

稀薄气体动力学的发展

沈青 樊 著

(中国科学院力学研究所高温气体动力学开放实验室, 北京 100080)

摘要 回顾了钱学森在稀薄气体动力学方面的贡献, 综述了过渡领域求解方法, 介绍了稀薄气流领域一些前沿问题以及我们这方面的工作。

关键词 稀薄气流, DSMC 方法, 信息保存法

1 钱学森为稀薄气体动力学作的开创性工作

稀薄气体动力学研究的是分子平均自由程与流动中典型尺度相比为不可忽略时的气体流动行为, 气体动理论(分子运动论)是其研究的主要工具。对于稀薄气体动力学的研究是从 19 世纪 Maxwell 等人的工作开始的, 但当时研究局限于速度很慢的情况。第二次世界大战后, 与空间探索引起的高空高速飞行的蓬勃发展相适应, 稀薄气体动力学走上了前台, 取得了显著的进展。有的学者认为第一届国际稀薄气体动力学会议在法国尼斯召开的 1958 年 7 月(以后每两年召开一次)是现代稀薄气体动力学的生日。其实, 在这以前约十年间已有很多学者进行了重要的研究。钱学森于 1946 年发表的开创性文章^[1]对这种进展起了推动作用。

钱学森在 Journal of Aeronautical Sciences 上发表了题目为“Superaerodynamics, Mechanics of Rarefied Gases”的文章, 他从空气动力学观点, 总结了以前有关稀薄气体的研究成果, 预见到空间时代的到来, 稀薄气体动力学将得到蓬勃的发展, 提出了稀薄气体动力学流动领域的划分, 为现代稀薄气体动力学的研究作了开创性的工作。

钱学森依据 Knudsen 数(平均自由程 λ 与流场特征长度 L 的比值)将稀薄气体流动划分为三大领域, 即滑流领域、过渡领域和自由分子流领域。他用粘性系数的表达式 $\mu = 0.499 \bar{v} \lambda$, 把 λ 与 $v = \mu/\rho$ 和声速 a 联系起来: $\lambda = 1.255 \sqrt{\gamma} (v/a)$, \bar{v} 是平均热运动速度, γ 是比热比。这样 Knudsen 数(Kn)就与 Mach 数(Ma)和 Reynolds 数(Re)联系起来

$$Kn = \lambda/L = 1.255 \sqrt{\gamma} Ma/Re \quad (1)$$

按照 Kn 数的大小, 稀薄气体动力学划分为三大领域, 即滑流领域($0.01 < Kn < 0.1$), 过渡领域($0.1 < Kn < 10$)和自由分子流领域($Kn > 10$)。钱学森强调了划分领域时在不同场合下要考虑不同的特征长度, 如在大 Re 数下, 他选取了边界层厚度 $\delta \sim \sqrt{Re}L$ 而不是 L 作为特征长度。这种思想被后人加以发展, 如连续模型的破坏发生在 N-S 方程中输运系数表达式不再正确, 即宏观量梯度的标尺长度 $L = \rho/(|\mathrm{d}\rho/\mathrm{d}x|)$ 变得可比的时候, 即 $Kn = \lambda/(\rho/(|\mathrm{d}\rho/\mathrm{d}x|)) > 0.1$ 当时, 间断效应出现, 连续模型不复正确。这样, 稀薄气体动力学领域划分的界限在不同的场合下不断精确化, 但三大领域划分及有关其划分的依据仍然是钱学森提出的, 没有原则性的改变。

