac{\partial}{\partial y} (\delta \frac{\partial \bar{f}}{\partial y} - \overline{\rho v' f'}), \\ \bar{u} \frac{\partial \bar{f}}{\partial x} &\gg \frac{\partial}{\partial x} (\delta \frac{\partial \bar{f}}{\partial x} - \overline{\rho u' f'}), \\ \bar{w} \frac{\partial \bar{f}}{\partial z} &\gg \frac{\partial}{\partial z} (\delta \frac{\partial \bar{f}}{\partial z} - \overline{\rho w' f'}) \quad (18) \end{aligned}$$

其中  $\bar{f} = (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{T})$ ， $f'$  为脉动量，流速  $\bar{u} = u + u'$ 。若引入湍流粘性系数  $\mu_t$ <sup>[14]</sup>， $\mu_t \partial \bar{u} / \partial y = \partial (-\overline{v' u'}) / \partial y$ ，则 ISTF 粘性湍流薄层的流向和法向速度和长度的局部尺度仍为关系式（6），此时，只需把层流粘性系数  $\mu_l$  换成有效粘性系数  $\mu_{ef}$  即可， $\mu_{ef} = \mu_l + \mu_t$ 。利用 ISTF 粘性湍流定义式（18）简化 Reynolds 时间平均 NS(RANS)方程组得到 ISTF 方程组，节省篇幅起见，这里不再写出它们。以下我们只讨论 ISTF 壁判据和湍流模型壁判据。利用壁面无滑移条件  $\bar{u} = \bar{v} = \bar{w} = 0$ ，由 ISTF 方程组导出如下 ISTF 壁判据

$$(\nabla p)_w - \left[ \frac{\partial}{\partial y} (\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}) - \overline{\rho v' u'} \right]_w = 0 \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} (k \frac{\partial T}{\partial y})_w + \mu (\frac{\partial \bar{u}}{\partial y})_w^2 - (\bar{p} \sum \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j})_w \\ - \rho c_p \frac{\partial}{\partial y} (\bar{v} T)_w + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{v} \bar{p})_w = 0 \quad (20) \end{aligned}$$

与层流 ISF 壁判据不同，湍流 ISTF 壁判据尚须补充湍流模型壁判据，以  $k - \varepsilon$  湍流模型方程为例，湍流模型壁判据为

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{p_{kt}} \right) \frac{\partial k}{\partial y} \right]_w + \left( \tau_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)_w + (S_k)_w = 0 \quad (21)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{p_{\varepsilon t}} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right]_w + c_\varepsilon \left( \frac{\varepsilon}{k} \tau_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)_w + (S_\varepsilon)_w = 0 \quad (22)$$

其中  $\mu_t$ ,  $\tau_t$ ,  $p_{kt}$  和  $p_{\varepsilon t}$  分别为湍流粘性系数、湍流应力和湍流 Prandtl 数,  $c_\varepsilon$  为湍流经验常数,  $s_k$  和  $s_\varepsilon$  为湍流源项。对自由 ISTF, 不难导出零法向速度流面判据和零法向速度湍流模型判据, 节省篇幅起见, 这里不再写出。与层流 ISF 类似, 满足零法向速度 ( $\bar{v} = 0$ ) 流面判据和湍流模型判据同样可用来替代通常的网格收敛性分析, 满足了这两个判据的网格自适应计算既完成了网格收敛性分析又找到了能够准确模拟 ISTF 的最佳坐标系, 期待着这样的湍流数值模拟问世。

下面建议利用湍流模型壁判据优化湍流经验常数。湍流模型离不开经验常数, 改进湍流模型往往引入更多的经验常数, 经验常数的合理取值很困难且无通用性。我们建议利用湍流模型壁判据来优化经验常数在近壁处的取值。以 Prandtl 混合长模型为例进行讨论, Prandtl 混合长  $l$  满足<sup>[14]</sup>

$$-\rho \bar{u} \bar{v} = \rho l^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (23)$$

