

文章编号: 1000-7598-(2013)08-2385-08

基于 SEM 的可变形块体离散元法研究

张青波, 李世海, 冯 春, 王 杰

(中国科学院力学研究所, 北京 100190)

摘 要: 针对边坡工程中岩土体连续-非连续渐进破坏的特点, 提出一种新的变形体离散元方法 (DEM)。与传统有限单元法 (FEM) 不同, 弹簧元法 (SEM) 通过构建一组广义弹簧系统描述单元的力学行为。弹簧元法中的一个广义弹簧可以具有多个方向的刚度系数, 确定广义弹簧系统的构造形式及其各刚度系数表达式是弹簧元法的核心。以三角形单元为例, 介绍平面弹簧元的基本理论。对任何二维正交广义弹簧系统, 通过定义广义弹簧变形与单元应变之间的关系, 直接对比单元的应变能与弹簧系统的弹性势能即可得到广义弹簧刚度系数的表达式。定义泊松刚度系数和纯剪刚度系数两个系统参数, 描述正交广义弹簧之间的联系。对任意泊松比的材料, 该方法都可准确地描述泊松效应的影响, 计算结果与传统有限元法一致。该方法不要求得有限单元刚度矩阵的具体形式, 具有直接方便、物理意义明确的优点, 应用该方法给出任意 4 节点单元弹簧系统的构造形式及其各刚度系数的表达式。基于 SEM 的可变形块体离散元法, 用弹簧元中的广义弹簧求解块体变形, 用离散元中的接触弹簧计算块体间作用力, 在单元节点的控制方程中实现弹簧元-离散元耦合计算, 通过接触弹簧的状态实现材料由连续到非连续的破坏过程。在基于连续介质离散元法 (CDEM) 程序的基础上实现弹簧元-离散元耦合程序, 应用耦合程序计算均质土坡在重力作用下的弹塑性变形和基覆边坡在重力作用下的破坏, 初步证明该方法用于边坡变形渐进破坏分析的可行性。

关 键 词: 弹簧元法; 离散元法; 弹簧刚度; 边坡工程

中图分类号: TU 473

文献标识码: A

Study of deformable block discrete element method based on SEM

ZHANG Qing-bo, LI Shi-hai, FENG Chun, WANG Jie

(Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

Abstract: Aiming at the continuous-discontinuous failure process of rock and soil materials in slope engineering, a novel deformable block discrete element method which combined spring element method (SEM) and discrete element method (DEM) together is presented. Compared with the accustomed element in traditional finite element method (FEM), the element in SEM is described as a spring system that contained some orthogonal generalized springs. This generalized springs are defined in 3D space, which means that each spring can has two or three spring stiffness. How to determine the generalized spring stiffness for continuous material is the difficult and most important in SEM. With the triangle element as an example, the basic theory of SEM is introduced in detail. Assuming the relationship between the generalized spring deformation and the element strain, the generalized spring stiffness can be obtained directly by comparing the elastic strain energy of the element and the elastic potential energy of the spring system. The Poisson and shear stiffness coefficients were defined as system parameters to describe the relationship between different generalized springs. The SEM can consider the Poisson effect accurately for any Poisson's ratio material; and the result using SEM are the same with using traditional FEM. This method does not need to know the expression of the element-stiffness-matrix. It can be used in 4-node element; and the stiffness expressions of springs are given clearly. With the SEM used to compute the block deformation and the contact-spring used to calculate the interaction between blocks, the combined SEM/DEM program can be used to simulate the failure process of rock and soil material from continuous to discontinuous. The SEM and DEM are combined in the motion equation of each node in each element. The contact-spring in DEM satisfied specific strength criterion. When the contact-spring force exceeded its limit, the material became discontinuous from continuous. The combined SEM/DEM program is implemented easily in the continuum-based discrete element method (CDEM) program. The simulation of a homogeneous soil slope under gravity shows

收稿日期: 2012-06-06

基金项目: 国家重点基础研究发展计划(973)项目资助 (No. 2010CB731506); 国家自然科学基金资助 (No. 11002146)。

第一作者简介: 张青波, 男, 1986 年生, 博士研究生, 主要从事地震作用下边坡的破坏机理及数值模拟方面的研究。E-mail: zhangqingbo@imech.ac.cn

通讯作者: 李世海, 男, 1958 年生, 博士, 研究员, 主要从事非连续介质力学及其应用方面的研究。E-mail: shli@imech.ac.cn

that the SEM is performed as good as FEM when using line elastic constitutive and reasonable when using Mohr-Coulomb strength criterion. The simulation of a bedrock and overburden layer slope shows that the combined program is suitable to simulate the slope failure process.

Key words: spring element method(SEM); discrete element method(DEM); spring stiffness; slope engineering

1 引言

随着计算机的快速发展,数值计算方法在岩土工程中的应用已愈来愈普遍。连续介质变形分析方法如有限单元法(FEM)、有限差分法(FDM)、边界元法(BEM)和无单元法(MM)等主要适用于分析岩土介质的小变形、小位移等连续-弹塑性问题,多用于岩土工程的应力-变形分析^[1-2]。以连续介质大变形分析为目标发展起来的拉格朗日元法(FLAC)运用流体力学中跟踪质点运动的物质描述方法,根据构形变化不断更新坐标系,可以模拟岩土介质的有限变形大位移问题。迟世春等^[3]使用该法对土坡稳定性进行了强度折减分析。非连续介质分析方法主要有块体和颗粒离散单元法(DEM,商业软件 UDEC、3DEC、PFC)、刚体弹簧元法(RBSM)和非连续变形分析法(DDA)等。

