

非均质 Cosserat 连续体细-宏观均匀化条件^{*}

刘其鹏^{1**} 刘晓宇² 高月华³

(¹大连交通大学土木与安全工程学院,大连,116028)(²中国科学院力学研究所,北京,100190)

(³大连交通大学交通运输学院,大连,116028)

摘要 基于平均场理论的多尺度模拟关键问题之一是给定恰当的代表性体积单元(RVE)的边界条件,以使均匀化过程满足 Hill-Mandel 细宏观能量等价条件,也即 Hill 宏观均匀化条件.对于非均质 Cosserat 连续体,已有的研究工作只能得到合理的混合平动位移-偶应力表征元边界条件,常用的一致平动位移-转角以及周期边界条件等均不能使用,给计算均匀化算法推导和实施带来了困难,也阻碍了多尺度分析方法的进一步发展与应用.为此,论文在推导和建立一个新的 Hill 定理版本基础上,不仅成功地给定了多种强形式表征元边界条件,而且构造出了合理的弱形式周期边界条件,这些条件既满足细宏观能量等价也符合一阶平均场理论基本假定,可在均匀化方法中推广与应用.

关键词 平均场理论, Cosserat 连续体, 细-宏观均匀化, RVE 边界条件

0 引言

在平均场理论框架内对非均质连续体进行细-宏观均匀化模拟首先需要阐述 Hill 定理.据此,可以在表征元(representative volume element, RVE)边界上给定静力学容许的应力/偶应力边界条件以及运动学容许的平动位移/转角边界条件,以保证细-宏观均匀化过程满足 Hill-Mandel 能量等价条件,也即 Hill 宏观均匀化条件^[1,2].经典 Cauchy 连续体平均场理论的 Hill 定理^[1]由 Hill 于 1963 年给出,它为正确给定 RVE 边界条件以及后续相应的解析和计算多尺度均匀化方法的研究工作奠定了理论基础.经过多年的研究积累,经典 Cauchy 连续体平均场理论已经充分发展并广泛应用于复合材料等的多尺度分析和计算^[3-7].

由于能够有效地考虑转角自由度以及材料内尺度效应,近年来 Cosserat 连续体模型及其有限元法已经在复合材料和颗粒材料等非均质材料力学行为的研究中得到了大力发展和应用^[8-12].尽管已有学者将基于 Hill-Mandel 条件的均匀化方法推广到 Cosserat 连续体^[13-17],但是对于非均质 Cosserat 连续体 Hill 定理的研究工作仍然较少^[18,19].

需要强调指出的是:RVE 边界条件的恰当给定对于非均质微结构边值问题的求解、基于细观力学

的宏观本构关系的建立以及细-宏观一致性算法模量的推导等均具有重要的意义.换句话说,RVE 边界条件的合理给定是基于平均场理论的多尺度均匀化模拟能否成功的前提和关键.但是,文献中已有的 Cosserat 连续体 Hill 定理^[18]只能够给定混合平动位移-偶应力 RVE 边界条件,均匀化方法中常用的一致位移/转角和周期边界条件等均不能够恰当地给定,这给非均质 Cosserat 连续体均匀化方法的进一步研究、发展和应用带来了困难.

为此,本文作者注意到与经典连续体平均场理论不同的是,在 Cosserat 连续体平均场理论中,宏观平均偶应力的定义存在两种不同的方式:一是只考虑细观偶应力的影响^[14,18,20],二是同时考虑细观表征元内偶应力和应力矩的影响^[15-17,21].已有 Hill 定理建立在第一种平均偶应力的定义之上,本文则从第二种平均偶应力定义出发,推导和建立了一个新的 Hill 定理版本.进而通过该定理,本文成功地给定了多种强形式 RVE 边界条件,而且构造出了合理的弱形式周期边界条件,这些条件既满足细宏观能量等价也符合一阶平均场理论基本假定,因此,可以在均匀化方法中推广与应用,从而为 Cosserat 连续体多尺度均匀化方法的深入研究与发展提供更为广泛的理论基础.

* 国家自然科学基金项目(11202042, U1234209, 11002031)和国家 973 项目(2010CB731506)资助.
2012-04-23 收到第 1 稿, 2012-11-15 收到修改稿.

** 通讯作者. Tel:0411-84106755, E-mail:liuqp@djtu.edu.cn.

1 Cosserat 连续体控制方程^[22]

在 Cosserat 连续体模型中,独立的运动学变量是平动位移 u_i 和转角 ω_i . 相应的静力学分量除应力张量 σ_{ij} 以外还增加了偶应力张量 μ_{ij} . 应变张量 ϵ_{ij} 与曲率张量 κ_{ij} 分别定义为:

$$\epsilon_{ij} = u_{j,i} - e_{ijk}\omega_k \tag{1}$$

$$\kappa_{ij} = \omega_{j,i} \tag{2}$$

平衡方程表示为:

$$\sigma_{ij,i} = 0 \tag{3}$$

$$\mu_{ij,i} + e_{ijl}\sigma_{kl} = 0 \tag{4}$$

需要注意的是:由于模型中引入了偶应力张量,应力张量不再具有对称性. 边界面上平衡条件表示为:

$$t_i = n_j\sigma_{ji} \tag{5}$$

$$m_i = n_j\mu_{ji} \tag{6}$$

其中 t_i 和 m_i 分别表示边界上面的面力和面力偶, n_j 是边界面的单位外法线向量.