关于滑流领域中的控制方程和边界条件, 钱学森进行了深入讨论。他指出在常压下, N-S

方程为非均匀气体动理论中 Chapman-Enskog 展开的一阶近似所证实,而二阶近似给出应力和热流的附加项,它们在稀薄气体情况下是重要的和不可忽略的。这就是 Burnett 应力项和热流项^[2,3]。钱学森分析了附加热流与应力项为普通热流和应力项的比值,指出其为 Ma (λ/L) 的量级,对于高 Ma 数下的滑流,普通 N-S 方程不是真实物理关系的正确描述,而应采用 Burnett 热流和应力项。同时需要有比通常气体动力学为多的边界条件。虽然有一段时间将 Burnett 方程应用于高超声速流动遇到困难,但从 20 世纪 80 年代后期起,对一维激波结构和高超声速绕流的研究均表明, Burnett 方程给出比 N-S 方程更好的与直接模拟 Monte Carlo (DSMC) 方法更好的相符。可以说,钱学森关于在高 Ma 数滑流区要利用 Burnett 应力与热流作为气体动力学本构关系的设想得到了完全的证实。

钱学森指出过渡领域分子间的碰撞为分子与壁面的碰撞同样重要,问题极为复杂。求解过渡领域的流动问题,是稀薄气体动力学的核心内容。

2 过渡领域求解的进展

在 Kn 数约介于 0.1 和 10 之间的过渡领域,比较简单的自由分子流理论和业已成熟的连续介质方法均不适用,而不得不求解完全的 Boltzmann 方程,或作为其等价的物理数学处理。

单组分气体的 Boltzmann 方程

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \cdot \frac{\partial f}{\partial \bar{v}} + F \cdot \frac{\partial f}{\partial c} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_c \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{4\pi} (f^* f_1^* - f f_1) c_1 \sigma d\Omega dc_1 \quad (2)$$

其仅有未知函数为有相空间密度意义的分子速度分布函数 $f(c, r, t)$, F 为外力场。一般情况下(三维非定常) f 是 7 个自变量的函数。如果每一维布置 100 个网格,就要求布置 10^{14} 个网格。而且要合理地选择有限的速度上界,使问题能够处理且不影响解的精度。Boltzmann 方程求解的难度,还在于右端碰撞项的计算。式(2)的右端第二项 ($-ff_1$) 代表碰撞引起的 c 类分子数目的减少,对于每一个 c 的相空间点要求出对另一个相空间 c_1 的所有点的求和。式(2)的右端第一项代表逆碰撞引起的 c 类分子的增加,即要对 c, c_1 的所有逆碰撞求和。而且每一项要对碰撞的所有命中参数求和。所以 Boltzmann 方程的求解在方法上主要在于对碰撞积分计算的处理。

Nordsiek 和 Hicks^[4] 以及 Yen 等人建议了一种计算 Boltzmann 碰撞积分的 Monte Carlo 求积方法。对于方程左端的流体力学项采用的就是通常的有限差分法。用之求解了正激波构造等问题^[6], 得到了令人满意的结果。Tcheremissine^[7] 对于这种方法引入了两点改进,即利用双体碰撞的对称性减少计算量,并利用随机化均匀分布结点代替随机布置的结点进行 Monte Carlo 求积,使得可以利用 Boltzmann 方程求解一些二维和三维问题。

Broadwell 首先引入有限个数的间断的速度,代替整个无限的连续的速度空间,使 Boltzmann 方程退化为对于与有限速度对应的有限个密度值的方程,这种方法称为间断纵坐标或间断速度方法。Gatignol^[9] 和 Cabannes^[10] 以一般的形式引入间断速度模型,用 c_1, c_2, \dots, c_p 集合代替整个速度空间, n_i 代表时刻 t , 位置 r 上具有 c_i 的分子的数密度,将间断的 Boltzmann 方程写为

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + c_i \cdot \frac{\partial n_i}{\partial r} = \sum_{k=1}^p \sum_{(k,l)} A_{ij}^{kl} (n_k n_l - n_i n_j) \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (3)$$

