水　利　学　报

2012年10月　　SHUILI　XUEBAO　　第43卷　增刊1

文章编号：0559-9350（2012）增刊1-0008-05

脆性材料损伤表述方法及基于应变强度分布破坏准则的计算单元

李世海，周　东

（中国科学院 力学研究所，北京　100190）

摘要：给出了一种表述脆性材料损伤的方法，提出了一种适用于岩石混凝土这类脆性非均匀材料的强度准则，称为应变强度分布准则。该准则以应变作为强度指标，并假设应变强度在空间中服从某种分布规律。提出了一种含裂缝的可均匀化的代表性体积单元，在代表性体积元内引入了完整度和破裂度的概念，定量的表征破坏比，在细观尺度上将未达到强度的完整材料部分用线弹性表述，将达到过应变强度的损伤部分用接触摩擦表达，建立了拉伸破坏、剪切破坏以及拉剪破坏的统一表述方式，形成了新的描述脆性材料宏观变形破裂特性的渐进损伤的破坏准则和本构模型。

关键词：脆性材料；应变强度分布；破坏准则；完整度；破裂度；代表体积元

中图分类号：TV313　　文献标识码：A

岩石材料通常含有节理或大量内部微裂纹[1]，在细观尺度上看，还有可能存在多种组分[2]，其非连续特征表现的十分明显。混凝土材料主要由水泥砂浆和骨料混合而成[3]，非均匀性表现的更为突出。岩石混凝土这类脆性材料，其损伤和破坏通常伴随着裂纹的萌生和发展[4]，这种非连续非均匀性特性给研究带来一定困难，也是吸引众多学者不断探究的原因。近年来针对岩石混凝土材料提出了不同种类的损伤破坏准则和本构模型[5]，如弹塑性损伤模型[6-7]，基于能量的损伤模型[8]，统计裂纹模型[9]等。然而，当遇到材料剪断后受到拉力或者拉断后受到剪力，材料内部裂缝闭合与张开，以及裂缝受压或者受剪而不滑等诸多情况时，采用已有的破坏准则表述困难。

本文介绍了一种基于应变强度分布的破坏准则，统一表述了拉伸破坏、剪切破坏和拉剪破坏。将应变作为度量指标，引入应变强度分布的概念，提出了一种含裂缝的可均匀化的代表性体积单元。给出了代表性体积元内材料损伤因子的解析表达式求法，包括剪切破坏损伤因子、拉伸破坏损伤因子和综合损伤因子，定量地表征代表性体积单元内部的破坏比。应变强度分布准则将破坏准则与应力应变状态、拉伸、剪切破坏准则进行了统一表述。

1　代表性体积单元的破裂度和完整度计算方法

1.1　基本假设　应变强度分布准则的描述是在代表体积元内，有如下假设：⑴代表体积元为等应变单元；⑵代表性体积元内部的拉应变和剪应变强度服从某种分布；⑶代表性体积元内任意截面，细观上只有断裂、连续两种状态；⑷连续部分保持弹性；断裂面受拉伸应力为零，受剪切服从摩擦定律。

1.2　拉伸作用下的破裂度和完整度　依据基本假设⑵，设材料在拉伸应变强度区间（$\varepsilon_{\text{linear-}L}$，$\varepsilon_{\text{break}}$）

收稿日期：2012-04-16

基金项目：国家重点基础研究发展计划（973）项目（2010CB731500）

作者简介：李世海（1958-），男，河北人，研究员，博士生导师，主要从事非连续介质力学及其应用研究。E-mail：shli@imech.ac.cn

内服从分布$f_\varepsilon(\varepsilon)$，并且可以认为$\varepsilon_{\text{linear}-L}$为线性比例极限，$\varepsilon_{\text{break}}$为材料的断裂应变；当应变值大于$\varepsilon_{\text{linear}-L}$后，凡是小于该应变值的部分就会破坏。如果材料可能破坏的总面积和破坏面积分别为S_{p}和S_{b}，则代表体积元在某一确定方向上的拉伸破裂度可以表述为：

$$\alpha_{\text{b}}=\frac{S_{\text{b}}}{S_{\text{p}}}=\frac{\int_{\varepsilon_{\text{linear}-L}}^{\bar{\varepsilon}} f_\varepsilon(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon}{\int_{\varepsilon_{\text{linear}-L}}^{\varepsilon} f_\varepsilon(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon} \tag{1}$$