考虑到岩土介质非均匀、非连续的空间复杂性和渐进破坏过程的时间复杂性等特点,关于连续-非连续耦合算法(有限差分-离散元、有限元-离散元、有限元-边界元、边界元-离散元等)、渐进分析法(RFPA)等数值计算方法的研究应用也愈来愈多。路晓敏等^[4]把有限元和块体元法结合起来,推导了有限元与块体元法统一力学模型的支配方程,用于分析地下洞室围岩的稳定性。Morris 等^[5]和 Bagherzadeh 等^[6-7]开发了有限元-离散元耦合算法。李世海等^[8-10]提出了基于连续介质力学的离散单元法(CDEM),根据有限元的刚度矩阵分析得出了离散弹簧的刚度及方向,从而将块体离散成为弹簧^[8];通过求取单元刚度矩阵的特征值,给出了各离散弹簧刚度的解析表达式,研究了立方体 8 节点单元中离散弹簧的性质,得到棱弹簧、面对角线弹簧以及体对角线弹簧的刚度和方向表达式,并给出了这些弹簧的刚度以及方向与泊松比的关系图^[9]。张冲等^[11-12]提出了三维简单变形体离散元方法(3SDEM)。周伟等^[13-14]建立了基于随机模拟技术的随机颗粒不连续变形模型,并在此基础上引入了黏聚力模型。唐春安^[15]介绍并总结了 RFPA 的研究现状及应用。冯春等^[16]将长方体单元离散为 12 根弹簧,通过离散弹簧系统和传统有限元单元节点力的等效关系给出了弹簧刚度的表达式。

上述算法在一定程度上都能实现模拟岩体失效

的连续-非连续过程,但这些方法有的程序实现比较复杂,有的弹簧刚度的物理意义并不明确,不能精确反映连续介质力学中的泊松效用而导致计算结果同传统有限元存在一定的差距^[16]。

与有限元法和数值流形法描述连续介质的方法不同,弹簧元法(SEM)^[17]是一种使用离散弹簧系统描述连续介质的等效分析方法,具有构造简单、计算效率高等优点。在弹簧元法基础上,本文给出了一种新的求解弹簧刚度系数的方法,并发展了弹簧元-离散元耦合算法。该算法可描述介质连续-非连续过程,具有一定的理论基础且易于程序实现。本文(1)介绍了平面弹簧元的基本原理,给出了通过应变能表达式直接标定弹簧刚度系数的方法。

(2)给出了 4 节点单元弹簧系统的构成形式及其刚度系数的表达式。(3)论述了弹簧元-离散元耦合算法的程序实现。(4)使用该耦合程序计算了均质土坡在重力作用下的弹塑性变形和基覆边坡在重力作用下的破坏情况,验证了程序的可靠性。

2 平面弹簧元的基本原理

弹簧元法是一种新的用于描述连续介质力学行为的数值分析方法,与有限元法及数值流形法不同,它的核心思想是用一组离散弹簧系统描述连续介质,用弹簧系统的弹性势能表征连续介质的弹性应变能,并用这种等效给出各弹簧刚度系数与材料弹性常数和坐标的关系,通过对这种弹簧-质点系统的迭代求解分析连续介质力学问题。李世海等^[17]构造了三角形和四面体弹簧元,对连续问题得到了与传统有限元等价的一组弹簧系统,该方法通过有限元的单元刚度矩阵标定各弹簧的刚度。

本文给出了一种更简单的形式,考虑如图 1 所示的 3 节点三角形单元,利用 S^0 、 S^1 两个基本弹簧组成的弹簧系统进行等效。弹簧 S^0 的首端为节点 0、末端为节点 1,弹簧 S^1 的首端为插值点 N 、末端为节点 2。在图 1 所示的局部坐标系下,假设单元各节点坐标可表示为 $0(0,0)$ 、 $1(a,0)$ 、 $2(na,b)$ (a 、 b 为长度, n 为系数),用 u 、 v 分别表示节点沿 x 、 y 方向的位移分量。该单元为常应变单元,故插值点 N 的位移可由 0、1 两点的节点位移线性插值得

$$u_N = u_0 + n(u_1 - u_0) \quad (1)$$

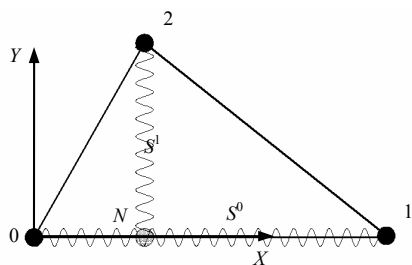


图 1 三角形单元弹簧系统
Fig.1 The spring system of the triangle element

弹簧元中的基本弹簧是一种广义的弹簧，用于描述两点之间任意方向的相对运动和力之间的关系。每个基本弹簧包含一个法向弹簧和一个切向弹簧：法向弹簧用于描述两点之间的法向运动，切向弹簧用于描述两点之间的切向运动。将两点之间的相对位移沿法向方向的分量称为基本弹簧的法向变形，沿切向方向的分量称为基本弹簧的切向变形。则弹簧变形可用节点位移表示为

$$\left. \begin{aligned} u_{xx} &= u_1 - u_0; & v_{xy} &= v_1 - v_0 \\ u_{yx} &= u_2 - u_N; & v_{yy} &= v_2 - v_N \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中： u_{xx} 、 v_{xy} 、 u_{yx} 、 v_{yy} 分别为弹簧 S^0 、 S^1 沿 x 、 y 方向的变形。由式 (2) 及应变的定义可知，单元的应变分量与弹簧变形之间的关系可以描述为

$$\varepsilon_{xx} = \frac{u_{xx}}{a}; \quad \varepsilon_{yy} = \frac{v_{yy}}{b}; \quad \varepsilon_{xy} = \frac{v_{xy}}{a}; \quad \varepsilon_{yx} = \frac{u_{yx}}{b} \quad (3)$$