其中 A_{ij}^{kl} 为转换几率

$$A_{ij}^{kl} = \sigma_T c_{rij} p_{ij}^{kl}, \sum_{k,l} p_{ij}^{kl} = 1 \quad (4)$$

p_{ij}^{kl} 是 c_i, c_j 碰撞后转换为 c_k, c_l 的几率。最近, Bodylev 等人证明了均匀网格间断速度模型收敛于 Boltzmann 方程, 并给出了用间断速度模型求积的误差的估值。这是间断速度方法的一个重要的发展。迄今, 利用间断速度方法求解的问题很多为简单的几何和分子模型。

Boltzmann 方程在平衡态下的解 Maxwell 分布的存在, 使得可以寻求这个解附近的线化 Boltzmann 方程的解, 这当然就使问题限于低速的流动。对于低速流动的稍稍偏离于静止的气体, 其速度分布函数 $f(c, r, t)$ 与 Maxwell 分布 f_0 的差别为小量

$$f(c, r, t) = f_0[1 + \varphi(c, r, t)] \quad (5)$$

将式(5)代入 Boltzmann 方程(2)(无外力场时), 并保留 φ 的一阶量, 得到

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + c_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \int f_{01}(\rho^* + \rho_1^* - \varphi - \varphi_1) c_r \sigma_T d\Omega dc_1 \quad (6)$$

Grad^[12] 和 Cercignani 研究了右端项进一步化简的问题。Sone, Ohwada 等人发展了有效的数值方法求解这简化的线化 Boltzmann 方程, 得到了一些低速(剪切和热蠕动问题, Poiseuille 流和 Couette 流等)问题的准确的数值解。

Vallander 从分子动理论出发导出了积分形式的基本方程(这一方程也可以从 Boltzmann 方程出发推导出来)。他倡导了从积分方程出发求解稀薄气体动力学的方法, 即积分方法。寻求积分方程的解的最方便的方法当属迭代法, 它还被用来证明 Boltzmann 方程解的存在性定理。

还有一种不解 Boltzmann 方程, 而是求解其矩方程的作法。后者是将 Boltzmann 方程乘以某个分子的量 Q , 再将其对整个速度空间求积分(求矩)而得到的

$$\frac{\partial}{\partial t}(n\bar{Q}) + \bar{V} \cdot (n c \bar{Q}) - n \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \bar{Q}}{\partial c} = \Delta[Q] \quad (7)$$

式中 \bar{Q} 表示 Q 的平均值

$$\bar{Q} = \frac{1}{n} \int Q f dc \quad (8)$$

$\Delta[Q]$ 为碰撞积分, 代表量 Q 在碰撞前后发生的变化。

Euler 方程、N-S 方程和 Burnett 方程就是 Chapman-Enskog 展开求解 Boltzmann 方程时的零阶、一阶和二阶矩方程。Grad 把 ρ, p, u_i, τ_{ij} 和 q_i (密度、压力、速度、应力张量和热流向量) 看作 13 个平等的未知函数得到 13 个矩方程, 即 Grad 方程。Burnett 方程和 Grad 方程初期是同样引起重视, 但后者一直未给出受到实验和直接统计模拟支持的结果。Burnett 方程则在 20 世纪 80 年代末再度引起重视。矩方法多应用于定常一维问题, 如激波结构平板间的热传导问题, Couette 流和 Rayleigh 问题等。对于二维或轴对称流动和三维流动则很难构造出与流场适应的分布函数。

Boltzmann 方程右端碰撞项的复杂性还使有的研究者建议用简化的碰撞项来代替它, 最著名的模型方程是由 Bhatnagar, Gross 和 Krook^[19] 提出来的

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{c} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{c}} = \nu(f_e - f) \quad (9)$$

式中 f_e 是局部平衡分布, ν 是碰撞频率, 并称为 BGK 方程。BGK 方程因其简单在过渡领域

被广泛应用。有一类有实际意义的小扰动问题,是用 BGK 模型而不是用 Boltzmann 方程求解的。但 BGK 方程终究是用一个近似项代替了有坚定物理基础的准确项。最近,对壁温突升引起的流动和 Rayleigh 问题用直接模拟 Monte Carlo 方法进行了模拟^[20,21],并与用 BGK 方程进行的准确数值解比较,表明在远离平衡时,BGK 方程是不准确的。