混合长模型壁判据为

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)_w + \rho l^2 \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)_w \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right] = 0 \quad (24)$$

式 (24) 适用于近壁湍流, 包括分离点, 再附点邻域湍流。对湍流边界层流, 近壁区满足对数分布律<sup>[14]</sup>,

$$\frac{\bar{u}}{u_\tau} = 5.75 \ln \frac{u_\tau y}{\nu} + const \quad (25)$$

这里  $u_\tau = (\tau_w / \rho)^{1/2}$  为动力速度,  $\tau_w$  为壁面摩擦力。对湍流边界层,  $\partial \bar{p} / \partial x = 0$ , 由式 (24) 和 (25) 求得基于湍流模型壁判据优化的混合长  $l_{op}$  为

$$l_{op} = \left( \frac{\nu y}{5.75 \rho u_\tau} \right)^2 \quad (26)$$

$l_{op}$  与  $y^{1/2}$  成正比, 显然与湍流边界层理论建议的  $l$  与  $y$  成正比不同<sup>[14]</sup>, 后者  $l$  近似为

$$l = \begin{cases} 0.4y & y \leq y_c \\ 6\sigma & y > y_c \end{cases} \quad (27)$$

其中

$y_c = 0.15\sigma \sim 0.20\sigma$ ,  $\sigma = 0.75 \sim 0.09$ ,  $\sigma$  为边界层厚度。对近壁湍流包括湍流边界层, 湍流分离流等的一般情况, 满足混合长模型壁判据的优化混合长  $l_{op}$  显然也随  $x$  而变化, 因此扩充了混合长理论的使用范围。总之, 利用湍流模型壁判据优化湍流湍流经验常数, 在改善湍流流场计算的同时获得湍流经验常数优化分布的研究, 值得关注和数值实践。

## 6、结束语

文<sup>[6-8]</sup>利用“高智”壁判据方法替代通常的网格收敛性分析方法的建议, 值得 CFD 研究人员重视。文中提出的零法向速度流面判据方法是适用于全流场的一个通用方法, 已有壁判据和无粘绕流壁判据是它的两个重要特例。满足零法向速度流面判据的网格收敛性计算正是寻找自由 ISF 和 ISTF 最佳坐标系的网格自适应计算, 充分说明使用零法向速度流面判据方法和进行网格自适应计算的必要性和好处。零法向速度流面判据是干扰剪切流 (ISF) 理论的一个主要推论, 它和 ISF 理论本身及理论的其他主要推论是紧密相关的一个有机整体; 因此文中也讨论了其他相关议题: 例如 ISF 方程组 (即 PNS 方程组) 的应用, ISF 粘性层物理尺度变化规律在网格生成及局部热流突增等反常流动现象计算中的应用, 自由 ISF 计算使用最佳坐标系和网格自适应计算的必要性, ISF 局部区域精确解析解和数值解在验证全流场数值解中的应用, 利用湍流模型壁判据优化湍流经验常数等问题, 都值得 CFD 工作者关注并在计算中加以应用和发展。

注 本项目得到国家自然科学基金项目 (10872204) 资助。

附录：二维激波/边界层分离干扰流动计算的“高智”壁判据验证<sup>[22,23]</sup>

图7-图12是贺<sup>[22]</sup>和陈<sup>[23]</sup>计算激波边界层干扰流动的壁判据数值结果。由图7和图8可知，对壁切向动量判据的计算，他们自编程序的分辨率比Fluent高，但前者 $\partial p / \partial x$ 与 $\partial / \partial y(\mu \partial u / \partial y)$ 一致性差，后者 $\partial p / \partial x$ 与 $\partial / \partial y(\mu \partial u / \partial y)$ 相一致，满足壁切向动量判据；从图9—图12可知，贺陈计算结果较好满足壁法向动量判据和壁能量判据，而Fluent计算满足这两个壁判据的情况较差，特别是 $\partial p / \partial y$ 和 $\partial / \partial y(k \partial T / \partial y)$ 出现了较大幅度振荡。因此壁判据计算亦可用来检验格式、边界格式的好坏。