本文研究工作属于平均场理论范畴,涉及宏观和细观两个尺度,由于宏细观均采用 Cosserat 连续体模型,因此以下的阐述中细观量 $\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}, \mu_{ij}, \kappa_{ij}$ 和宏观量 $\bar{\sigma}_{ij}, \bar{\epsilon}_{ij}, \bar{\mu}_{ij}, \bar{\kappa}_{ij}$ 均各自独立地满足以上控制方程式(1)-(6).

2 Cosserat 连续体 Hill 定理

2.1 Cosserat 连续体平均场理论基本公式

在平均场理论中,宏观场 \bar{g}_{ij} 通常定义为细观场 g_{ij} 的体积平均,即:

$$\bar{g}_{ij} = \frac{1}{V} \int_V g_{ij} dV \tag{7}$$

其中 V 是表征元的体积. 根据式(7),并结合式(1)-(2)及 Gauss 定理,应变及曲率的细宏观联系表示为:

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_{ij} &= \frac{1}{V} \int_V \epsilon_{ij} dV = \frac{1}{V} \int_V (u_{j,i} - e_{ijk}\omega_k) dV = \\ &= \frac{1}{V} \int_V u_{j,i} dV - e_{ijk} \frac{1}{V} \int_V \omega_k dV = \bar{u}_{j,i} - e_{ijk} \bar{\omega}_k \end{aligned} \tag{8}$$

$$\bar{\kappa}_{ij} = \bar{\omega}_{j,i} = \frac{1}{V} \int_V \omega_{j,i} dV = \frac{1}{V} \int_S n_j \omega_i dS \tag{9}$$

在平均场理论中,一般只对基本运动学量的导数进行体积平均,比如: $\bar{u}_{j,i} = \frac{1}{V} \int_V u_{j,i} dV$; 很少有对运动学量直接做体积平均. 而依据经典连续体平均场理论中的宏观应变定义方式,本文中的式(8)给出了 $\bar{\omega}_k = \frac{1}{V} \int_V \omega_k dV$ 也即对转角自由度直接进行了

体积平均. 这是因为在连续介质力学中,相对于平移自由度而言,转角自由度本身就是一种高阶量. 这一点从 Cosserat 连续体控制方程(1)就可以看出,转角自由度本身就对应变做贡献. 另外,应变梯度理论^[23]的研究中给出了 $\bar{\omega}_i = e_{ijk} \bar{u}_{k,j} / 2$ 的表达式,这也说明了转角的高阶项特征.

另一方面,以颗粒材料为例而言,为了克服应变局部化问题带来的尺度效应等问题,宏观 Cosserat 连续体模型虽然引入了转角自由度 $\bar{\omega}_k$,但是对于 $\bar{\omega}_k$ 的细观解释一直以来都是模糊的. 对于颗粒材料 $\bar{\omega}_k = \frac{1}{V} \int_V \omega_k dV$ 的含义是:宏观的 Cosserat 连续体模型中的转角自由度 $\bar{\omega}_k$ 等于细观表征元内离散颗粒的转角自由度 ω_k 的体积平均,这也对宏观模型中转角自由度提供了一个物理上的解释^[24].

平均应力张量表示为:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{ij} &= \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij} dV = \frac{1}{V} \int_V \frac{\partial}{\partial x_k} (\sigma_{kj} x_i) dV = \\ &= \frac{1}{V} \int_S n_k \sigma_{kj} x_i dS = \frac{1}{V} \int_S x_i t_j dS \end{aligned} \tag{10}$$

与经典连续体平均场理论不同的是,非均质 Cosserat 连续体宏观平均偶应力张量的定义是不唯一的,这是基于经典连续体平均场理论的均匀化方法不能够简单、直接地推广和应用于 Cosserat 连续体的一个重要原因,是建立 Cosserat 连续体平均场理论基本公式及其均匀化方法的理论关键. 目前主要有两种不同的观点:一是宏观偶应力的定义直接表示为细观偶应力的体积平均^[14,18,20],即:

$$\bar{\mu}_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \mu_{ij} dV \tag{11}$$

二是平均偶应力的定义应当同时考虑细观表征元上偶应力以及应力矩的影响^[15-17],表示为:

$$\bar{\mu}_{ij} = \frac{1}{V} \int_V (\mu_{ij} - x_i e_{jkl} \sigma_{kl}) dV \tag{12}$$

为此,本文在以下的 Hill 定理推导中暂不引入宏观平均偶应力的具体定义方式.