随着电子计算机的出现,诞生了从模拟流动的物理出发的直接模拟方法,并随计算机的速度和内存能力的提高而得到充分发展。直接模拟方法是在计算机中追踪大量分子的运动与壁面的碰撞,分子间的碰撞以及碰撞中内能的变化以至化学反应等。直接模拟方法再分为确定论模拟方法和几率模拟方法。

Alder 和 Wainwright 提出的分子动力学方法^[22]属确定论的模拟方法。这种模拟方法要达到物理过程的完全再视,就要保证模拟分子尺寸,分子数密度,流动几何,从而在模拟中模拟分子数要与流动中的完全一致。这一要求对于稠密气体比对于稀薄气体更容易实现。这样分子动力学方法就弥补了稠密气体中 Boltzmann 方程不适用的空缺。

Bird 提出的直接模拟 Monte Carlo (DSMC)方法,最早模拟均匀气体中的松弛问题和激波结构^[24],后来发展到模拟二维、三维几何复杂问题,并包含了流动中的复杂的物理化学过程^[25,26]。在分子初始位形布置、碰撞和碰撞后果(包括分子速度的改变)都靠随机数的产生和变换决定。同时 DSMC 方法以少量的模拟分子代表大量的真实分子。方法的关键之点是在一个时间步长 Δt 内将分子的运动和碰撞解耦,而依据分子动理论的分析来选择有代表性的碰撞以保证模拟中的运动和碰撞与真空流动中一致。Boltzmann 方程为 DSMC 方法遵循相同的物理推理,均要求分子混沌和稀疏气体的假设。DSMC 方法不依赖逆碰撞的存在,可以应用于三体碰撞的化学复合反应的情况。在 DSMC 方法中,引入真实的分子表面相互作用模型以及处理伴随有化学反应和辐射的气体流动是容易的,同时 DSMC 方法可以较容易地模拟直到三维的复杂流场。尤其是 DSMC 方法在模拟流动宏观总体效应^[27]和流场的分布函数一级的精细结构方面,都经受了严格的实验检验,使其地位和作用得到了流体力学界的确认。

3 稀薄气体动力学的前沿课题

稀薄气体动力学的应用领域除航天外,还有真空系统等离子体材料加工,微电子刻蚀,微机电系统,化工等在处于 21 世纪技术发展前沿的领域。这里介绍我们做了一些工作的某些前沿课题。

3.1 微尺度气流

现有微机电系统(MEMS),如微型电机、传感器、泵、阀门等,特征长度已达到微米量阶。由于纳米技术的发展,更微小的器械也在积极研制中。实验发现稀薄气体效应对 MEMS 的气动力、热有显著影响。因此,关于普通尺寸装置的设计经验不能直接推广应用于 MEMS,需要利用稀薄气体动力学的理论和方法做新的研究。

在高超声速稀薄气体流动中获得广泛成功的直接模拟蒙特卡罗(DSMC)方法,在处理微尺度气流时,遇到很大困难。由于统计涨落,DSMC 方法存在着不可避免的背景噪声。背景噪声所引起速度涨落的量阶为 $v_m/\sqrt{N_s}$ (v_m :热运动速度, N_s :统计样本个数)。MEMS 实验中气流速度,量阶为 1m/s 或更小^[29],远低于室温下的热运动速度(10^3 m/s)。用 DSMC 方法模拟 MEMS 流动,面临着宏观流动现象完全被背景噪声淹没的问题。国际上对这个问题十分重

视,认为是对统计模拟的挑战^[30]。

为解决这个困难,我们提出了信息保存法(Information Preservation, IP)。IP方法建议每一个模拟分子,除了通常的分子速度外,还携带所谓的信息速度,用来记录每个模拟分子所代表的许多真实分子的集团速度。IP方法采取与DSMC相同的分子运动和碰撞规则,但为了避免热运动引起的统计涨落,宏观速度通过分子信息速度统计平均获得。