而完整度可以表述为：

$$\alpha_i=1-\frac{S_{\text{b}}}{S_{\text{p}}}=\frac{\int_{\bar{\varepsilon}}^{\varepsilon_{\text{break}}} f_\varepsilon(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon}{\int_{\varepsilon_{\text{linear}-L}}^{\varepsilon_{\text{break}}} f_\varepsilon(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon} \tag{2}$$

式中：$\bar{\varepsilon}$为代表体积元某一方向的历史最大应变值；ε为正应变积分变量。

1.3　拉伸作用下的破裂度和完整度　同理也可以得到代表体积元在特定方向上剪切破坏的破裂度和完整度：

$$\beta_{\text{b}}=\frac{\int_{\gamma_{\text{linear}-L}}^{\bar{\gamma}} f_\gamma(\gamma)\mathrm{d}\gamma}{\int_{\gamma_{\text{linear}-L}}^{\gamma_{\text{break}}} f_\gamma(\gamma)\mathrm{d}\gamma} \tag{3}$$

和

$$\beta_i=\frac{\int_{\bar{\gamma}}^{\gamma_{\text{break}}} f_\gamma(\gamma)\mathrm{d}\gamma}{\int_{\gamma_{\text{linear}-L}}^{\gamma_{\text{break}}} f_\gamma(\gamma)\mathrm{d}\gamma} \tag{4}$$

式中：β_{b}为剪切作用下的破裂度；β_i为剪切作用下的完整度；$(\gamma_{\text{linear}-L},\gamma_{\text{break}})$为剪切应变强度区间；$\bar{\gamma}$为该方向上的历史最大剪切应变；$f_\gamma(\gamma)$为强度区间上的分布密度函数。

从物理含义上讲，破裂度表示当前破裂面积与可能破裂的总面积之比，完整度表示当前弹性部分面积与可能破裂的总面积之比。当应变强度分布密度函数和分布区间确定之后，代表体积元任意方向的破裂面积和可能破坏的最大破裂面积都可以表示为概率积分的形式。从而得到了代表体积元内拉伸和剪切损伤度和完整度的定量描述公式。

1.4　拉剪联合作用下的破裂度和完整度　当代表体积元某一方向同时承受拉伸和剪切应变时，拉、剪都可能造成材料的损伤。此时的损伤并非拉伸破坏和剪切破坏的简单叠加，因为拉坏的部分也有可能同时达到剪切破坏强度，剪坏部分有可能同时超过拉伸破坏强度。因此需要从概率统计上定义拉剪联合作用下的综合破裂度和综合完整度。首先定义

$$\int_{\varepsilon_{\text{linear}-L}}^{\varepsilon_{\text{break}}} f_\varepsilon(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon=1,\quad \int_{\gamma_{\text{linear}-L}}^{\gamma_{\text{break}}} f_\gamma(\gamma)\mathrm{d}\gamma=1 \tag{5}$$

表示应变强度只在弹性极限应变和最大断裂应变区间上分布。于是有

$$\alpha_{\text{b}}=\int_{\varepsilon_{\text{linear}-L}}^{\bar{\varepsilon}} f_\varepsilon(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon,\quad \alpha_i=\int_{\varepsilon}^{\varepsilon_{\text{break}}} f_\varepsilon(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon \tag{6}$$

$$\beta_{\text{b}}=\int_{\gamma_{\text{linear}-L}}^{\bar{\gamma}} f_\gamma(\gamma)\mathrm{d}\gamma,\quad \beta_i=\int_{\gamma}^{\gamma_{\text{break}}} f_\gamma(\gamma)\mathrm{d}\gamma \tag{7}$$

本文假设拉伸应变强度和剪切应变强度的分布是独立的，则拉伸应变强度和剪切应变强度的联合概率密度函数可以表示为

$$f(\varepsilon\gamma)=f_{\varepsilon}(\varepsilon)\cdot f_{\gamma}(\gamma) \tag{8}$$