Cosserat 连续体平均场理论中的 Hill-Mandel 条件表示为:

$$\overline{\sigma_{ij}\epsilon_{ij}} + \overline{\mu_{ij}\kappa_{ij}} = \bar{\sigma}_{ij}\bar{\epsilon}_{ij} + \bar{\mu}_{ij}\bar{\kappa}_{ij} \tag{13}$$

其中:

$$\overline{\sigma_{ij}\epsilon_{ij}} = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij}\epsilon_{ij} dV \tag{14}$$

$$\overline{\mu_{ij}\kappa_{ij}} = \frac{1}{V} \int_V \mu_{ij}\kappa_{ij} dV \tag{15}$$

式(1)代入式(14)得到:

$$\overline{\sigma_{ij}\epsilon_{ij}} = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij}\epsilon_{ij} dV = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij} (u_{j,i} - e_{ijk}\omega_k) dV = \frac{\overline{\sigma_{ij}u_{j,i}} - e_{ijk} \overline{\sigma_{ij}\omega_k}}{\quad} \quad (16)$$

其中：

$$\overline{\sigma_{ij}u_{j,i}} = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij}u_{j,i} dV \quad (17)$$

$$e_{ijk} \overline{\sigma_{ij}\omega_k} = e_{ijk} \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij}\omega_k dV \quad (18)$$

考虑到式(8),有：

$$\overline{\sigma_{ij}\epsilon_{ij}} = \overline{\sigma_{ij}u_{j,i}} - e_{ijk} \overline{\sigma_{ij}\omega_k} \quad (19)$$

式(16)和式(19)代入式(13)得到：

$$\overline{\sigma_{ij}\epsilon_{ij}} + \overline{\mu_{ij}\kappa_{ij}} - \overline{\sigma_{ij}\epsilon_{ij}} - \overline{\mu_{ij}\kappa_{ij}} = (\overline{\sigma_{ij}u_{j,i}} - \overline{\sigma_{ij}u_{j,i}}) + (\overline{\mu_{ij}\kappa_{ij}} - \overline{\mu_{ij}\kappa_{ij}}) - e_{ijk} (\overline{\sigma_{ij}\omega_k} - \overline{\sigma_{ij}\omega_k}) \quad (20)$$

2.2 Cosserat 连续体 Hill 定理

根据经典连续体平均场理论^[2],有：

$$\overline{\sigma_{ij}u_{j,i}} = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij}u_{j,i} dV = \frac{1}{V} \int_V \frac{\partial}{\partial x_i} (\sigma_{ij}u_j) dV = \frac{1}{V} \int_S n_i \sigma_{ij} u_j dS = \frac{1}{V} \int_S t_j u_j dS \quad (21)$$

进一步可得：

$$\overline{\sigma_{ij}u_{j,i}} - \overline{\sigma_{ij}u_{j,i}} = \frac{1}{V} \int_S [n_k \sigma_{kj} (u_j - \bar{u}_{j,i} x_i) - n_k \bar{\sigma}_{kj} (u_j - \bar{u}_{j,i} x_i)] dS = \frac{1}{V} \int_S (u_j - \bar{u}_{i,j} x_j) (n_k \sigma_{ki} - n_k \bar{\sigma}_{ki}) dS \quad (22)$$

类比经典连续体平均场理论中上式的构造过程^[2], $\overline{\mu_{ij}\kappa_{ij}}$ 可以表示为：

$$\overline{\mu_{ij}\kappa_{ij}} = \frac{1}{V} \int_S (\omega_i - \bar{\omega}_{i,j} x_j) (n_k \mu_{ki} - n_k \bar{\mu}_{ki}) dS - \frac{1}{V} \int_V \mu_{ki,k} \omega_i dV + \bar{\omega}_{i,j} \frac{1}{V} \int_V (\mu_{ij} - x_i e_{jkl} \sigma_{kl}) dV \quad (23)$$

将上式右端展开并结合式(1)-(10)不难验证式(23)的正确性,这里不再赘述。

式(22)和式(23)代入式(20)得到：

$$\overline{\sigma_{ij}\epsilon_{ij}} - \overline{\sigma_{ij}\epsilon_{ij}} + \overline{\mu_{ij}\kappa_{ij}} - \overline{\mu_{ij}\kappa_{ij}} = \frac{1}{V} \int_S (u_i - \bar{u}_{i,j} x_j) (n_k \sigma_{ki} - n_k \bar{\sigma}_{ki}) dS + \frac{1}{V} \int_S (\omega_i - \bar{\omega}_{i,j} x_j) (n_k \mu_{ki} - n_k \bar{\mu}_{ki}) dS + \left[\bar{\kappa}_{ij} \frac{1}{V} \int_V (\mu_{ij} - x_i e_{jkl} \sigma_{kl}) dV - \overline{\mu_{ij}\kappa_{ij}} + e_{ijk} \overline{\sigma_{ij}\omega_k} \right] \quad (24)$$

需要强调的是：式(24)的推导过程中没有考虑宏观平均偶应力的具体定义形式,也即式(24)对于各种宏观偶应力的定义均适用. 式(12)代入式(24)

得：

$$\overline{\sigma_{ij}\epsilon_{ij}} - \overline{\sigma_{ij}\epsilon_{ij}} + \overline{\mu_{ij}\kappa_{ij}} - \overline{\mu_{ij}\kappa_{ij}} = \frac{1}{V} \int_S (u_i - \bar{u}_{i,j} x_j) (n_k \sigma_{ki} - n_k \bar{\sigma}_{ki}) dS + \frac{1}{V} \int_S (\omega_i - \bar{\omega}_{i,j} x_j) (n_k \mu_{ki} - n_k \bar{\mu}_{ki}) dS + e_{ijk} \overline{\sigma_{ij}\omega_k} \quad (25)$$