IP方法已成功地应用于一维定常 Couette 流动、Poiseuille 流动、非定常 Rayleigh 流动^[31,32],二维外流(NACA 0012 绕流、平板绕流)和内流(微槽道流动)^[33~36],三维微型过滤器流动^[37]。图1比较了IP方法、线性 Boltzmann 方程、滑移 Navier-Stokes 方程和实验给出的 Poiseuille 流动质量流量与 Kn 数(分子自由程与槽道宽度之比)的关系^[32]。质量流量在 $Kn = 1$ 附近取最小值。这个现象是 M. Knudsen 首先在实验中观测到的,称为 Knudsen 佯谬。IP 结果,在过渡领域与实验和 Boltzmann 解符合得很好;在 $Kn < 0.1$ 的区域,与滑移 Navier-Stokes 解符合得很好。图2比较了IP方法、DSMC方法、矩方法、滑移 Navier-Stokes 方程和自由分子流理论给出的非定常 Rayleigh 流动中表面剪应力时间变化。IP 结果,在 $t \ll \tau_c$ (分子平均碰撞时间)和 $t > 5\tau_c$ 时,分别得到自由分子流和滑移 Navier-Stokes 解支持;在过渡领域,与 DSMC 结果符合得很好。但是 DSMC 结果所需时间,在一个 DEC Alpha 1000A 服务器上,约为 180 CPU 小时,IP 计算仅需 23 s。从这里可以看到 IP 方法的价值。

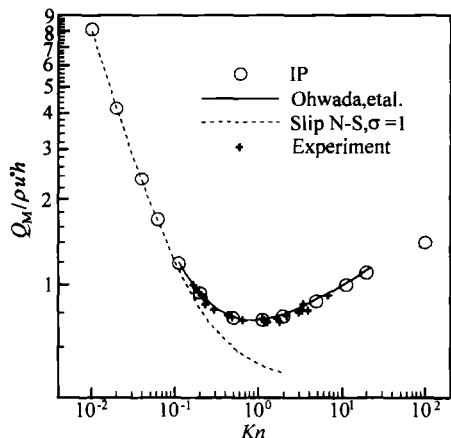


图1 Poiseuille 流动质量流量与 Kn 数关系

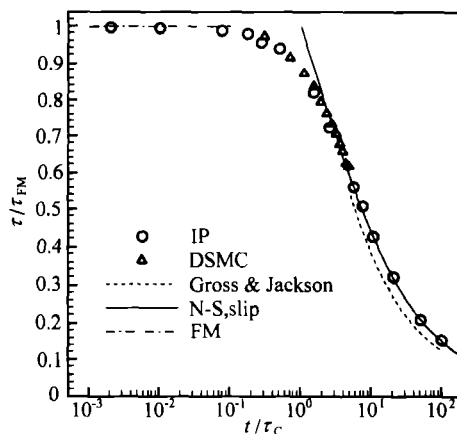


图2 Rayleigh 流动中表面剪应力随时间的变化

3.2 真空非平衡气流

先进薄膜沉积与刻蚀是当前十分活跃的研究领域。以高温超导 YBCO 薄膜的电子束物理气相沉积为例^[38,39]。利用真空泵,沉积腔的背压保持在 10^{-5} Torr^①。通过电子束加热,使钇、钡、铜铸锭表面熔融、蒸发。所形成的金属蒸气射流,经过真空腔的快速膨胀,冲向基底材料表面并沉积形成薄膜。技术关键是将金属原子,按要求的速度和摩尔组分子比,从铸锭表面运输到基底材料表面。

对这类流动,以自由分子流理论为基础的传统分析方法,忽略原子碰撞,假设射流场符合余弦分布。然而,实际工艺为提高薄膜沉积速率,所采取的电子束功率能够在铸锭表面产生很高蒸发率。这使得铸锭表面附近流场数密度较高,原子碰撞效应显著。