根据有限单元法的基本理论^[18]，并结合式 (3)，3 节点三角形单元的应变能表达式可写为

$$\left. \begin{aligned} \Pi &= \frac{Et}{2(1-\mu^2)} \iint \left[\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2 + 2\mu\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} + \frac{1-\mu}{2}(\varepsilon_{xy} + \varepsilon_{yx})^2 \right] dx dy = \\ &\frac{1}{2} \frac{EtA}{(1-\mu^2)a^2} u_{xx}^2 + \frac{1}{2} \frac{EtA}{(1-\mu^2)b^2} v_{yy}^2 + \\ &\frac{1}{2} \frac{GtA}{a^2} v_{xy}^2 + \frac{1}{2} \frac{GtA}{b^2} u_{yx}^2 + \\ &\frac{\mu EtA}{(1-\mu^2)ab} u_{xx} v_{yy} + \frac{GtA}{ab} v_{xy} u_{yx} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式中： E 为弹性模量； t 为单元厚度； μ 为泊松比； G 为剪切模量； A 为单元面积。

按弹簧元的基本思路，弹簧系统的弹性势能应与单元应变能等效，如图 1 所示两个基本弹簧组成的弹簧系统的弹性势能也应写成多项式的形式：

$$\left. \begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} K^0 u_{xx}^2 + \frac{1}{2} K^1 v_{yy}^2 + K^P u_{xx} v_{yy} + \\ &\frac{1}{2} G^0 v_{xy}^2 + \frac{1}{2} G^1 u_{yx}^2 + G^S v_{xy} u_{yx} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式中： K^0 、 G^0 、 K^1 、 G^1 、 K^P 、 G^S 为刚度系数。

对比式 (4)、(5) 可明显看出

$$\left. \begin{aligned} K^0 &= \frac{EtA}{(1-\mu^2)a^2}; & G^0 &= \frac{GtA}{a^2} \\ K^1 &= \frac{EtA}{(1-\mu^2)b^2}; & G^1 &= \frac{GtA}{b^2} \\ K^P &= \frac{\mu Et}{2(1-\mu^2)}; & G^S &= \frac{Gt}{2} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

且存在如下关系式：

$$G^0 = \frac{1-\mu}{2} K^0; \quad G^1 = \frac{1-\mu}{2} K^1; \quad G^S = \frac{1-\mu}{2\mu} K^P \quad (7)$$

根据各刚度系数在应变能中代表的物理意义，将 K^0 、 K^1 分别称为 S^0 、 S^1 弹簧的法向刚度系数，将 G^0 、 G^1 分别称为 S^0 、 S^1 弹簧的切向刚度系数，将 K^P 称为泊松刚度系数，将 G^S 称为纯剪刚度系数。

根据弹性势能表达式 (5)，可以按照最小势能原理建立单元弹簧力和弹簧变形之间的关系式：

$$\left. \begin{aligned} F^{0x} &= K^0 u_{xx} + K^P v_{yy} \\ F^{0y} &= G^0 v_{xy} + G^S u_{yx} \\ F^{1x} &= G^1 u_{yx} + G^S v_{xy} \\ F^{1y} &= K^1 v_{yy} + K^P u_{xx} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

式中： F^i 为第 i 个基本弹簧力沿 j 方向的分量。

式 (8) 表明，两个基本弹簧不是完全独立的，弹簧 S^0 的法向弹簧力不仅与 S^0 的法向变形 u_{xx} 有关，还与 S^1 的法向变形 v_{yy} 有关。泊松刚度系数和纯剪刚度系数的物理意义正是描述两个正交基本弹簧之间的关系，属于系统参数，反映连续介质的泊松效应。

各节点的节点力可通过弹簧力求得

$$\left. \begin{aligned} F_0^x &= -F^{0x} - (1-n)F^{1x}; & F_0^y &= -F^{0y} - (1-n)F^{1y} \\ F_1^x &= F^{0x} - nF^{1x}; & F_1^y &= F^{0y} - nF^{1y} \\ F_2^x &= F^{1x}; & F_2^y &= F^{1y} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

式中： F_i^j 为第 i 个节点的节点力沿 j 方向的分量。

通过理论推导发现，用弹簧元可以通过基本弹簧的弹簧力求取单元的应力：

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{2F^{0x}}{bt}; & \tau_{xy} &= \frac{2F^{0y}}{bt} \\ \tau_{yx} &= \frac{2F^{1x}}{at}; & \sigma_{yy} &= \frac{2F^{1y}}{at} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

弹簧元法用正交弹簧组成的离散弹簧系统描述连续介质，正交弹簧之间的相互作用由泊松刚度系数和纯剪刚度系数描述，突破了以往使用简单独立弹簧系统描述连续介质的桎梏，从理论上解决了传统离散元法无法描述连续介质力学行为的问题。