根据式(4)和式(10),式(25)右端最后一项可表示为：

$$e_{ijk} \overline{\sigma_{ij}\omega_k} = \frac{1}{V} \int_V e_{ijk} \sigma_{jk} dV = \frac{1}{V} \int_V (-\mu_{ki,k}) dV = -\frac{1}{V} \int_S n_k \mu_{ki} \bar{\omega}_i dS \quad (26)$$

另外注意到：

$$-\frac{1}{V} \int_S n_k \mu_{ki} \bar{\omega}_i dS = -\bar{\mu}_{ki} \bar{\omega}_i \frac{1}{V} \int_S n_k dS = 0 \quad (27)$$

式(26)减去式(27)得到：

$$e_{ijk} \overline{\sigma_{ij}\omega_k} = -\frac{1}{V} \int_S n_k \mu_{ki} \bar{\omega}_i dS + \frac{1}{V} \int_S n_k \bar{\mu}_{ki} \bar{\omega}_i dS = -\frac{1}{V} \int_S \bar{\omega}_i (n_k \mu_{ki} - n_k \bar{\mu}_{ki}) dS \quad (28)$$

式(28)代入式(25)得到：

$$\overline{\sigma_{ij}\epsilon_{ij}} - \overline{\sigma_{ij}\epsilon_{ij}} + \overline{\mu_{ij}\kappa_{ij}} - \overline{\mu_{ij}\kappa_{ij}} = \frac{1}{V} \int_S (u_i - \bar{u}_{i,j} x_j) (n_k \sigma_{ki} - n_k \bar{\sigma}_{ki}) dS + \frac{1}{V} \int_S [\omega_i - (\bar{\omega}_i + \bar{\omega}_{i,j} x_j)] (n_k \mu_{ki} - n_k \bar{\mu}_{ki}) dS \quad (29)$$

这样在平均偶应力定义式(12)下得到了非均质 Cosserat 连续体平均场理论一个新版本的 Hill 定理。

另外,通过将式(11)代入式(24)也可以得到文献中已有版本的 Hill 定理^[18],即：

$$\overline{\sigma_{ij}\epsilon_{ij}} - \overline{\sigma_{ij}\epsilon_{ij}} + \overline{\mu_{ij}\kappa_{ij}} - \overline{\mu_{ij}\kappa_{ij}} = \frac{1}{V} \int_S (u_i - \bar{u}_{i,j} x_j) (n_k \sigma_{ki} - n_k \bar{\sigma}_{ki}) dS + \frac{1}{V} \int_S (\omega_i - \bar{\omega}_i) (n_k \mu_{ki} - n_k \bar{\mu}_{ki}) dS \quad (30)$$

2.3 Cosserat 连续体 Hill-Mandel 条件

根据式(29)和式(30),若要均匀化过程满足细-宏观能量等价条件式(13),需要在 RVE 边界上满足：

$$\frac{1}{V} \int_S (u_i - \bar{u}_{i,j} x_j) (n_k \sigma_{ki} - n_k \bar{\sigma}_{ki}) dS \quad (31)$$

并且,根据已有的 Hill 定理式(30),还需满足：

$$\frac{1}{V} \int_S (\omega_i - \bar{\omega}_i) (n_k \mu_{ki} - n_k \bar{\mu}_{ki}^{(1)}) dS = 0 \quad (32)$$

根据本文的 Hill 定理式(29), 还需满足:

$$\frac{1}{V} \int_S [\omega_i - (\bar{\omega}_i + \bar{\omega}_{i,j} x_j)] (n_k \mu_{ki} - n_k \bar{\mu}_{ki}^{(2)}) dS \quad (33)$$

其中 $\bar{\mu}_{ki}^{(1)}$ 和 $\bar{\mu}_{ki}^{(2)}$ 的定义分别见式(11)和式(12). 从式(31)-(33)可以看出二者的应力-位移边界积分式是相同的, 并且与经典连续体 Hill 定理表达式均相同^[1-3]. 若不考虑偶应力-转角项的影响, 两个版本的 Hill 定理均可退化为经典连续体 Hill 定理. 不同之处除平均偶应力定义以外, 集中体现在的转角边界积分项中, 已有工作给出的是 $(\omega_i - \bar{\omega}_i)$, 而本文给出的是 $[\omega_i - (\bar{\omega}_i + \bar{\omega}_{i,j} x_j)]$, 虽然直观看来二者形式上区别不是很大, 但对于恰当的 RVE 边界条件的给定, 却有显著不同.

