

飞行器复杂流动高精度数值方法研究

李新亮, 何志伟, 冷岩

(中国科学院力学研究所高温气体动力学国家重点实验室(筹), 北京海淀区 100190)

摘要: 介绍了作者近期开发的高精度数值方法, 包括修正的加权群速度控制格式(WGVC-M), 优化的 MUSCL 格式(OMUSCL2)以及有限差分-有限体积混合方法。WGVC-M 格式是基于群速度控制、色散优化及加权思想构造的一种高精度差分格式。算例表明, 与同阶精度的 WENO 格式相比, WGVC-M 格式具有更好的激波及尺度分辨率。OMUSCL2 格式是对传统 MUSCL 格式进行优化后得到的一种有限体积重构方法。算例表明 OMUSCL2 在不增加重构基架点数及基本不增加计算量的情况下, 降低了原 MUSCL 格式的耗散及色散误差, 并提高了激波分辨率。为了充分利用有限差分及有限体积方法各自的优点, 作者构造了基于多块结构网格的有限体积-有限差分混合方法。该方法兼具有限差分的高精度及有限体积可适应复杂网格的优点, 可用于复杂几何多尺度流场的数值模拟。

关键词 群速度控制, MUSCL, 差分-有限体积混合

引言

计算流体力学(CFD)是飞行器气动设计的重要手段。而构造高精度、高分辨率且具有良好的激波捕捉能力的数值方法是 CFD 的重要研究内容。

飞行器内外流动以可压缩湍流为主, 直接数值模拟(DNS)和大涡模拟(LES)等高分辨率数值模拟手段是探讨飞行器可压缩湍流的流动机理及控制手段的重要方法。高分辨率数值模拟对数值方法有严格要求, 通常要求数值方法具有高分辨率、低耗散及较强的激波捕捉能力。以 WENO 格式^[1]为代表的高精度激波捕捉格式在可压缩复杂流动的高分辨率数值模拟中发挥了重要作用。WENO 格式具有精度高, 激波捕捉能力强, 鲁棒性好等优点, 在可压缩湍流 DNS 及 LES 中得到了广泛应用。但 WENO 格式仍具有耗散偏大及计算量大等不足之处需要改进。为了构造高效、低耗散的激波捕捉格式, 本文采用群速度控制(GVC)^[2]结合系数优化及加权思想, 构造了 5 及 7 阶修正的加权群速度控制格式(WGVC-M), 并通过多个数值算例对其进行了验证。

有限体积法是飞行器流动计算的主要方法之一, MUSCL^[3]格式是其中最常用的通量重构

方法。MUSCL 方法具有激波捕捉能力强, 耗散小等优点, 但其激波及波数分辨率仍有进一步优化的余地。作者采用色散及耗散优化手段, 对传统 MUSCL 格式进行了优化, 构造了 OMUSCL2 格式。在不增加整体基架点数的情况下, 进一步减小了格式的耗散及色散误差。通过多算例, 对格式进行了验证。

有限体积法及有限差分法是 CFD 中的主要数值方法。有限体积法具有守恒性好、复杂网格及复杂几何外形处理能力强等优点, 多用于复杂外形的流动计算。但受制于高阶重构的复杂性, 常用的有限体积法多为二阶精度, 而高阶精度的有限体积法构造复杂。有限差分法原理简单, 易于构造高精度(3 阶以上)格式, 多用于多尺度流动(如湍流)的高分辨率数值模拟。但高精度有限差分法对网格的光滑性要求苛刻, 处理复杂外形及复杂网格有一定困难。如能将有限体积与有限差分方法结合使用, 则可有效发挥二者的优点, 从而可进行复杂几何外形与复杂网格的高精度高分辨率计算。本文在多块结构网格框架下, 构建了有限体积-有限差分混合方法, 并通过航空典型算例进行了验证。

1 修正的加权群速度控制格式

群速度控制 (Group velocity control, GVC)^[2] 是由傅德薰、马延文等人提出的一种激波捕捉方法。该方法认为, 数值方法的色散误差是导致激波附近数值解振荡的原因。色散误差将导致不同波数的波传播速度 (群速度) 不一致, 从而造成间断的波分量之间相互散开 (即发生色散现象), 从而形成了数值振荡。该方法指出, 如果在间断两侧分别使用“快格式” (数值解的群速度快于精确解) 和“慢格式” (数值解的群速度慢于精确解), 则可最大限度地抑制间断附近的数值振荡, 从而达到激波捕捉效果。该方法构造激波捕捉格式形式简单, 计算量小, 且易于实现高精度, 适用于可压缩多尺度复杂流动的高分辨率数值模拟。