3 4 节点单元的构造形式

对4节点四边形单元，可由图2所示的 $S^0 - S^5$ 6个相互正交的基本弹簧构成弹簧系统，其中单元节点坐标为： $0(0,0)$ 、 $1(L,0)$ 、 $2(mL, H/(1-g))$ 、 $3(nL, H)$ ，其中， L, H 为长度； m, g, n 为系数。为保证4节点单元不会退化为三角形，需要节点坐标之间需要满足如下关系：

$$L \neq 0; \quad g \neq 1; \quad m \neq n; \quad H \neq 0 \quad (11)$$

插值点 $0', 1', 2', 4, 5, 6, 7$ 的坐标可通过节点坐标线性插值得到。若单元为双线性单元，在局部坐标系下，插值点的位移也可通过单元节点的位移线性插值得到。

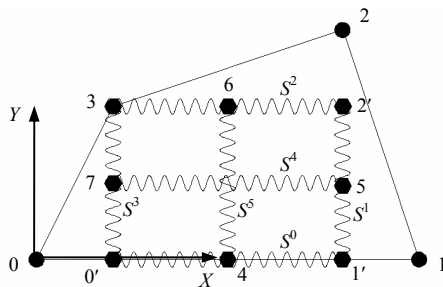


图2 4节点单元弹簧系统
Fig.2 The spring system of the 4-node element

由单元应变和弹簧变形的定义可知，四边形单元应变分量与弹簧变形之间的关系为

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{u_4}{L(m-n)} + \frac{(u_2 - u_0)}{2LH(m-n)} \left(y - \frac{H}{2} \right) \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{v_4}{L(m-n)} + \frac{(v_2 - v_0)}{2LH(m-n)} \left(y - \frac{H}{2} \right) \\ \varepsilon_{yx} &= \frac{u_5}{H} + \frac{(u_3 - u_1)}{2LH(m-n)} \left(x - \frac{L(m-n)}{2} - nL \right) \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{v_5}{H} + \frac{(v_3 - v_1)}{2LH(m-n)} \left(x - \frac{L(m-n)}{2} - nL \right) \end{aligned} \right\} (12)$$

式中： u_i, v_i 分别为 S^i 沿 x, y 方向的弹簧变形。

与三角形单元一样，通过对比有限元弹性应变能积分表达式和弹簧系统弹性势能表达式，可以得到各弹簧的刚度系数表达式。采用直接积分法求解任意4节点单元的应变能表达式，从而避免了使用等参单元法求解任意四边形单元产生的误差。任意

4节点单元的应变能表达式较为复杂，这里只列出弹簧系统的弹性势能与弹簧刚度系数的表达式：

$$\Pi = \left. \begin{aligned} &\frac{1}{2} K^{2i} u_{2i}^2 + \frac{1}{2} G^{2i} v_{2i}^2 + \frac{1}{2} G^{2i+1} u_{2i+1}^2 + \frac{1}{2} K^{2i+1} v_{2i+1}^2 + \\ &\frac{1}{2} K_0^P u_0 v_3 + \frac{1}{2} K_1^P u_0 v_1 + \frac{1}{2} K_2^P u_2 v_1 + \frac{1}{2} K_3^P u_2 v_3 + \\ &\frac{1}{2} G_0^S v_0 u_3 + \frac{1}{2} G_1^S v_0 u_1 + \frac{1}{2} G_2^S v_2 u_1 + \frac{1}{2} G_3^S v_2 u_3, \end{aligned} \right\} (13)$$

$(i=0-2)$

式中： K_j^P, G_j^S ($j=0\sim 3$)为在 j 点相交的两个基本弹簧之间的泊松刚度系数和纯剪刚度系数。

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{\mu Et}{1-\mu^2}; \quad B = 24(-1+g)^2(m-n)^2 \\ K_0^P &= \frac{A}{B} \left[-3+3m^2+m(6-4n)+g^2m(5m-2n)+n^2-2g(-2+4m^2-4m(-1+n)+n^2) \right] \\ K_1^P &= \frac{A}{B} \left[3+m^2+m(2-4n)-8n+3g^2m(m-2n)+3n^2-2g(2+2m^2+m(2-6n)-6n+3n^2) \right] \\ K_2^P &= \frac{A}{B} \left[1+(3-4g+g^2)m^2-4n+(5-2g)n^2+m(2-2(-2+g)^2n) \right] \\ K_3^P &= \frac{A}{B} \left[-1+(5-8g+3g^2)m^2+(3-2g)n^2+m(2-2(-2+g)^2n) \right] \\ G_j^S &= \frac{1-\mu}{2\mu} K_j^P, \quad (j=0-3) \\ C &= \frac{1}{6(-1+g)^3(m-n)^2} \frac{H}{L} \frac{Et}{1-\mu^2} \\ K^0 &= C \left[-1+3g+g^3m+g^2(-3-m+n) \right] \\ K^2 &= C \left[g(-1+m)-m+n \right] \\ K^4 &= 2C \left[-1-m+g^3m+g(2+4m-3n)+n+g^2(-4m+n) \right] \\ D &= \frac{1}{6(-1+g)(m-n)^2} \frac{L}{H} \frac{Et}{1-\mu^2} \\ K^1 &= D \left[-1+3n+n^3+(-3+(-1+g)m)n^2 \right] \\ K^3 &= D \left[-1+(-1+g)m^3-2m(-1+n)+m^2(-1+n)+n \right] \\ K^5 &= 2D \left[1+(-1+g)m^3-2n+n^3+m^2(-1+(4-3g)n)+m(-1+4n+(-4+g)n^2) \right] \\ G^i &= \frac{1-\mu}{2} K^i, \quad (i=0-5) \end{aligned} \right\} (14)$$