① 1Torr = 133.322Pa。

图 3 比较了钇单独蒸发时,DSMC、自由分子流和实验给出的薄膜沉积厚度分布。钇铸锭表面蒸发率和温度分别为 $1.129 \times 10^{-5} \text{ mol/cm}^2 \cdot \text{s}$ 和 2091K。沉积时间为 12min。自由分子流解明显低于 DSMC 和测量数据。这是因为原子碰撞在一定程度上阻止了原子自由扩散并沉积到真空腔和挡板表面,使它们有更多机会到达基底表面。

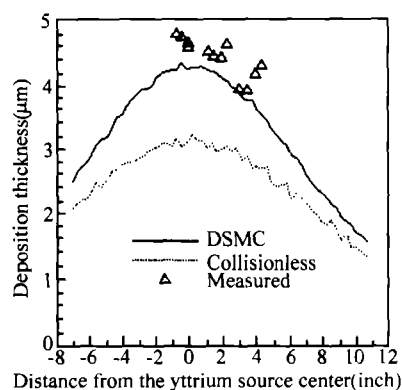


图 3 钇薄膜沉积厚度分布的比较

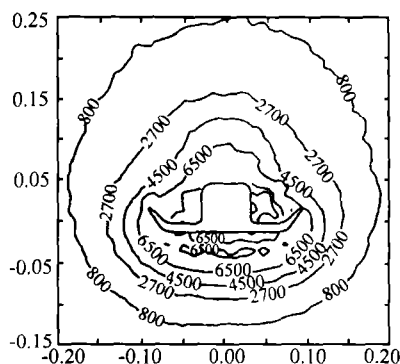


图 4 Hermes 航天飞机模型在 $x=0.285\text{m}$ 截面的平均温度等值线

3.3 高空高速气流

这方面研究背景是再入过程、用于在轨卫星、飞船、航天飞机姿态和高度控制的化学或电推进系统效率、推进系统羽流场对本体的污染、太阳帆、轨道转换器(AOTV)、深空探测,以及目前引起关注的美国国家导弹防御系统(NMD)。以 NMD 为例,为有时间完成预警、目标识别、跟踪、防御系统启动并进行多次拦截,拦截重点放在飞行段(例如,2001 年 7 月 14 日,美国新一次导弹拦截试验的截击高度为 226 km)。目标识别和跟踪需要精确了解发动机羽流形成的稀薄非平衡流场及其不同频段的光学特征^[40]。

DSMC 方法是分析高速稀薄非平衡气流的主要工具。为了事半功倍地分析上述各种稀薄气流场,人们一直努力发展高效的 DSMC 通用算法^[27,41~44]。我们提出的位置元新方案^[42~44],兼具 Bird 位置元方案的效率^[27]和无结构网格方案^[41]准确描述物形的优点。该方案给出的圆球自由分子流表面热流和压力分布与准确解符合得很好^[42];图 4 是有关 Hermes 航天飞机模拟结果^[43](机身长 0.29m, $T_\infty = 181\text{K}$, $\rho_\infty = 7.96 \times 10^{-6} \text{ kg/m}^3$, $v_\infty = 7500\text{m/s}$, $T_w = 350\text{K}$,迎角 20°)。

为了准确模拟稀薄非平衡流场,还必须发展描述不同物理和化学过程的微观模型。在处理内能松弛方面,我们提出了振动能交换几率依赖总碰撞能的模型,并克服了碰撞后振动能取样时遇到的奇异性问题^[45,46]。在化学反应模拟方面,提出了依赖空间取向的微观化学反应判据^[47]。由此获得的反应速率常数与实验数据符合,并初次解释了实验数据拟合公式中,置换反应温度远低于离解温度的现象。