本文在群速度控制方法的框架下进行了扩展, 构造了一种修正的加权群速度控制格式 (WGVC-M)。该方法在群速度控制的基础上, 采用了“系数优化”及“加权”两种处理方法。首先是对“快格式”和“慢格式”进行色散及耗散优化^[4], 即构造出色散、耗散误差特性最优的“快格式”和“慢格式”。然后, 采用加权思想, 将格式的基架点切割成两个独立模板, 根据模板上的光滑性进行加权组合。从而提高了格式的间断捕捉能力。

使用 WGVC-M 格式构造的数值通量形式为:

$$\hat{f}_{j+1/2} = \sum_{l=0}^N \omega^{WGVC-M} \hat{f}_{j+1/2}^{(l)}$$

$$\omega^{WGVC-M} = (1 - \theta_{j+1/2}) g_l + \theta_{j+1/2} \omega_l$$

$$g_l = \omega_m d_l(\sigma_m) + \omega_s d_l(\sigma_s)$$

格式系数和表达式的具体表达式见文[5]。

通过一维 Shu-Osher 问题^[6]及二维 R-T 不稳定性问题^[7]对该格式进行了检验。图 1 为 Shu-Osher 问题 $t=1.8$ 时刻的瞬时密度分布图, 计算采用 201 个网格点。从中可以看出, 与 7 阶精度的 WENO 格式相比, 同阶 WGVC-M 格式的计算结果更接近精确解。显示了 WGVC-M 格式的分辨率更高, 耗散更小。图 2 为 R-T 不稳定性问题 $t=1.95$ 时刻的瞬时密度分布, 计算网格为 481×121 。从中可以看出, 在同样网格

情况下, WGVC-M 格式比同阶精度的 WENO 格式显示出了更好的分辨率, 计算的流动细节更为丰富。

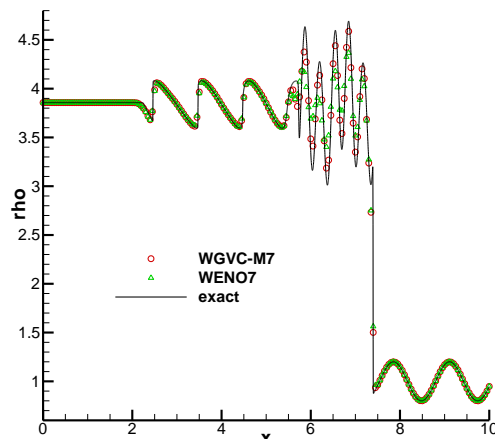


图 1 Shu-Osher 问题 $t=1.8$ 时刻的密度分布 (201 网格点)

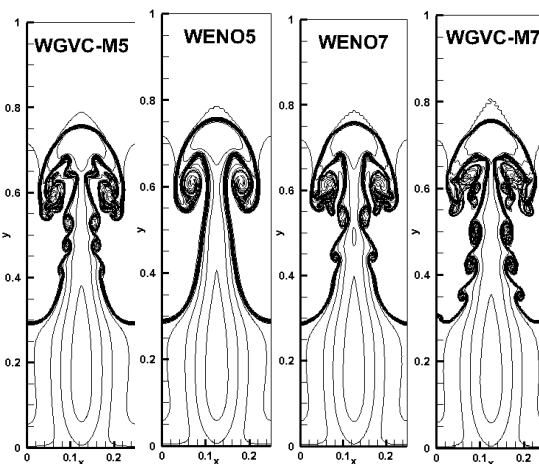


图 2 R-T 不稳定性问题 $t=1.95$ 时刻密度分布, 网格 481×121

2. 优化的 MUSCL 格式

Van Leer 的 MUSCL 格式^[3]是有限体积法中应用最多的数值格式之一。该格式利用偏左侧三个点 ($j-1, j, j+1$ 三点) 的信息构造界面 ($j+1/2$) 处的左值 $U_{j+1/2}^L$; 而利用偏右侧三个点的信息构造界面处的右值 $U_{j+1/2}^R$ (见图 3)。由于使用了三个点的信息, MUSCL 最高可具有 3 阶精度。从图 3 可以看出, 传统的 MUSCL 格式在构造 $j+1/2$ 点物理量时, 共计使用了 $j-1, j, j+1, j+2$ 这 4 个点的信息。而计算左右通量时, 只使用了三个点。即, 其中一个点的信息被“浪费”了。作者对其进行了改进, 计算