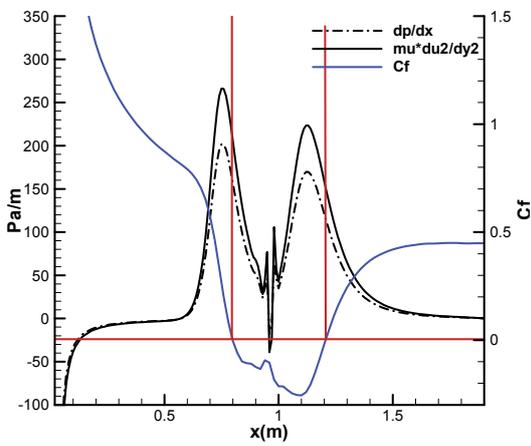


图7  $\partial p / \partial x$  和  $\partial / \partial y(\mu \partial u / \partial y)$  随流向距离  $x$  的变化 (贺<sup>[22]</sup>程序结果)

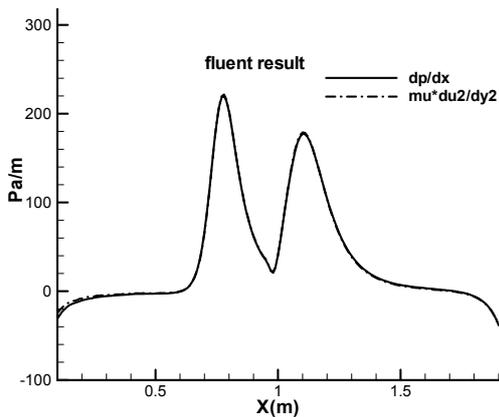


图8  $\partial p / \partial x$  和  $\partial / \partial y(\mu \partial u / \partial y)$  随  $x$  的变化 (Fluent 计算结果)

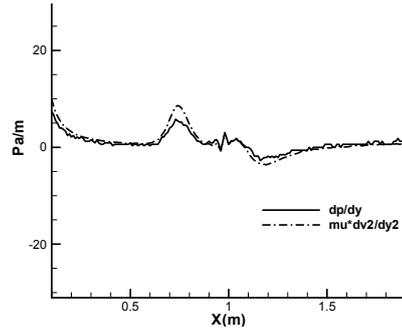


图9  $\partial p / \partial y$  和  $\partial / \partial y(\mu \partial v / \partial y)$  随流向距离  $x$  的变化 (贺<sup>[22]</sup>程序结果)

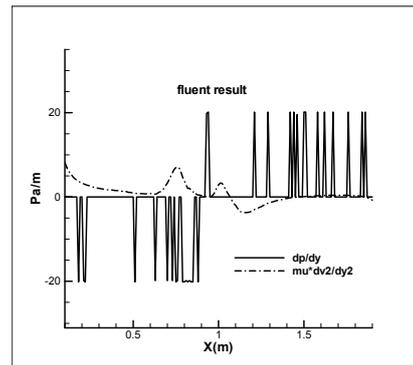


图10  $\partial p / \partial y$  和  $\partial / \partial y(\mu \partial v / \partial y)$  随  $x$  的变化 (Fluent 计算结果)