当 $n=0$ 、 $m=1$ 、 $g=0$ 时，该 4 节点单元退化为矩形单元，此时各弹簧的刚度系数表达式为

$$\left. \begin{aligned} K_0^P &= K_1^P = K_2^P = K_3^P = \frac{1}{4} \frac{\mu Et}{1-\mu^2} \\ G_j^S &= \frac{1-\mu}{2\mu} K_j^P, \quad (j=0-3) \\ K^0 &= K^2 = \frac{1}{6} \frac{H}{L} \frac{Et}{1-\mu^2}; \quad K^1 = K^3 = \frac{1}{6} \frac{L}{H} \frac{Et}{1-\mu^2} \\ K^4 &= \frac{2}{3} \frac{H}{L} \frac{Et}{1-\mu^2}; \quad K^5 = \frac{2}{3} \frac{L}{H} \frac{Et}{1-\mu^2} \\ G^i &= \frac{1-\mu}{2} K^i, \quad (i=0-5) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

由弹簧变形求弹簧力、节点力及单元应力的具体推导过程与三角形单元大致相同，这里不再赘述。

对 4 节点四边形单元，如果假设单元变形前后插值点处的位移满足如下条件：

$$\left. \begin{aligned} u \left(\frac{x_0+x_1+x_2+x_3}{4}, \frac{y_0+y_1+y_2+y_3}{4} \right) &= \frac{u_0+u_1+u_2+u_3}{4} \\ v \left(\frac{x_0+x_1+x_2+x_3}{4}, \frac{y_0+y_1+y_2+y_3}{4} \right) &= \frac{v_0+v_1+v_2+v_3}{4} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

则可以将四边形单元分为 4 个三角形单元，按照三角形弹簧元的计算方法分别计算出每个三角形单元的基本弹簧力的值，然后，再按照差值函数将 6 个基本弹簧力反馈到四边形单元的 4 个节点上。需要说明的是，由 4 个三角形组成的四边形单元通常不再是双线性单元。

4 可变形块体离散元的程序实现

弹簧元是为连续介质力学提出的数值计算分析方法，离散元是基于质点运动规律提出的数值计算方法。李世海等^[8-10]提出的 CDEM 是一种有限元与块体离散元耦合算法，其特点为有限元节点与离散元质点重合，基于波的传播速度是有限值，认为某一节点当前时刻的运动只与相邻节点有关。本文在 CDEM 的基础上，使用弹簧元计算块体内部的变形-力关系，描述连续介质时的无阻尼节点控制方程：

$$\tilde{F}_i = m_i \ddot{u}_i + F_i^{mn} \quad (17)$$

式中： \tilde{F}_i 为节点外力项； $m_i \ddot{u}_i$ 为惯性力项； F_i^{mn} 为式 (9) 求得的块体内力项； i 为节点号； m 、 n 为单元号。相邻块体的相邻节点为公共节点，块体间满足位移协调条件。

描述离散介质时的无阻尼节点控制方程为

$$\tilde{F}_i = m_i \ddot{u}_i + F_i^{mn} + k_i^{mn} u_i^{mn} \quad (18)$$

式中： $k_i^{mn} u_i^{mn}$ 为界面弹簧力项，表示相邻块体相邻节点之间接触弹簧的接触变形-力关系，块体间不满足位移协调条件。

假设 t 时刻的 $F_i(t)$ 、 $\dot{u}_i(t)$ 、 $\ddot{u}_i(t)$ 、 $u_i(t)$ 、 $m_i(t)$ 、 $K_i(t)$ 、 $k_i(t)$ 已知，则 $t + \Delta t$ 时刻

$$\left. \begin{aligned} \bar{F}_i(t + \Delta t) &= F_i^{mn}(t) + k_i^{mn}(t) u_i^{mn}(t) \\ \ddot{u}_i(t + \Delta t) &= \frac{F_i(t + \Delta t) - \bar{F}_i(t + \Delta t)}{m_i(t)} \\ \dot{u}_i(t + \Delta t) &= \dot{u}_i(t) + \ddot{u}_i(t + \Delta t) \Delta t \\ u_i(t + \Delta t) &= u_i(t) + \dot{u}_i(t + \Delta t) \Delta t \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

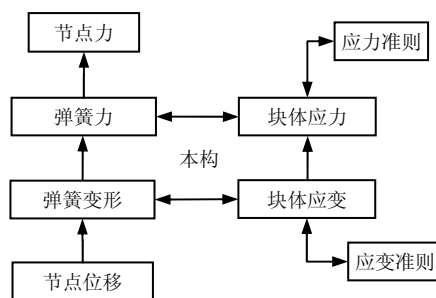


图 3 弹簧元计算流程
Fig.3 Calculation flow chart of the SEM program

可变形块体离散元中变形体的计算流程如图 3 所示。文献[17]通过定义刚度系数折减系数构造了非线性弹簧，实现了非线性本构的计算。本文塑性计算采用摩尔-库仑准则和抗拉强度准则：

$$\left. \begin{aligned} f^s &= \sigma_1 - \sigma_3 N_\varphi + 2c\sqrt{N_\varphi} \\ f^t &= \sigma_3 - \min(T, c/\tan \varphi) \\ h &= f^t + \alpha^p (\sigma_1 - \sigma^p) \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

式中： σ_1 为最小主应力； σ_3 为最大主应力； c 为黏聚力； φ 为内摩擦角； T 为抗拉强度； N_φ 、 α^p 、 σ^p 为常数^[19]。由式 (10) 的单元应力 σ_{ij} 求主应力 σ_i ，代入式 (20) 判断单元状态：若 $f^s \leq 0$ ， $h \leq 0$ ，则剪切破坏；若 $f^t \geq 0$ ， $h > 0$ ，则拉伸破坏。然后，求修正主应力 σ'_i 及单元应力 σ'_{ij} ，修正公式的具体表达形式见文献[19]。最后，将 σ'_{ij} 代入式 (10)、(9) 求满足强度准则的弹簧力及节点力，实现 SEM 中的塑性计算。