左、右通量 ($U_{j+1/2}^L, U_{j+1/2}^R$) 时, 均利用 $j-1, j, j+1, j+2$ 这 4 个点的信息。因而, 新格式理论上最高可以达到 4 阶精度, 而计算 $j+1/2$ 点通量所采用的基架点并没有增加。

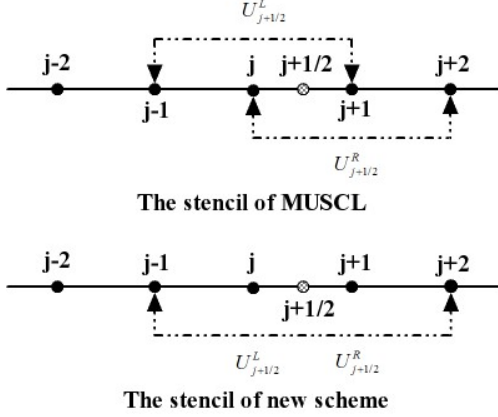


图 3 经典 MUSCL 格式与 OMUSCL2 的基架点

为了进一步提高格式的分辨率, 作者对该格式进行了系数优化。优化原则是“牺牲精度, 提高分辨率”。设定新格式的精度为二阶, 则格式中有两个可优化参数。分别对色散误差及耗散误差进行了优化, 优化原则是: 格式应具有尽量低的色散误差及保持较小的耗散误差 (零耗散的格式不易克服数值振荡, 而保持一定的耗散误差是必要的)。通过优化, 得到了一个二阶精度的线性格式, 该格式为本文构造格式的基础格式。在此基础上, 进行保单调限制^[8,9], 最终得到了新的格式。作者将其命名为二阶优化 MUSCL 格式 (OMUSCL2), 其具体表达式如下:

$$\begin{aligned}
 U_{j+1/2}^L &= U_j + \frac{1}{2} \tilde{\phi}_{j+1/2}^L [(U_{j+1} - U_j)] \\
 \tilde{\phi}_{j+1/2}^L &= \max(0, \min(2, \phi_{j+1/2}^L, 2r_{j+1/2}^L)) \\
 \phi_{j+1/2}^L &= 0.8 - 0.175 \frac{1}{r_{j+3/2}^L} + 0.375 r_{j+1/2}^L \\
 r_{j+1/2}^L &= \frac{U_j - U_{j-1} + \varepsilon}{U_{j+1} - U_j + \varepsilon}, r_{j+3/2}^L = \frac{U_{j+1} - U_j + \varepsilon}{U_{j+2} - U_{j+1} + \varepsilon}; \\
 U_{j+1/2}^R &= U_{j+1} - \frac{1}{2} \tilde{\phi}_{j+1/2}^R [(U_{j+1} - U_j)] \\
 \tilde{\phi}_{j+1/2}^R &= \max(0, \min(2, \phi_{j+1/2}^R, 2r_{j+1/2}^R)) \\
 \phi_{j+1/2}^R &= 0.8 - 0.175 \frac{1}{r_{j-1/2}^R} + 0.375 r_{j+1/2}^R \\
 r_{j+1/2}^R &= \frac{U_{j+2} - U_{j+1} + \varepsilon}{U_{j+1} - U_j + \varepsilon}, r_{j-1/2}^R = \frac{U_{j+1} - U_j + \varepsilon}{U_j - U_{j-1} + \varepsilon};
 \end{aligned}$$

其中 ε 为一小量 (例如可取为 10^{-6})。

为了检验 OMUSCL2 格式的效果, 作者通过算例对其进行了检验。图 2 为 RAE2822 翼型^[10,11]表面的压力系数分布, 该图显示出新格式具有更好的激波分辨率, 计算结果与实验吻合的更好。图 3 为使用不同格式得到的双马赫反射问题^[12]的密度等值线图, 该图显示出新格式具有更低的耗散误差; 同时新格式具有更高的分辨率, 尤其是在马赫杆附近区域。