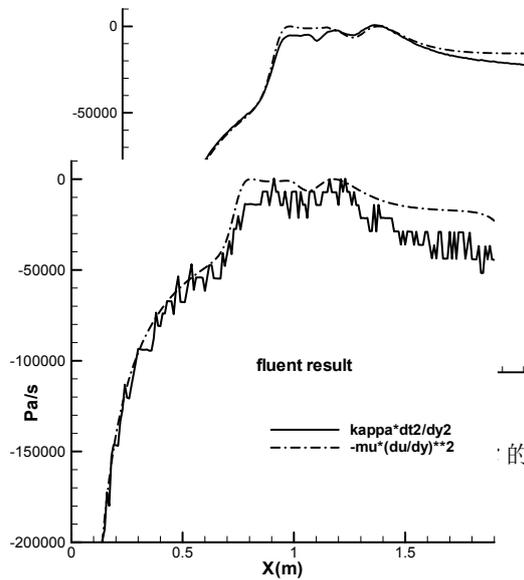


图12  $\mu(\partial u / \partial y)^2$  和  $\partial / \partial y(k \partial T / \partial y)$  随  $x$  的变化 (Fluent 计算结果)

参考文献

- [1] 钱学森.我对今日力学的认识.力学与实践, 1995, 17 (4): 421
- [2] Bertin J J, Cummings R M. Critical hypersonic aerothermodynamics phenomena An- nu.Rev.Fluid Mech.2006, 38:129-157
- [3] Rizzi J.V. Towards establishing credibility in Computational Fluid Dynamics (CFD) simulations. AIAA Jour.1998,36(5):668-675
- [4] Oberkampf W.L, Trucano T.G. Validations Methodology in computational Fluid Dynamics. AIAA paper 2000-2549,2000
- [5] 邓小刚, 宗文刚, 张来平等. 计算流体力学的验证与确认. 力学进展, 2007,37 (2): 279-288
- [6] Yu Yong Gao's interacting shear flow (ISF) theory and its inferences and their applications. To be published in Jour. Beijing Institute of Technology
- [7] 杨欢. 壁判据在激波—边界层干扰流动数值模拟中的应用研究, 北京理工大学, 硕士论文, 2011
- [8] 于勇, 徐新文. “高智”判据的分析与改进及其在激波层流边界层干扰数值计算可信度评估中的应用. 中国科学稿件
- [9] 高智. 壁判据用于计算流体力学 (CFD) 可信度评估. 空气动力学学报. 2008,26 (3) :378-393
- [10] 高智. 粘性—无粘干扰流动理论. 力学学报, 1990,22 (1): 8-19
- [11] 高智. 二维剪切流的粘性—无粘湍流干扰理论. 中国科学 (A 辑), 1992,22 (6): 605-615
- [12] 高智. 干扰剪切流动 (ISF) 理论. 扩散抛物化 NS 方程组和壁面判据及其应用. 中国力学文摘, 2007,21 (3): 13-22
- [13] 高智. 强粘性剪切流理论及其在粘性流计算中的应用. 空气动力学学报, 2001,19 (4): 420-426
- [14] Schlichting H, Gersten K. Boundary-Layer Theory. Springer, 2000
- [15] 于勇. “高智”干扰剪切流 (ISF) 理论在自由 ISF 计算中的应用. 北京理工大学学报 2012,20 (3): 250-259
- [16] Zhuang F.G. Zhang H.X. Computational Fluid Dynamics in china. AIAA Paper 87-11-34, 1987
- [17] Anderson, J.D. Hypersonic and High Temperature Gas Dynamics (2nd edition), AIAA Education series 2006
- [18] 李素循. 典型外形高超声速流动特征, 国防工业出版社, 北京, 2007
- [19] 高智. 简化 Navier-Sokes 方程组的几个准确解. 力学学报 1985,17 (3): 201-210
- [20] 李桂波, 高智. 二维斜入射驻点流解析解—干扰剪切流动 (ISF) 理论的一个应用. 空气动力学学报, 2008,26 (1): 83-86
- [21] Guibo Li, Mingguo Dai, Zhi Gao. An Application of interacting shear flow (ISF) theory: exact solution for unsteady oblique stagnation point flow. Acta Mechanica Sinica. 2006,22 (3): 397-402
- [22] 贺旭照. 二维激波/边界层分离干扰流动计算及壁判据检验 私人通信
- [23] 陈兵. 二维激波/边界层干扰流动和壁判据计算 私人通信