于是可以计算出拉、剪同时作用下的综合完整度为：

$$F(\varepsilon\gamma)=\int_{\varepsilon}^{\varepsilon_{\text{break}}}\int_{\gamma}^{\gamma_{\text{break}}} f(\varepsilon\gamma)\mathrm{d}\varepsilon\mathrm{d}\gamma=\int_{\varepsilon}^{\varepsilon_{\text{break}}} f(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon\cdot\int_{\gamma}^{\varepsilon_{\text{break}}} f_{\gamma}(\gamma)\mathrm{d}\gamma=\alpha_i\beta_i \tag{9}$$

而综合破裂度为$1-\alpha_i\beta_i$。

综合完整度和综合破裂度是拉伸破坏和剪切破坏的统一表述，是一种更普遍的形式，可以自然退化为前面两节中的拉伸或剪切单独作用时的完整度和破裂度。

2 应变强度分布破坏准则

完整度和破裂度定量的给出了代表体积元的损伤破裂程度。将材料的完好部分描述为弹性，而破裂部用接触和摩擦表述，可定义代表体积元内应变分布强度准则的基本表述公式如下：

$$\sigma_i=\alpha\beta\left(2G\varepsilon_i+\lambda e\right)+\begin{cases}(1-\alpha\beta)(2G\varepsilon_i+\lambda e) & (\varepsilon_{\text{line}-L}\leqslant\varepsilon_i\leqslant\varepsilon_{\text{break}}，\varepsilon<0)\\ 0 & (\varepsilon_{\text{line}-L}\leqslant\varepsilon_i\leqslant\varepsilon_{\text{break}}，\varepsilon\geqslant0)\end{cases} \tag{10}$$

$$\tau_{ij}=\alpha\beta G\gamma_{ij}+\begin{cases}(1-\alpha\beta)G\gamma_{ij} & \left[\gamma_{ij}<\left(\varepsilon_i+\varepsilon_j+\dfrac{2ve}{1-2v}\right)\tan\varphi，\gamma_{\text{liner}-L}\leqslant\gamma_{ij}\leqslant\gamma_{\text{break}}，\varepsilon<0\right]\\ (1-\alpha\beta)\dfrac{\sigma_i+\sigma_j}{2}\tan\varphi & \left[\gamma_{ij}\geqslant\left(\varepsilon_i+\varepsilon_j+\dfrac{2ve}{1-2v}\right)\tan\varphi，\gamma_{\text{liner}-L}\leqslant\gamma_{ij}\leqslant\gamma_{\text{break}}，\varepsilon<0\right]\\ 0 & \left(\gamma_{\text{liner}-L}\leqslant\gamma_{ij}\leqslant\gamma_{\text{break}}，\varepsilon\geqslant0\right)\end{cases} \tag{11}$$

式中：$\sigma_{i=1，3}$、$\varepsilon_{i=1，3}$分别为主应力、主应变的3个分量；τ_{ij}、γ_{ij}分别为3个最大剪应力和3个最大剪应变；λ、G为拉密常数，v为泊松比；$e=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$为体应变；$\varepsilon_{\text{linear-}L}$、$\varepsilon_{\text{break}}$和$\gamma_{\text{linear-}L}$、$\gamma_{\text{break}}$分别为材料正应变和剪应变的线性比例极限、断裂极限；ε为名义正应变，表示受拉还是受压，$\varepsilon=\varepsilon_i+\varepsilon_j$；$\alpha$、$\beta$和$1-\alpha$、$1-\beta$分别为材料的拉伸、剪切的完整度和破裂度；$\varphi$为材料的摩擦角；$\alpha\beta$为对应方向上的完整度，$1-\alpha\beta$为对应方向的破裂度。

代表体积元的损伤主应力和损伤最大剪应力表达式都由两部分构成：第一项为弹性部分，对应完整度$\alpha\beta$；第二项是分段函数，为破裂部分，对应破裂度$1-\alpha\beta$。破裂部分如果受拉，应力为零；破裂部分受压时，正应力保持连续，剪应力变为摩擦。求出的损伤应力是连续面应力和破裂面接触应力的统计平均。