参 考 文 献

- 1 Tsien HS. Super aerodynamics-mechanics of rarefied gases. J Aero Sciences, 1946, 13: 653~664
- 2 Burnett D. The distribution of molecular velocities and the mean motion in a non-uniform gas. Proc London Math Soc. 1935, 308

- 3 Chapman S, Cowing TG. *The Mathematic Theory of Non-uniform Gases*. Oxford: Cambridge Univ. Press, 1960
- 4 Nordsiek A, Hicks BL. Monte Carlo evaluation of the Boltzmann collision integral. In *Rarefied Gas Dynamics*, ed. by CL Brundin. Academic Press, 1967, 675~710
- 5 Yen SM. Monte Carlo solution of nonlinear Boltzmann equations for problems of heat transfer in rarefied gases. *J of Heat Mass Transfer*, 1970, 14: 1865~69
- 6 Hick BL, Yen SM, Reiley BJ. The internal structure of shock waves. *J Fluid Mech*, 1972, 53: 85~112
- 7 Tcheremissine FG. Fast solutions of the Boltzmann equation. in *Rarefied Gas Dynamics*, ed by AE Beylich, VCH, 1991, 273~284
- 8 Broadwell JE. Study of rarefied flow by the discrete velocity method. *J Fluid Mech*, 1964, 19: 401~414
- 9 Gatigrol R. *Theorie Cinétique des Gas a Repartition Discrete de Vitesses*. Lecture Notes in Physics, Springer, 1975
- 10 Cabannes H. *The Discrete Boltzmann Equation*, Lecture Notes. Univ. of California, Berkeley, 1980
- 11 Bobylev AV, Palczewsky A, Schneider J. Discretization of the Boltzmann equation and discrete velocity models. in *Rarefied Gas Dynamics*, ed. by J Harvey and G Lord, 1995, Vol.2, 857
- 12 Grad H. Asymptotic theory of the Boltzmann equation. in *Rarefied Gas Dynamics*, ed. by JA Laurmann, Academic, 1963, Vol.1, 26~59
- 13 Cercignani C. *Theory and Application of the Boltzmann Equation*. Scottish Academic, 1975
- 14 Sone Y, Ohwada T, Aoki K. Temperature jump and Knudsen layer in a rarefied gas over a plane wall. *Phys Fluids A*, 1989, 1: 363~370
- 15 Ohwada T, Sone Y, Aoki K. Numerical analysis of the shear and thermal creep flow. *Phys Fluids A*, 1989, 1: 1588~1599
- 16 Ohwada T., Sone Y, Aoki K. Numerical analysis of the Poiseuille and thermal transpiration flows. *Phys Fluids A*, 1989, 1: 2042~2049
- 17 Vallander SV. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, 1960, Vol.131, No.1
- 18 Grad H. On the kinetic theory of rarefied gases. *Commun On Pure and Applied Math*, 1949, 2: 331~407
- 19 Bhatnagar PL, Grass EP, Krook M. A model for collision processes in gases. *Phys Rev*, 1954, 94: 511~525
- 20 Shen C, Xu X, Hu Z, Wu W. Transient motion of rarefied gas caused by heat addition. *Progress in Astro Aeronautics*, 1994, 159: 234
- 21 Shen C, Yi ZQ. Direct numerical test of the BGK model by the DSMC method. *Acta Mechanica Sinica*, 2000, 16: 133
- 22 Alder BJ, Wainwright TE. Studies in molecular dynamics. *J Chem Physics*, 1957, 27: 1208~1209
- 23 Bird GA. Approach to translational equilibrium in a rigid sphere gas. *Phys Fluids*, 1963, 6: 1518~1519
- 24 Bird GA. Shock wave structure in a rigid sphere gas. In *rarefied Gas Dynamics*, ed. by JH de Leauw, 1965, Vol.1, 216~222
- 25 Bird GA. *Molecular Gas Dynamics*. Oxford: Clarendon Press, 1976
- 26 Bird GA. *Molecular Gas Dynamics and the Direct Simulation of Gas Flows*. Oxford: Clarendon Press, 1994
- 27 Bird GA. Application of the DSMC method to the full shuttle geometry. AIAA paper 90-1692
- 28 Pham-Van-Diep GC, Erwin EA, Muntz EP. Nonequilibrium molecular motion in a hypersonic shock wave. *Science*, 1989, 245: 624
- 29 Ho CM, Tai YC. Micro-electro-mechanical systems (MEMS) and fluid flows. *Ann Rev Fluid Mech*, 1998, 30: 579~612
- 30 Oran ES, Oh CK, Cybyk BZ. Direct simulation Monte Carlo: recent advances and application. *Ann Rev Fluid Mech*, 1998, 30:403~441
- 31 Fan J, Shen C. Statistical simulation of low-speed unidirectional flows in transition regime. in *Rarefied Gas Dynamics*, edited by R. Brun, 1999, Vol. 2: 245~252
- 32 Fan J, Shen C. Statistical simulation of low-speed rarefied gas flows. *J Comput Phys*, 2001, 167: 393~412
- 33 Fan J, Boyd ID, Cai CP, Hennighausen K, Candler GV. Computation of rarefied gas flows around a NACA 0012 airfoil. *AIAA J*, 2001, 39(6)
- 34 Cai CP, Boyd ID, Fan J, Candler GV. Direct simulation methods for low-speed micro-channel flows. *J Thermophys & Heat Trans*, 2000, 14: 368~378