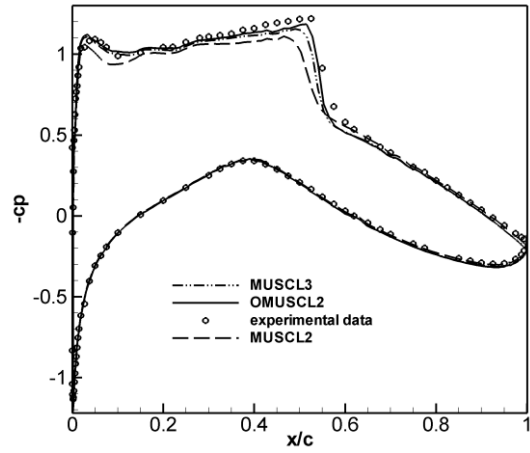


图 4 RAE2822 翼型表面压力系数分布

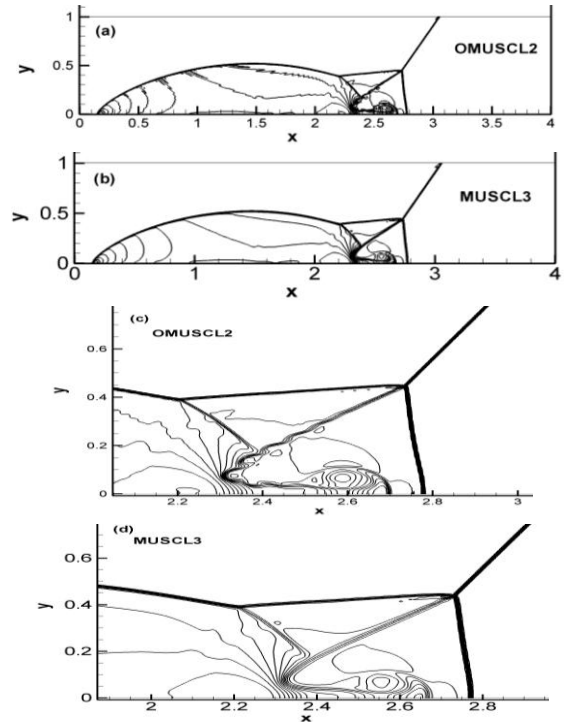


图 5 双 Mach 反射问题密度等值线 (从 1.731 到 20.92 有 30 个等值轮廓)

3. 有限体积-有限差分混合方法

有限体积和有限差分法是计算流体力学中最常用的数值方法。有限体积法具有守恒性好、鲁棒性强以及可适应复杂网格等优点，多用于复杂外形流场的计算。但受制于高阶重构的困难，高阶精度（大于 3 阶）的有限体积方法较为复杂，因而应用较少。而有限差分方法原理简单，易于实现高精度，多用于多尺度复杂流动的高分辨率计算。然而高阶有限差分法对网格的光滑性要求苛刻，在复杂网格上应用有一定困难。如将有限体积-有限差分方法结合使用，在网格充分光滑的区域使用有限差分法，在网格品质较差的区域使用有限体积法，则可发挥二者的优势，对提高计算品质很有帮助。

基于以上分析，作者开发了有限体积-有限差分混合方法。该方法基于多块对接结构网格。如图 6 所示，多个结构网格块采用对接形式连接，块和块之间采用一到两层对接网格来传递信息。传统的有限体积方法在网上进行有限体积离散。即，通过控制体上的积分，得到积分型控制方程：

$$\frac{\partial \bar{U}_M}{\partial t} + \frac{1}{\Omega_M} \oint_{\partial \Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds - \frac{1}{\Omega_M} \int_{\partial \Omega} \mathbf{F}_v \cdot \mathbf{n} ds = 0 \quad (1)$$

并通过计算控制体界面上的通量来获得控制体内守恒变量的时间导数，再通过时间推进获得新时空控制体内的守恒变量的平均值。在二阶精度的框架下，该平均值（ \bar{U}_M ）可看成定义在控制体形心的值。