5 数值算例

5.1 均质土坡在自重作用下的弹性计算

以均质土坡在自重作用下的位移场计算为例，并与 Ansys 软件的计算结果进行对比，对程序的弹性计算结果进行检验。计算模型网格及尺寸如图 4

所示,模型底部施加固定约束,两侧施加法向约束,土的密度为 2.00 g/cm^3 ,弹性模量为 20 MPa ,泊松比为 0.25 。在坡面上分别选取高度为 $0、2、4、6、8、10 \text{ m}$ 的6个点作为监测点,比较 SEM 与 FEM (使用 Ansys 商用程序) 的计算结果,见图 5。

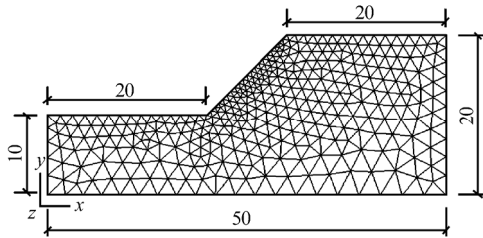
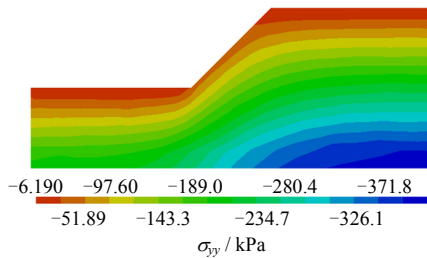
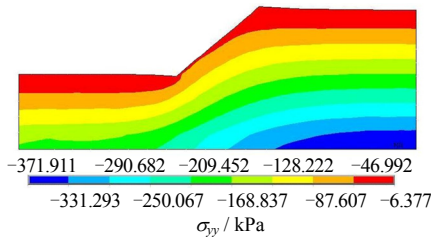


图 4 均质土坡计算模型(单位: m)

Fig.4 Model of a homogenous slope(unit: m)



(a) SEM 计算



(b) FEM 计算

图 5 SEM 和 FEM 计算的竖向应力云图(单位: kPa)

Fig.5 Nephogram of σ_{yy} using SEM and FEM(unit: kPa)

重力作用下的计算结果如图 6 所示。从图中可以看出,两种方法计算的应力场及坡面监测点位移相同,说明弹性计算程序是可靠的。

5.2 均质土坡在自重作用下的塑性计算

对图 4 所示边坡进行塑性计算,该坡坡脚为 45° ,采用摩尔-库仑强度准则。假设土体黏聚力、抗拉强度和剪胀角都为 0,仅考虑内摩擦角对计算结果的影响,如图 7 所示。由图可见,内摩擦角为 45° 时,坡面监测点的 x 方向位移随计算时步的变化曲线,坡面各点位移值随迭代步的增加趋于定值,说明此时坡体处于稳定状态;内摩擦角为 30° 时,监测点的 x 方向位移曲线,除坡脚处的监测值趋于定值外,其他监测点的位移都随迭代步的增加而不

断增大,说明此时坡体处于塑性流动状态。

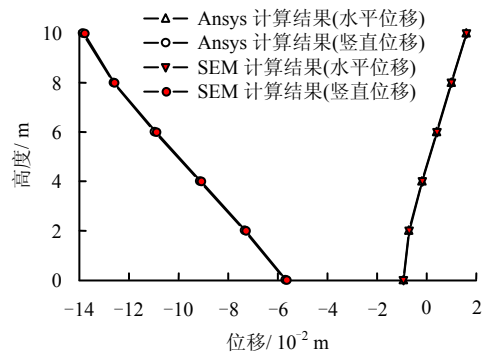
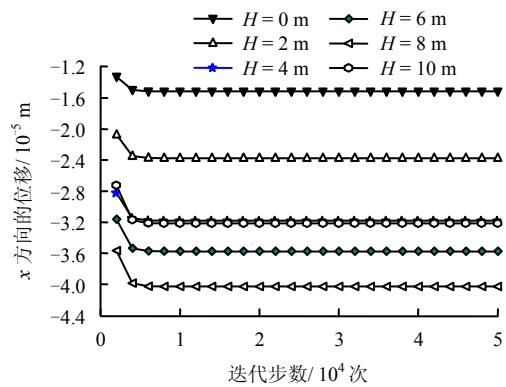
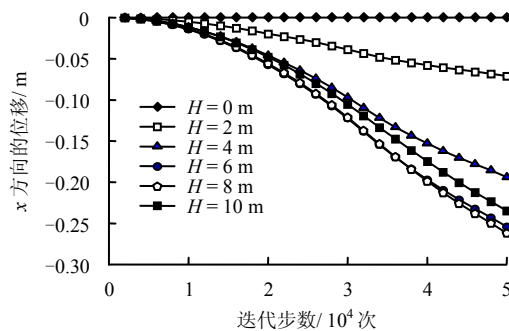


图 6 坡面不同高度点 FEM-SEM 计算结果对比

Fig.6 Comparison between monitoring results using FEM and monitoring results using SEM