3 材料损伤破裂后等效应力张量的计算方法

为使由式(9)和式(10)计算得到的损伤主应力和损伤最大剪应力满足张量规则，需要建立一套等效应力张量计算框架。

3.1 基本假设 (1)材料破裂损伤是均匀的；(2)损伤后的应力主轴和应变主轴不变；(3)破损前后应力平均应力即净水压力不变。

3.2 计算方法 已知代表体积元的主应变和对应的最大剪切应变为ε_i、γ_{ij}($i=1，2，3$；$j=1，2，3$；$i<j$)，由式(9)和式(10)可获得应变对应方向上的主应力及最大剪应力σ_i、τ_{ij}($i=1，2，3$；$j=1，2，3$；$i<j$)。

记破裂后的等效主应力和最大剪应力为σ_i'、τ_{ij}'($i=1，2，3$；$j=1，2，3$；$i<j$)，取

$$\sigma_i'-\sigma_j'=\min\left(\sigma_i-\sigma_j，2\tau_{ij}\right)\qquad i=1，2，3；j=1，2，3；i<j \tag{12}$$

可以获得3个方程：

$$\sigma_1' - \sigma_2' = \min(\sigma_1 - \sigma_2 , 2\tau_{12}) \tag{13}$$

$$\sigma_2' - \sigma_3' = \min(\sigma_2 - \sigma_3 , 2\tau_{23}) \tag{14}$$

$$\sigma_1' - \sigma_3' = \min(\sigma_1 - \sigma_3 , 2\tau_{13}) \tag{15}$$

将上述第式（12）与式（13）相加，得到

$$\sigma_1' - \sigma_3' = \min(\sigma_1 - \sigma_2 , 2\tau_{12}) + \min(\sigma_2 - \sigma_3 , 2\tau_{23}) \tag{16}$$

并与式（14）比较，取其最小值，得到

$$\sigma_1' - \sigma_3' = \min\left[\min(\sigma_1 - \sigma_3 , 2\tau_{13}), \min(\sigma_1 - \sigma_2 , 2\tau_{12}) + \min(\sigma_2 - \sigma_3 , 2\tau_{23})\right] \tag{17}$$

根据正应力、剪应力协调前后的静水压力相等的假设，有

$$\sigma_1' + \sigma_2' + \sigma_3' = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \tag{18}$$

联立式（14）、式（16）和式（18），求解得到损伤后的主应力张量为：

$$\sigma_1' = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + \frac{2}{3}\min\left[\min(\sigma_1 - \sigma_3 , 2\tau_{13}), \min(\sigma_1 - \sigma_2 , 2\tau_{12}) + \min(\sigma_2 - \sigma_3 , 2\tau_{23})\right] - \frac{1}{3}\min(\sigma_2 - \sigma_3 , 2\tau_{23}) \tag{19}$$

$$\sigma_2' = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) - \frac{1}{3}\min\left[\min(\sigma_1 - \sigma_3 , 2\tau_{13}), \min(\sigma_1 - \sigma_2 , 2\tau_{12}) + \min(\sigma_2 - \sigma_3 , 2\tau_{23})\right] + \frac{2}{3}\min(\sigma_2 - \sigma_3 , 2\tau_{23}) \tag{20}$$

$$\sigma_3' = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) - \frac{1}{3}\min\left[\min(\sigma_1 - \sigma_3 , 2\tau_{13}), \min(\sigma_1 - \sigma_2 , 2\tau_{12}) + \min(\sigma_2 - \sigma_3 , 2\tau_{23})\right] - \frac{1}{3}\min(\sigma_2 - \sigma_3 , 2\tau_{23}) \tag{21}$$

进而得到损伤后的最大剪应力值为：

$$\tau_{12}' = \frac{|\sigma_1' - \sigma_2'|}{2}, \tau_{23}' = \frac{|\sigma_2' - \sigma_3'|}{2}, \tau_{13}' = \frac{|\sigma_3' - \sigma_1'|}{2} \tag{22}$$

这样体积元损伤后的应力张量已经求得，应力主轴不变，但主应力的大小次序可能因为损伤程度的不同而发生变化。通过这样一套计算框架，材料的损伤可以自然的在应力应变关系中得以体现，而损伤后应力仍满足张量规律。