有限体积-有限差分混合方法是在多块结构网格有限体积方法基础上改造而来的。如果其中某块网格品质充分光滑，可以在该块网格上进行利用差分方法进行守恒变量的计算。如图 6 所示，Block 1 采用有限差分法-有限体积混合方法计算；Block 2 和 Block 3 采用纯有限体积法计算。通常情况下，多块网格块-块之间的对接处并不能很好地保证网格的充分光滑性。因而，作者只对块内部网格采用有限差分法计算，块边界的多层网格（通常为 3 层）仍采用有限体积法计算。有限差分法通过差分离散求解曲线坐标系 N-S 方程：

$$\frac{\partial J^{-1}U}{\partial t} + \frac{\partial \hat{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \eta} = \frac{\partial \hat{E}_v}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{F}_v}{\partial \eta} \quad (2)$$

其中 J 为曲线坐标系坐标变换的 Jacobian 行列式。

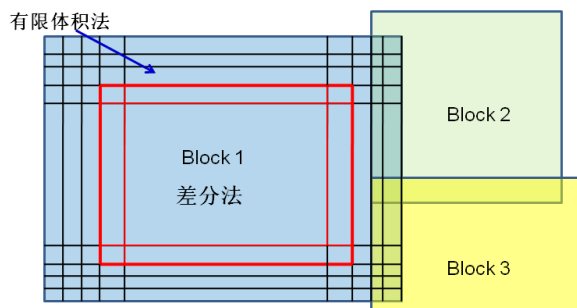
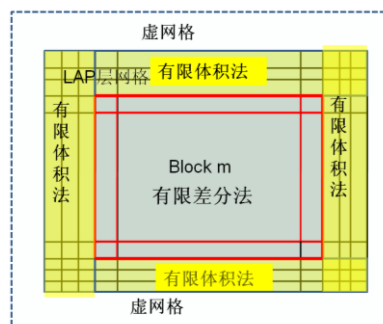


图 6 多块结构网格示意图

最终，Block 1 块内物理量的计算方法为：该块内部网格上的物理量采用差分法离散的 (2) 式计算；靠近边界的多层网格（通常为 3 层）采用有限体积离散的 (1) 计算（见图 7）。



块内部的网格及残差计算方法

图 7 块内差分-有限体积混合方法示意图

有限差分法的物理量定义在网格节点上，而通常情况下有限体积法的物理量定义在网格形心点上（网格中心型控制体）。为了做到几何的匹配，以原网格的中心点构造第二套网格，并在该套网格上进行有限差分法计算（图 8）。这样有限差分法及有限体积法所计算的物理量均定义在原网格的中心点上了。

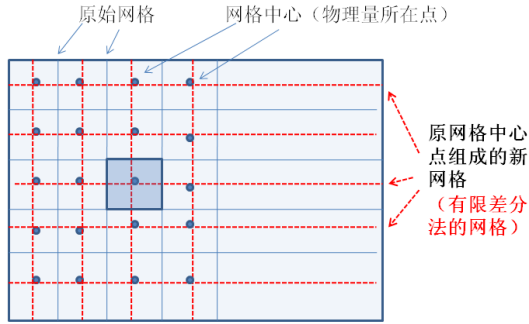


图 8 有限差分法的网格系统

为了验证结果，作者采用有限差分-有限体积混合方法对 RAE2822 翼型绕流问题^[10,11]进行了计算。如图 9 所示，计算区域被划分为 3 块网格，网格总数为 2.4 万。其中 Block2 网格包含了整个翼型，采用有限差分-有限体积混合方法计算。其中近边界的 3 层网格采用有限体积法，其余网格点采用有限差分法计算。而尾流区的 Block 1 及 Block3 采用纯有限体积法计算。本算例中，有限差分方法为 steger-Warming 通量分裂结合 5 阶 WENO 格式计算。而有限体积法为 Steger-Warming 分裂结合 2 阶 NND 格式计算。

图 10 为 RAE2822 超临界翼型表面的压力系数分布。从中可以看出，有限差分-有限体积混合方法的计算结果与实验值吻合理想，准确计算出了背风面处的激波位置，且激波两侧压力系数分布非常锐利，显示了该方法良好的激波分辨率。从图中还可以看出，该方法的计算结果明显优于纯有限体积法。