(a) 内摩擦角为 45°



(b) 内摩擦角为 30°

图 7 监测点 x 方向位移历程曲线

Fig.7 The history curves of monitors' x -displacements

为了更直观地说明内摩擦角变化对坡体破坏状态的影响,绘制了不同内摩擦角下坡体的破坏情况。图 8 为不同参数下在迭代 5×10^4 步时计算模型破坏状态。从图中可以看出,随着内摩擦角的减小,破坏范围逐渐增大,厚度逐渐变深;即强度越低,破坏区域越大,这与常识相符,说明程序塑性计算结果是合理的。

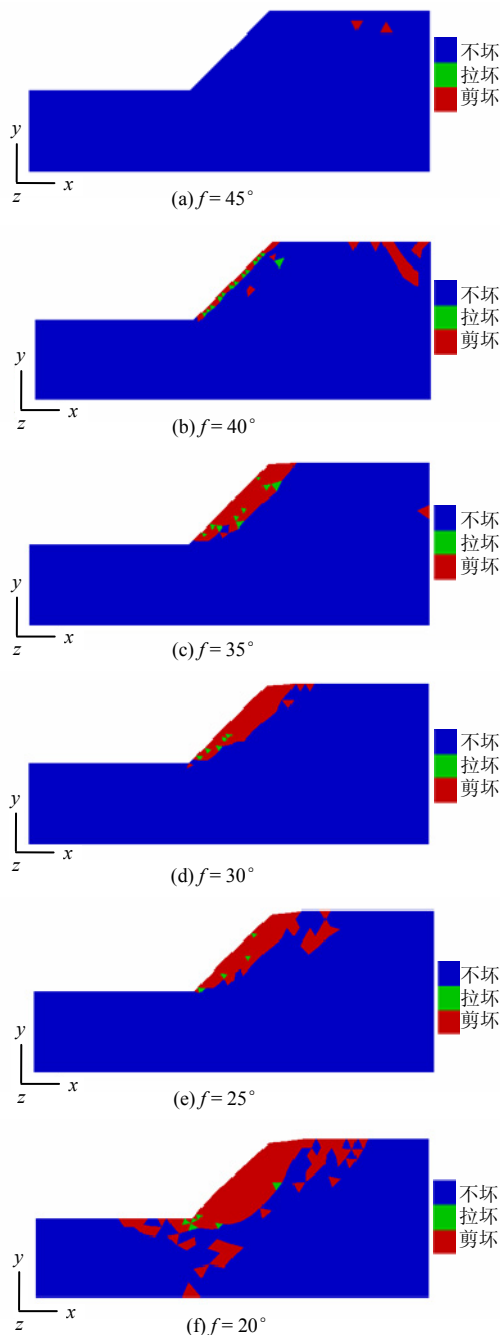


图 8 不同内摩擦角下的状态云图
Fig.8 Nephogram of slope state at different internal friction angles

5.3 基覆边坡在自重作用下的破坏计算

基覆边坡（下部为坚硬基岩上部为风化节理岩石或土石混合物覆盖层）是工程中常见的一种边坡形式，通常这种边坡的破坏集中在覆盖层区域。将基覆边坡概化为图 9 所示的计算模型。其中，组 1 代表覆盖层材料，计算过程中允许块体元间进行破坏接触计算，并给定覆盖层的内摩擦角为 5° ，界面弹簧的计算服从摩尔-库仑准则。组 2 代表基岩材料，在计算过程中只进行弹性计算。因为覆盖层材料的强度很小，自重作用下模型边坡的破坏情况见

图 10。从图中可以看出，基覆边坡在自重作用下的破坏形式为覆盖层前缘沿下部基覆交界面和覆盖层内部演化的滑动轨迹发生运动性破坏，初步表明，该程序可以在定性上描述边坡的运动性破坏过程。

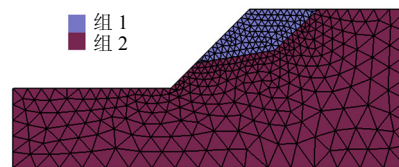


图 9 基覆边坡计算模型
Fig.9 Model of a bedrock and overburden layer slope

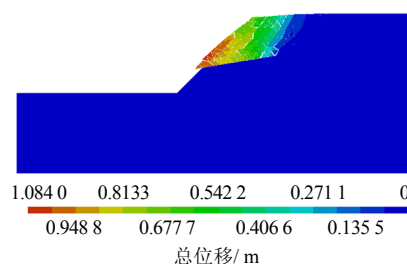


图 10 基覆边坡破坏情况(单位: m)
Fig.10 The movement of a bedrock and overburden layer slope (unit: m)

6 结 语

以三角形单元为例，本文介绍了平面弹簧元的构造原理。弹簧元法用正交基本弹簧组成的离散弹簧系统描述连续介质，正交基本弹簧之间的相互作用由泊松刚度系数和纯剪刚度系数描述，突破了以往使用简单独立弹簧系统描述连续介质的桎梏，为离散元法描述连续介质力学行为提供了新思路，具有构造形式简单，计算效率高等优点。

弹簧元法中的基本弹簧是一种广义的弹簧，用于描述两点之间任意方向的相对运动和力之间的关系。通过定义弹簧变形同单元应变之间的关系，给出了由应变能和弹性势能表达式直接得到弹簧刚度表达式的方法，并给出了任意四边形的弹簧元刚度系数表达式。

基于连续介质的离散单元法基础，实现了弹簧元-离散元的耦合计算，均质土坡线弹性算例表明，该程序的弹性变形计算结果同通用有限元软件 Ansys 完全一致，均质土坡塑性算例表明，材料内摩擦角小于坡角时，坡体表面出现塑性区，而且随着内摩擦角的减小，塑性区范围逐渐增大，说明坡体进入塑性流动状态，验证了程序塑性计算的可行性。基覆边坡的破坏算例表明，应用该方法基本上可以直观描述基覆类边坡土体逐渐破坏的运动过程。