3 强形式 RVE 边界条件

3.1 已有 Hill 定理给出的强形式边界条件

根据式(31)和式(32), 可以在 RVE 边界上给定如下逐点满足的(强形式)边界条件:

- (1) 一致平动位移-转角边界条件:

$$u_i |_S = \bar{u}_{i,j} x_j, \quad \omega_i |_S = \bar{\omega}_i \quad (34)$$

- (2) 一致面应力-偶应力边界条件:

$$\begin{cases} t_i |_S = (n_k \sigma_{ki}) |_S = n_k \bar{\sigma}_{ki} \\ m_i |_S = (n_k \mu_{ki}) |_S = n_k \bar{\mu}_{ki}^{(1)} \end{cases} \quad (35)$$

- (3) 混合一致平动位移-偶应力边界条件:

$$u_i |_S = \bar{u}_{i,j} x_j, \quad m_i |_S = (n_k \mu_{ki}) |_S = n_k \bar{\mu}_{ki}^{(1)} \quad (36)$$

- (4) 混合一致面应力-转角边界条件:

$$t_i |_S = (n_k \sigma_{ki}) |_S = n_k \bar{\sigma}_{ki}, \quad \omega_i |_S = \bar{\omega}_i \quad (37)$$

3.2 本文 Hill 定理给出的强形式边界条件

根据式(31)和式(33), 可以在 RVE 边界上给定如下逐点满足的强形式边界条件:

- (1) 一致位移-转角边界条件:

$$u_i |_S = \bar{u}_{i,j} x_j, \quad \omega_i |_S = \bar{\omega}_i + \bar{\omega}_{i,j} x_j \quad (38)$$

- (2) 一致面应力-偶应力边界条件:

$$\begin{cases} t_i |_S = (n_k \sigma_{ki}) |_S = n_k \bar{\sigma}_{ki} \\ m_i |_S = (n_k \mu_{ki}) |_S = n_k \bar{\mu}_{ki}^{(2)} \end{cases} \quad (39)$$

- (3) 混合一致位移-偶应力边界条件:

$$u_i |_S = \bar{u}_{i,j} x_j, \quad m_i |_S = (n_k \mu_{ki}) |_S = n_k \bar{\mu}_{ki}^{(2)} \quad (40)$$

- (4) 混合一致面应力-转角边界条件:

$$t_i |_S = (n_k \sigma_{ki}) |_S = n_k \bar{\sigma}_{ki}, \quad \omega_i |_S = \bar{\omega}_i + \bar{\omega}_{i,j} x_j \quad (41)$$

需要指出的是: 以上强形式边界条件直接由相应的 Hill 定理给出, 因此都能够自然满足 Hill-Mandel 细宏观能量等价条件式(13), 但是它们能否在均匀化中恰当使用, 还需要检验是否满足一阶平

均场理论基本假定.

3.3 强形式边界条件的检验

由于平动位移条件 $u_i |_S = \bar{u}_{i,j} x_j$ 和面应力 $t_i |_S = (n_k \sigma_{ki}) |_S = n_k \bar{\sigma}_{ki}$ 与经典连续体 RVE 边界条件一致, 因此不需做重复验证. 本节主要通过对比的方式, 检验两个 Hill 定理给出的转角条件以及偶应力边界条件的正确性.

首先看转角边界条件, 式(34)和式(38)中的转角边界条件分别代入式(9)给出:

$$\bar{\kappa}_{ij} = \frac{1}{V} \int_S \omega_j n_i dS = \bar{\omega}_j \frac{1}{V} \int_S n_i dS \equiv 0 \quad (42)$$

$$\bar{\kappa}_{ij} = \frac{1}{V} \int_S \omega_j n_i dS = \frac{1}{V} \int_S n_i (\bar{\omega}_j + \bar{\omega}_{j,i} x_j) dS \equiv \bar{\omega}_{j,i} \quad (43)$$

对比式(42)和式(43)可以看出, 已有 Hill 定理给定的转角边界条件 $\omega_i |_S = \bar{\omega}_i$ 导致曲率 $\bar{\kappa}_{ij}$ 恒等于零, 这是不符合 Cosserat 连续体平均场理论基本假定的, 因而该边界条件不可用, 从而强形式边界条件式(34)和式(37)均不能使用. 而另一方面, 通过本文 Hill 定理给定的转角边界条件 $\omega_i |_S = \bar{\omega}_i + \bar{\omega}_{i,j} x_j$ 能够得到宏观平均曲率的定义表达式, 并与平均场理论基本假定式(9)相一致, 相应的强形式边界条件式(38)和式(41)均可用.

另外, 将一致面应力-偶应力式(35)或式(39)代入 RVE 的矩平衡方程得到:

$$\begin{aligned} \int_S e_{ijk} x_j t_k dS + \int_S m_i dS &= \int_S e_{ijk} x_j n_m \bar{\sigma}_{mk} dS + \\ &\int_S n_k \bar{\mu}_{ki} dS = e_{ijk} \bar{\sigma}_{jk} \neq 0 \end{aligned} \quad (44)$$

这意味着 RVE 不能够满足自平衡条件, 违背了平均场理论的基本假定^[1-3]. 因此, 该 RVE 边界条件的两个版本均不能使用.