当然，通过方法优化，纯有限体积法的计算结果仍有优化余地，但受限于有限体积方法的精度，其激波分辨率仍无法达到高阶差分方法的计算效果。有限差分-有限体积混合方法是计算该类问题的一种比较有前途的方法。

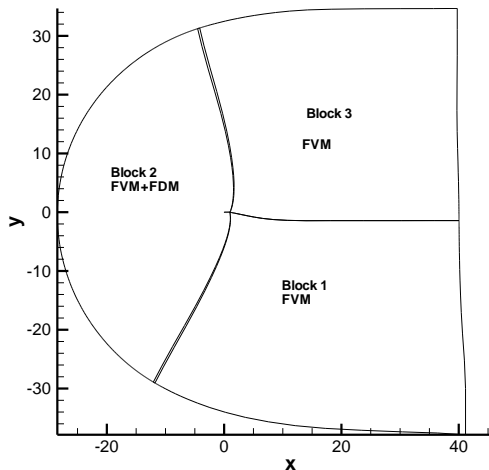


图 9 计算区域划分

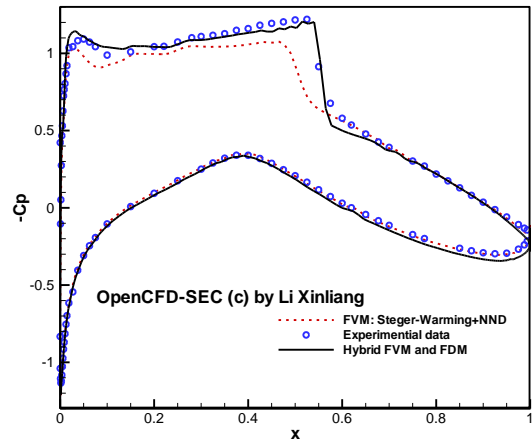
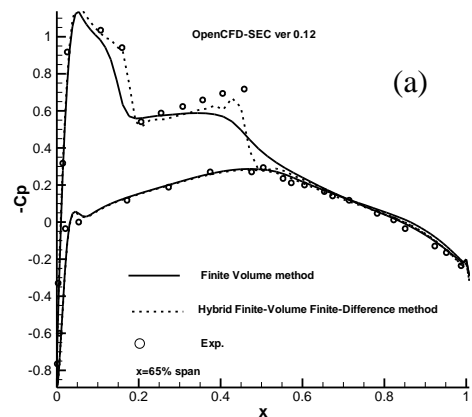


图 10 RAE2822 翼型表面的压力系数分布

为了进一步验证结果，作者进行了 M6 三维翼^[13]绕流的数值计算。计算参数为来流 Mach 数 0.8395，弦长定义的 Reynolds 数为 1.17×10^6 ，攻角为 3.06 度。计算网格总数为 31.7 万，被切割成 4 块。作者对机翼背风面所在的一块网格采用有限体积-有限差分混合方法，而对其余三块网格采用纯有限体积法计算。计算方法与上一个算例相同。

图 11 为该三维翼 66% 及 80% 翼展处的压力系数分布。可以看出，有限体积-有限差分混合方法计算出的背风面压力系数与实验吻合较好，其激波位置与激波分辨率均好于纯有限体积法的计算结果。



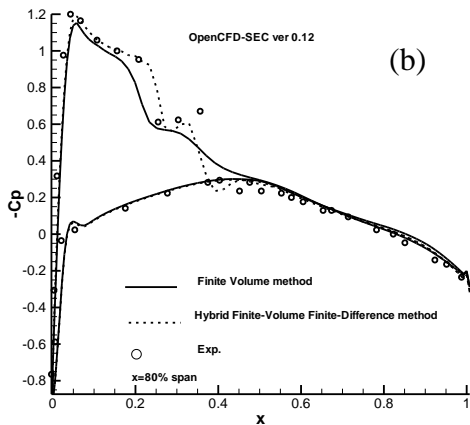


图 11 M6 三维翼 66%翼展 (上图) 及 80%翼展处 (下图) 的压力系数分布

4. 结论

为了进行飞行器复杂流动的高精度、高分辨率数值模拟, 作者构造适用于有限差分方法的修正的加权群速度控制格式(WGVC-M)以及适用于有限体积方法的优化 MUSCL 格式(OMUSCL2)。为了使方法可适用于复杂网格并具有局部高精度, 构造了有限差分-有限体积混合方法。