参 考 文 献

- [1] JING L, HUDSON J A. Numerical methods in rock mechanics[J]. **International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences**, 2002, 39: 409—427.
- [2] 张楚汉. 论岩石、混凝土离散-接触-断裂分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2008, 27(2): 217—235.
ZHANG Chu-han. Discrete-contact-fracture analysis of rock and concrete[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2008, 27(2): 217—235.
- [3] 迟世春, 关立军. 基于强度折减的拉格朗日差分方法分析土坡稳定性[J]. 岩土工程学报, 2004, 26(1): 42—46.
CHI Shi-chun, GUAN Li-jun. Slope stability analysis by Lagrangian difference method based on shear strength reduction[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2004, 26(1): 42—46.
- [4] 路晓敏, 任青文. 基于有限元与块体元法的地下洞室变形及稳定性分析[J]. 工程力学, 2001, 18(4): 60—66.
LU Xiao-min, REN Qing-wen. Deformation and stability analysis of underground cave based on the combination of “FEM” and “BKEM”[J]. **Engineering Mechanics**, 2001, 18(4): 60—66.
- [5] MORRIS J P, RUBIN M B, BLOCK G I, et al. Simulations of fracture and fragmentation of geologic materials using combined FEM/DEM analysis[J]. **International Journal of Impact Engineering**, 2006, 33: 463—473.
- [6] BAGHERZADEH K h A, MIRGHASEMI A A, MOHAMMADI S. Micromechanics of breakage in sharp-edge particles using combined DEM and FEM[J]. **Particuology**, 2008, 6(5): 347—361.
- [7] BAGHERZADEH K h A, MIRGHASEMI A A, MOHAMMADI S. Numerical simulation of particle breakage of angular particles using combined DEM and FEM[J]. **Powder Technology**, 2011, 205: 15—29.
- [8] LI S H, ZHAO M H, WANG Y N, et al. A continuum-based discrete element method for continuous deformation and failure process[C]//WCCM VI in Conjunction with APCOM'04. Beijing: [s. n.], 2004.
- [9] 魏怀鹏, 易大可, 李世海, 等. 基于连续介质模型的离散元方法中弹簧性质研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2006, 25(6): 1159—1169.
WEI Huai-peng, YI Da-ke, LI Shi-hai, et al. Study of spring properties of continuum-based discrete element method[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2006, 25(6): 1159—1169.
- [10] 田振农, 李世海, 刘晓宇, 等. 三维块体离散元可变形数值模拟研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2008, 27(增刊 1): 2832—2840.
TIAN Zhen-nong, LI Shi-hai, LIU Xiao-yu, et al. Research on deformable calculation method based on three-dimensional block discrete element[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2008, 27(Supp. 1): 2832—2840.
- [11] 张冲, 金峰, 侯艳丽. 三维简单变形体离散元方法[J]. 岩土工程学报, 2007, 29(2): 159—163.
ZHANG Chong, JIN Feng, HOU Yan-li. 3-D simple deformable distinct element method[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2007, 29(2): 159—163.
- [12] 金峰, 胡卫, 张冲, 等. 考虑弹塑性本构的三维模态变形体离散元方法断裂模拟[J]. 工程力学, 2011, 28(5): 1—7.
JIN Feng, HU Wei, ZHANG Chong, et al. A fracture simulation using 3-D mode distinct element method (3MDEM) with elastoplastic constitutive model[J]. **Engineering Mechanics**, 2011, 28(5): 1—7.
- [13] 周伟, 常晓林, 周创兵, 等. 堆石体应力变形细观模拟的随机散粒体不连续变形模型及应用[J]. 岩石力学与工程学报, 2009, 28(3): 491—499.
ZHOU Wei, CHANG Xiao-lin, ZHOU Chuang-bing, et al. Stochastic granule discontinuous deformation model of rock fill and its application[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2009, 28(3): 491—499.
- [14] 常晓林, 胡超, 马刚, 等. 模拟岩体失效全过程的连续-非连续变形体离散元方法及应用[J]. 岩石力学与工程学报, 2011, 30(10): 2004—2011.
CHANG Xiao-lin, HU Chao, MA Gang, et al. Continuous-discontinuous deformable discrete element method to simulate the whole failure process of rock masses and application[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2011, 30(10): 2004—2011.
- [15] TANG Chun-an, TANG Shi-bin. Applications of rock failure process analysis(RFPA) method[J]. **Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering**, 2011, 3(4): 352—372.
- [16] 冯春, 李世海, 姚再兴. 基于连续介质力学的块体单元离散弹簧法研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2010, 29(增刊 1): 2690—2705.
FENG Chun, LI Shi-hai, YAO Zai-xing. Study of block-discrete-spring method based on continuum mechanics[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2010, 29(Supp.1): 2690—2705.
- [17] LI Shi-hai, ZHANG Ya-nan, FENG Chun. A spring system equivalent to continuum model[C]//Discrete Element Methods. London: [s. n.], 2010: 75—85.
- [18] 王勰成, 邵敏. 有限单元法基本原理和数值方法[M]. 北京: 清华大学出版社, 1996.
- [19] Itasca Consulting Group, Inc. Fast lagrangian analysis of continua theory and background[M]. Minneapolis, USA: Itasca Consulting Group. , Inc, 2005.