综上所述, 文献中已有的工作只能够在表征元边界条件上给定一种“混合平动位移-偶应力边界条件”, 即: 运动学容许的位移条件 $u_i |_S = \bar{u}_{i,j} x_j$ 和静力学容许的偶应力边界条件 $m_i |_S = (n_k \mu_{ki}) |_S = n_k \bar{\mu}_{ki}^{(1)}$. 而依据本文的研究工作则可以给出“一致平动位移-转角”、“混合一致平动位移-偶应力”和“混合一致面应力-转角”三种强形式 RVE 边界条件, 其中包括经典连续体均匀化方法中最常用“一致平动位移-转角”边界条件, 为基于经典连续体平均场理论的各种均匀化方法推广和应用到 Cosserat 连续体中提供了依据.

4 弱形式周期 RVE 边界条件

在表征元边界上除了可以给定逐点满足的强形式边界条件以外,还可以构造在积分意义上满足式(31)-(33)的弱形式边界条件,最常用的是周期边界条件,并且已有的研究工作表明 RVE 周期边界条件对材料的宏观响应能够给出更加合理的估计^[4].本节对非均质 Cosserat 连续体表征元上的周期边界条件进分析和讨论,阐述内容限于二维矩形 RVE 如图 1 所示.

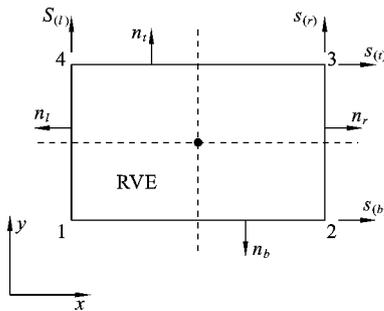


图 1 二维矩形表征元

Fig. 1 Two-dimensional rectangular-shaped RVE

4.1 平动位移和应力周期边界条件

对于平动位移和应力,可以给定如下形式的 RVE 周期边界条件:

$$u_i|_S = (\bar{u}_{i,j}x_j + u_i^*)|_S \quad (45)$$

$$t_i|_S = (n_k\sigma_{ki})|_S = t_i^*|_S = (n_k\sigma_{ki}^*)|_S \quad (46)$$

其中 $(\bar{u}_{i,j}x_j)|_S$ 表示宏观变形场产生的线性位移, $u_i^*|_S$ 表示微结构相对于该线性位移场的波动位移,对于如图 1 所示的周期边界条件而言,有:

$$u_i^*(s)|_b = u_i^*(s)|_t, \quad u_i^*(s)|_l = u_i^*(s)|_r \quad (47)$$

其中下标 b, t, l, r 分别代表矩形 RVE 的底端、顶端、左侧和右侧, s 是沿着矩形边的局部坐标. 周期边界条件要求:在矩形对应边上(底端对顶端,左侧对右侧)相同局部坐标点处,有相同的波动位移,且相应的面应力大小相等方向相反,即:

$$t_i^*(s)|_b = -t_i^*(s)|_t, \quad t_i^*(s)|_l = -t_i^*(s)|_r \quad (48)$$

根据式(46)和式(48),有:

$$\begin{cases} [n_k(s)\sigma_{ki}^*(s)]_b = -[n_k(s)\sigma_{ki}^*(s)]_t \\ [n_k(s)\sigma_{ki}^*(s)]_l = -[n_k(s)\sigma_{ki}^*(s)]_r \end{cases} \quad (49)$$

由于,

$$n_k(s)|_b = -n_k(s)|_t, \quad n_k(s)|_l = -n_k(s)|_r \quad (50)$$

式(50)代入式(49)得到:

$$\sigma_{ki}^*(s)|_b = \sigma_{ki}^*(s)|_t, \quad \sigma_{ki}^*(s)|_l = \sigma_{ki}^*(s)|_r \quad (51)$$

下面验证上述周期边界条件是否满足一阶平均场理论基本假定. 对于位移边界条件式(45),有:

$$\begin{aligned} \bar{u}_{i,j} &= \frac{1}{V} \int_V u_{i,j} dV = \frac{1}{V} \int_S u_i n_j dS = \\ &= \frac{1}{V} \int_S (\bar{u}_{i,k} x_k + u_i^*) n_j dS = \bar{u}_{i,j} + \frac{1}{V} \int_S u_i^* n_j dS \end{aligned} \quad (52)$$

式(47)和式(50)代入式(52)右端最后一项,有:

$$\frac{1}{V} \int_S u_i^* n_j dS = 0 \quad (53)$$

因此,周期边界条件满足经典连续体平均场理论基本假定. 将式(47)和式(50)代入式(31),并考虑到式(49)-(51),有:

$$\begin{aligned} \int_S (n_k\sigma_{ki} - n_k\bar{\sigma}_{ki})(u_i - \bar{u}_{i,j}x_j) dS &= \int_S (n_k\sigma_{ki}^* - \\ &= n_k\bar{\sigma}_{ki})u_i^* dS = \int_S n_k\sigma_{ki}^*u_i^* dS - \bar{\sigma}_{ki} \int_S n_k u_i^* dS = 0 \end{aligned} \quad (54)$$

周期边界条件也满足细宏观能量等价条件.