4 结论

本文介绍了一种脆性材料损伤表述方法，并提出了一种新的强度准则——应变分布强度准则。该准则有如下特点：⑴ 将应变作为强度指标，材料的损伤破裂取决于应变是否达到应变强度；⑵ 提出了一种含裂缝的可均匀化的代表性体积单元。代表体积元为等应变单元，而应变强度在单元内服从某种分布规律。代表性体积元内任意截面，细观上只有连续、断裂两种状态；连续面即材料在统计意义上未达到应变强度的部分，保持弹性；断裂面为统计意义上曾超过应变强度的部分，这部分在细观上用接触力学理论来描述，受拉伸应力为零，受剪切服从摩擦定律。代表体积元任意截面的等效应力为连续面应力和断裂面应力的统计平均值；⑶ 提出了代表性体积单元的破裂度和完整度概念及计算方法。破裂度定义为材料已破坏的面积与可能破裂的面积之比，而完整度表示材料未破裂的部分所占的比重。它们可以定量用统计积分的形式来描述。对于给定的代表体积元，任何时刻破裂度和完整度之和为 1；⑷ 将拉伸破坏、剪切破坏及拉剪破坏进行了统一表述，给出了均匀化条件下，服从张量关系的新的损伤应力。应变强度分布准则引入应变强度分布的概念，去掉了黏聚力的概念，直接从细观弹性和细观损伤破裂的角度描述脆性材料的损伤并得到代表体积元宏观损伤应力张量，有可能成为一种新的材料特性表述方法。

参 考 文 献：

[1] Jing L. A review of techniques, advances and outstanding issues in numerical modelling for rock mechanics and rock engineering [J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 2003, 40: 283-353.

[2] Yue Z Q, Chen S, Tham L G. Finite element modeling of geomaterials using digital image processing [J]. Computers and Geotechnics, 2003, 30: 375-397.

[3] Mattei Norma J, Mehrabadi Morteza M, Zhu Huaning. A micromechanical constitutive model for the behavior of concrete [J]. Mechanics of Materials, 2007, 39(4): 357-379.

[4] Tanga C A, Kou S Q. Crack propagation and coalescence in brittle materials under compression [J]. Engineering Fracture Mechanics, 1998, 61: 311-324.

[5] 林皋，刘军，胡志强．混凝土损伤类本构关系研究现状与进展[J]．大连理工大学学报，2010，50(6)：1055-1064.

[6] Liu Fang, Fu Qiang, Chen Cen, et al. An elasto-plastic damage constitutive theory and its prediction of evolution of subsequent yield surfaces and elastic constants [J]. International Journal of Plasticity, 2011, 27: 1355-1383.

[7] Salari M R, Saeb S, Willam K J, et al. A coupled elastoplastic damage model for geomaterials [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2004, 193: 2625-2643.

[8] Swoboda1G, Yang Q. An energy-based damage model of geomaterials—Ⅰ. Formulation and numerical results [J]. International Journal of Solids and Structures, 1999, 36: 1719-1734.

[9] Suvorov A P, Selvadurai A P S. Effective medium methods and a computational approach for estimating geomaterial properties of porous materials with randomly oriented ellipsoidal pores [J]. Computers and Geotechnics, 2011, 38: 721-730.

Formulation for damage of brittle materials and computational element based on criterion of strain strength distribution

LI Shi-hai, ZHOU Dong

(*Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100190, *China*)

Abstract: A new method for describing damage of brittle material and a new strength criterion applicable to heterogeneous material such as rock and concrete are proposed. This criterion is called criterion of strain strength distribution in which strain is used as the measurement of strength. A homogenized representative volume element (RVE) containing cracks is introduced with the basic assumption that strain strength complies with a certain distribution law. The concepts of intact degree and fractured degree are proposed to representing the damage ratio of material quantitatively. Intact part of RVE maintains elasticity, while fractured part is described with contact theory in mesolevel. Based on the ideas above, a generalized formulation to tensile failure, shear failure and failure under joint effect of tension and shear is established and a new progressive failure criterion to describe macro deformation and fracture of brittle material is formed.

Key words: brittle material; strain strength distribution; intact degree; fractured degree; RVE

（责任编辑：韩　昆）