算例表明, 本文构造的数值方法具有如下优点:

- 1) 与同阶精度的 WENO 格式相比, WGVC-M 格式具有更好的激波及尺度分辨率。
- 2) OMUSCL2 在不增加重构基架点数及基本不增加计算量的情况下, 降低了原 MUSCL 格式的耗散及色散误差, 并提高了激波分辨率。
- 3) 有限差分-有限体积混合方法兼具有有限差分的高精度及有限体积可适应复杂网格的优点, 可用于复杂几何多尺度流场的数值模拟。

本项目得到国家自然科学基金 (Nos. 10632050, 10872205, 11072248), 973 项目 (2009CB724100), 863 项目 (2009AA010A139) 以及中国科学院“十一五”信息化专项 (INFO-115-B01) 的资助。感谢中国科学院网络中心超级计算中心以及上海超级计算中心提供计算机时。

数值方法的详细内容可参考《OpenCFD-EC 理论手

册》, 《OpenCFD-SC 理论手册》及《OpenCFD-SEC 理论手册》。作者开放有限体积软件 OpenCFD-EC, 有限差分软件 OpenCFD-SC 以及有限体积-有限差分混合软件 OpenCFD-SEC 的二维代码。理论手册、代码及算例可到作者网站下载:

<https://skydrive.live.com/?cid=1cc0dcbff560c149#>

参考文献

1. G.S. Jiang, C.W. Shu, Efficient implementation of weighted ENO schemes, *J. Comput. Phys.* 126 (1996) 202 - 228
2. D.X. Fu, Y.W. Ma, T. Kobayashi, Non-physical oscillations in numerical solutions: reason and improvement, *CFD J.* 4 (4) (1996) 427 - 450
3. Van Leer B. Towards the ultimate conservation difference scheme V: A second-order sequel to Godunov's Method. *J. Comput. Phys.*, 1979,32:101-136
4. S.K. Lele, Compact finite difference schemes with spectral-like resolution, *J. Comput. Phys.* 103 (1992) 16 - 42.
5. He ZW, Li XL, Fu DX and Ma YW, Modified weighted group velocity control schemes for hyperbolic conservation laws, submitted to *J. Comput. Phys.*
6. Shu C W., Osher S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory schemes. *J. Comput. Phys.*, 1989, 83: 32-78
7. J. Shi, Y.T. Zhang, C.W. Shu, Resolution of high order WENO schemes for complicated flow structures, *Journal of Computational Physics* 186 (2003) 690 - 696
8. He Z W, Li X L, Fu D X, Ma Y w, A 5th order monotonicity-preserving upwind compact difference scheme. *Science China.* 2011, 54: 1-12
9. Daru V, Tenaud C. High order one-step monotonicity-preserving schemes for unsteady compressible flow calculations. *J. Comput. Phys.*, 2004, 193: 563-594
10. Cook P. H., M. A. McDonal, M. C. P. Firmin, "Aerofoil RAE2822-Pressure Distributions, and Boundary Layer and Wake measurements," Experimental Data base for Computer Program Assessment, AGARD Report AR 138, 1979
11. <http://www.grc.nasa.gov/WWW/wind/valid/raetaf/raetaf.html>
12. P. Woodward, P. Collela, The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks. *J. Comput. Phys.* 1984, 54: 115-173
13. <http://www.grc.nasa.gov/WWW/wind/valid/m6wing/m6wing.html>

High Resolution Numerical Methods for Complex flows of aircrafts

LI Xinliang HE Zhiwei LENG Yan

(State Key Laboratory of High Temperature Gas Dynamics, Institute of Mechanics, C A S, No.15 Beisihuanxi Road, Beijing 100190, China)

Abstract High resolution numerical methods for complex flows in aeronautics and astronautics are addressed, including the weighted group velocity control schemes (WGVC-M), optimized MUSCL scheme (OMUSCL2) and hybrid finite volume and finite difference method. Numerical tests show that new schemes have higher resolution and lower dissipative than classical WENO or MUSCL schemes. Hybrid finite volume finite difference method contains the advantages of both finite volume and finite difference methods.

Key words Group velocity control, MUSCL, hybrid finite volume and finite difference method