以上分析显示出:RVE 平动位移及应力周期边界条件既能够同时满足一阶平均场理论基本假定和 Hill-Mandel 细宏观能量等价条件,而且还能够对材料的宏观响应给出更加合理的估计. 因而,在基于经典连续体平均场理论的多尺度均匀化方法中得到了广泛的应用. 正因如此,对于非均质 Cosserat 连续体也需要发展相应的转角-偶应力周期边界条件.

4.2 转角与偶应力周期边界条件

借鉴上述平动位移和应力周期边界条件的构造和验证方式,可以分析和讨论转角周期边界条件. 根据式(32),矩形 RVE 上的转角周期边界条件表示为:

$$\omega_i|_S = (\bar{\omega}_i + \omega_i^*)|_S \quad (55)$$

本文作者的前期研究工作已显示:式(55)虽能够满足 Hill-Mandel 条件式(32),但是不能够满足平均场理论关于平均曲率的基本定义式(9),因此该周期边界条件不能够使用.

根据式(33),矩形 RVE 上的转角周期边界条件可以表示为:

$$\omega_i|_S = (\bar{\omega}_i + \bar{\omega}_{i,j} + \omega_i^*)|_S \quad (56)$$

周期偶应力边界条件表示为:

$$m_i|_S = (n_k\mu_{ki})|_S = m_i^*|_S = (n_k\mu_{ki}^*)|_S \quad (57)$$

相应的,转角和偶应力周期边界条件要求:

$$\omega_i^*(s)|_b = \omega_i^*(s)|_t, \quad \omega_i^*(s)|_l = \omega_i^*(s)|_r \quad (58)$$

$$m_i^*(s)|_b = m_i^*(s)|_l, \quad m_i^*(s)|_l = m_i^*(s)|_r \quad (59)$$

式(56)-(59)分别代入式(33)和式(9)可以得到:

$$\int_S (n_k \mu_{ki} - n_k \bar{\mu}_{ki}^{(2)}) [\omega_i - (\bar{\omega}_i + \bar{\omega}_{i,j} x_j)] dS = \int_S (n_k \mu_{ki}^* - n_k \bar{\mu}_{ki}^{(2)}) \omega_i^* dS = 0 \quad (60)$$

$$\bar{\kappa}_{ji} = \frac{1}{V} \int_V \omega_{i,j} dV = \frac{1}{V} \int_S \omega_i n_j dS = \frac{1}{V} \int_S (\bar{\omega}_i + \bar{\omega}_{i,j} x_j + \omega_i^*) n_j dS = \bar{\omega}_{i,j} \quad (61)$$

因此,周期边界条件式(56)-(57)既满足 Hill-Mandel 细宏观能量等价条件,也符合一阶平均场理论基本假定。

综上所述,文献中已有的工作不能够在表征元边界条件上给定恰当的转角-偶应力周期边界条件,而本文的研究工作则成功地构造了相应的转角和偶应力周期边界条件,使得基于周期边界条件的非均质 Cosserat 连续体均匀化方法的发展成为可能。

5 结论

本文针对基于平均场理论的多尺度均匀化关键问题之一:恰当的表征元边界条件地给定问题,进行了深入的研究和阐述。在推导和建立一个新的 Hill 定理版本基础上,依据 Hill-Mandel 细宏观能量等价条件和一阶平均场理论基本假定,分析和讨论了各种强形式和弱形式周期表征元边界条件。

与文献中已有的研究工作只能够给定“混合平动位移-偶应力”一种表征元边界条件相比,本文给出了三种强形式边界条件,其中包括均匀化方法中最常用的“一致平动位移-转角位移”边界条件。此外,在借鉴经典连续体表征元周期边界条件的基础上,本文还给出了一种合理的弱形式周期边界条件。

本文工作既丰富和发展了已有的非均质 Cosserat 连续体平均场理论,也为 Cosserat 连续体多尺度均匀化方法的发展与应用提供了更加广泛的理论基础。

参考文献

[1] Hill R. Elastic properties of reinforced solids: some theoretical principles [J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1963, 11: 357-372.
 [2] Qu J, Cherkaoui M. Fundamentals of Micromechanics of Solids[M]. New Jersey: John Wiley & Sons, 2006.
 [3] Hashin Z. Analysis of composite materials—a survey [J]. Journal of Applied Mechanics, 1983, 50: 481-