- 35 Sun QH, Boyd ID, Fan J. Development of an information preservation method for subsonic, micro-scale gas flows. 22nd Symposium on Rarefied Gas Dynamics, Sydney, July, 2000
- 36 Sun QH, Boyd ID, Fan J. Development of particle methods for computing MEMS gas flows. IMECE 2000 MicroFluidics Symposium, Orlando, November 2000
- 37 Liu HL, Xie C, Shen C, Fan J. Gas flows through micro membrane filters. 22nd Symp. on Rarefied Gas Dynamics, Sydney, July, 2000
- 38 Fan J, Boyd ID, Shelton C. Monte Carlo modeling of electron beam physical vapor deposition of yttrium. JVac Sci & Tech A, 2000, 18: 2937~2945
- 39 Fan J, Boyd ID, Shelton C. Monte Carlo modeling of YBCO deposition. 22nd Symp. on Rarefied Gas Dynamics, Sydney, July 2000
- 40 Simmons FS. Rocket Exhaust Plume Phenomenology. California: The Aerospace Press, 2000
- 41 Laux M, Fasoulas S, Messerschmid, EW. Development of a DSMC code on planar unstructured grids with automatic grid adaptation. AIAA Paper 95-2053
- 42 沈青,樊菁,胡振华,徐晓燕. 过渡领域三维绕流直接统计模拟的新算法. 空气动力学学报,1996, 14: 467~475
- 43 Shen C, Fan J, Hu ZH, Xu XY. A new version of position element algorithm of DSMC calculation of three-dimensional transitional flows. in Rarefied Gas Dynamics, edited by C. Shen, 1997. 162~167
- 44 樊菁,刘宏利,沈青,陈黎明. 直接统计模拟位置元算法中的分子表面反射的确定论判据. 空气动力学学报,2000, 18: 180~187
- 45 沈青,吴万泉,胡振华,徐晓燕. 均匀气体中内自由度激发松弛与离解反应直接统计模拟. 空气动力学学报,1991, 9: 1~7
- 46 Shen C, Hu Z, Xu X, Fan J. Monte Carlo simulation of vibrational energy relaxation in rarefied gas flows. in Rarefied Gas Dynamics, ed. by J Harvey & G Lord, 1995, Vol. 1, 469~475
- 47 Fan J, Shen C. A sterically dependent chemical reaction model. *ibid*, 1995, Vol.1, 448~454