505.
 [4] Suquet P M. Local and Global Aspects in the Mathematical Theory of Plasticity[C]//Sawczuk A, Bianchi G. Plasticity Today: Modelling, Methods and Applications. London: Elsevier Applied Science Publishers, 1985: 279-310.
 [5] Kouznetsova V, Brekelmans W A M, Baaijens F P T. An approach to micro-macro modeling of heterogeneous materials [J]. Computational Mechanics, 2001, 27: 37-48.
 [6] 杜善义, 王彪. 复合材料细观力学基础[M]. 北京: 科学出版社, 1999. (Du S Y, Wang B. Fundamentals of Micromechanics of Composites[M]. Beijing: Science Press, 1999. (in Chinese))
 [7] 沈观林, 胡更开. 复合材料力学[M]. 北京: 清华大学出版社, 2006. (Shen G L, Hu G K. Mechanics of Composite Materials[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2006. (in Chinese))
 [8] 陈少华, 王自强. 应变梯度理论研究进展[J]. 力学进展. 2003, 33(2): 207-216. (Chen S H, Wang Z Q. Advances in strain gradient theory[J]. Advances in Mechanics, 2003, 33(2): 207-216. (in Chinese))
 [9] 李雷, 吴长春. 基于 Cosserat 理论的应变梯度非协调数值研究[J]. 工程力学, 2004, 21(5): 166-171. (Li L, Wu C C. Incompatible finite element for materials with strain gradient effects[J]. Engineering Mechanics, 2004, 21(5): 166-171. (in Chinese))
 [10] Zhang H W, Wang H, Liu Z G. Quadrilateral isoparametric finite elements for plane elastic Cosserat bodies[J]. Acta Mechanica Sinica, 2005, 21(4): 388-394.
 [11] Dai T M. Renewal of basic laws and principles for polar continuum theories(XI)—consistency problems[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2007, 28(2): 147-155.
 [12] Li X K, Tang H X. A consistent return mapping algorithm for pressure-dependent elastoplastic Cosserat continua and modeling of strain localization[J]. Computers and Structures, 2005, 83: 1-10.
 [13] Ebinger T, Steeb H, Diebels S. Modeling macroscopic extended continua with the aid of numerical homogenization schemes [J]. Computational Materials Science, 2005, 32: 337-347.
 [14] Yuan X, Tomita Y. Effective properties of Cosserat composites with periodic microstructure[J]. Mechanics Research Communications, 2001, 28(3): 265-270.
 [15] Forest S, Dendievel R, Canova G R. Estimating the o-

- verall properties of heterogeneous Cosserat materials [J]. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, 1999, 7: 829-840.
- [16] Hu G K, Liu X N, Lu T J. A variational method for non-linear micropolar composites [J]. *Mechanics of Materials*, 2005, 37: 407-425.
- [17] 胡更开, 刘晓宁, 荀飞. 非均匀微极介质的有效性质分析[J]. *力学进展*, 2004, 34(2): 195-214. (Hu G K, Liu X N, Xun F. Micromechanics of heterogeneous of micropolar mediums [J]. *Advances in Mechanics*, 2004, 34(2): 195-214. (in Chinese))
- [18] Li X K, Liu Q P. A version of Hill's lemma for Cosserat continuum [J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2009, 25: 499-506.
- [19] 李锡夔, 张俊波, 张雪. 梯度增强 Cosserat 连续体的广义 Hill 定理 [J]. *计算力学学报*, 2011, 28(6): 813-821. (Li X K, Zhang J B, Zhang X. A generalized Hill's lemma for gradient-enhanced Cosserat continuum [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2011, 28(6): 813-821. (in Chinese))
- [20] Oda M, Iwashita K. *Mechanics of Granular Materials* [M]. Rotterdam: A. A. Balkema, 1999.
- [21] Chang C S, Kuhn M R. On virtual work and stress in granular media [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2005, 42: 3773-3793.
- [22] Onck P R. Cosserat modeling of cellular solids [J]. *Comptes Rendus Mecanique*, 2002, 330: 717-722.
- [23] Fleck N A, Hutchinson J W. Strain gradient plasticity [J]. *Advances in Applied Mechanics*, 1997, 33: 295-361.
- [24] 刘其鹏. 基于平均场理论的颗粒材料离散颗粒集合-Cosserat 连续体模型多尺度模拟 [D]. 辽宁: 大连理工大学, 2010. (Liu Q P. Discrete Particle Assembly - Cosserat Continuum Multi-scale Modeling of Granular Materials Based on the Average-field Theory [D]. Liaoning: Dalian University of Technology, 2010. (in Chinese))

MICRO-MACRO HOMOGENIZATION CONDITIONS OF HETEROGENEOUS COSSERAT CONTINUUM

Qipeng Liu^{1**} Xiaoyu Liu² Yuehua Gao³

⁽¹⁾ School of Civil and Safety Engineering, Dalian Jiaotong University, Dalian, 116028)

⁽²⁾ Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing, 100190)

⁽³⁾ Traffic & Transportation School, Dalian Jiaotong University, Dalian, 116028)

Abstract One of the key problems in multi-scale homogenization modeling based on the average-field theory is how properly prescribe the boundary conditions on the representative volume element (RVE), with which the Hill-Mandel condition, i. e. the Hill's macro-homogeneity condition, can be satisfied. From the existing contribution to the heterogeneous Cosserat continuum, only mixed translational displacement-surface couple boundary condition can be prescribed, while other commonly used RVE boundary conditions, such as uniform translational and rotational displacement boundary conditions and periodic RVE boundary conditions, can not be used, which holds back the development and application of the corresponding homogenization method. On the basis of derivation of a new version of Hill's lemma, this paper gives more versatile RVE boundary conditions in the strong form. In addition, reasonable periodic boundary conditions are successfully constructed, too. The presented RVE boundary conditions satisfy the Hill-Mandel condition and basic assumptions of the average-field theory and thus can be applied in the homogenization methods for heterogeneous Cosserat continuum.

Key words the average-field theory, Cosserat continuum, micro-macro homogenization, RVE boundary conditions