

# 应用于计算气动声学的优化有限紧致格式

杨焱, 申义庆

(中国科学院力学研究所 高温气体动力学国家重点实验室(筹), 北京市海淀区 100190)

**摘要** 对于含间断的计算气动声学问题, 数值计算的格式要求低耗散低色散的设计, 对短波具有较高的分辨率, 又能捕捉激波。对称的紧致格式具有高精度, 具有无耗散和低色散特征, 但不能捕捉间断和激波; WENO 格式处理间断较为成功, 而耗散和色散误差相对较大。申义庆等人提出的通用有限紧致格式将紧致格式与 WENO 格式相结合, 利用光滑因子之间的关系对激波区域进行自动判断, 在光滑区域与非光滑区域分别采用一系列紧致格式与 WENO 格式, 使得数值解在光滑区具有较高精度, 在非光滑区避免非物理振荡。本文在通用有限紧致格式的框架下, 构造了新的适合于气动声学问题的优化有限紧致格式, 将其应用于计算气动声学一维标准测试问题, 对相关格式的模拟性能进行了评估, 显示该格式具有优势。

**关键词** 计算流体力学, 计算气动声学, 有限紧致格式, 高精度, 优化格式

## 引言

计算气动声学算法(CAA algorithms)是计算流体力学一个新的方向<sup>[1]</sup>, 主要研究目标是设计适合于模拟流致噪声传播的数值模拟算法。由于气动声学在性质, 特征和目标等诸方面均显著不同于空气动力学, 从而使得计算气动声学算法设计也需要不同的思路。其中最重要的一点是要求格式在一定的网格密度条件下具有低耗散和低色散特征, 或者具有短波高分辨率, 即模拟一个波长所需网格点数(points per wave, PPW)较少(约 6~8 PPW), 从而节省总的计算自由度<sup>[2]</sup>。

由于传统有限差分方法在波数空间的固有性质, 其色散和耗散误差较大, 如果直接用于气动声学计算, 表现并不好。因此, 需要进行特别的设计, 比较有影响的格式有两大类:

1) 有限差分格式的色散优化, 如 DRP 格式<sup>[3]</sup>, 针对迎风优化格式<sup>[4]</sup>, 以及对高精度格式的优化, 如对 WENO 格式进行与 DRP 格式类似的优化<sup>[2]</sup>(OWENO); 2) 紧致格式<sup>[5]</sup>。

由 Liu 等人提出<sup>[6]</sup>, 并由舒其望等人发展<sup>[7]</sup>的 WENO 格式本质上无振荡, 又具有较高精度和迎风性质, 适合求解分片光滑解, 用于激波捕捉; 紧致格式<sup>[5]</sup>具有模版更小, 分辨率高和精度高的特征, 适合于计算光滑解。为了能准确捕捉流场中的激波以及复杂区域的流动小

尺度结构, 申义庆等<sup>[9-11]</sup>提出了有限紧致格式的概念并发展了系列的高分辨率有限紧致格式。其主要思想是利用有效激波判别, 将传统紧致格式在计算区域上的整体求解划分为有限个光滑区域的局部求解, 激波捕捉格式的数值通量自动作为各个局部区域的边界通量。在文[9]中提出利用光滑因子之间的关系对间断区域进行自动判断, 避免了人为因素和问题相关性。

本文在有限紧致格式的构造框架下, 将紧致格式与原始的和优化的 WENO 格式结合, 发展适合于计算气动声学的优化有限紧致格式, 使之具有较高的短波分辨率, 通过若干线性波传播问题和计算气动声学标准测试一维问题进行了评估。数值计算结果表明, 该混合格式可获得 CAA 算法所需要的在精度和分辨率方面的较好性能。

## 1 数值方法

### 1.1 WENO 格式

对于一维双曲型守恒方程,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

其中通量函数  $f(u)$  可以分裂为两部分  $f(u) = f^+(u) + f^-(u)$ , 其中  $df^+/du \geq 0$ ,  $df^-/du \leq 0$ , 方程(1)的半离散格式写成:

$$\frac{du_i}{dt} = -\frac{1}{\Delta x}(h_{i+1/2} - h_{i-1/2}) \quad (2)$$

其中数值流通量  $h_{i+1/2} = h_{i+1/2}^+ + h_{i+1/2}^-$ 。正方向通量与负方向通量形式相对于  $x_{i+1/2}$  成镜面对称。以经典的五阶 WENO 格式为例，其数值流通量的重构是通过三个固定模版  $S_k = \{x_{i+k-2}, x_{i+k-1}, x_{i+k}\}$  的数值格式加权组合构成，通过反映解的光滑与连续性质的光滑因子  $IS_k$  调节权重。重构过程写为：

$$h_{i+1/2} = \sum_{k=0}^2 \omega_k \hat{f}^k(x_{i+1/2}) \quad (3)$$

其中，

$$\hat{f}^k(x_{i+1/2}) = \hat{f}_{i+1/2}^k = \sum_{j=0}^2 c_{kj} f_{i+k-2+j}, i = 0, \dots, N$$

权重  $w_k$  定义为：

$$w_k = \frac{\alpha_k}{\sum_{l=0}^2 \alpha_l}, \alpha_k = \frac{d_k}{(IS_k + \varepsilon)^p}$$

表 1 OWENO3 的系数  $c_{kj}$  和理想权重  $d_k$ <sup>[2]</sup>

$k$	$c_{kj}$				$d_k$
	$j=0$	$j=1$	$j=2$	$j=3$	
0	0.28418590	1.0318226	-0.41620299	0.10019444	0.14150117
1	-0.10076912	0.6007691	0.60076912	-0.10076912	0.48616615
2	0.10019444	-0.41620299	1.0318226	0.28418590	0.33383476
3	-0.27941025	0.98165507	-1.6250794	1.9228346	0.038497919

### 1.3 优化有限紧致格式

紧致格式<sup>[5]</sup>利用多点函数值的组合逼近多个导数值的组合，对于一阶导数，其一般形式可写为：

$$\mathbf{A}f'_i = \frac{1}{\Delta x} \mathbf{B}f_i \quad (4)$$

或写成通量形式：

$$\begin{cases} f'_i = \frac{1}{\Delta x} (\hat{h}_{i+1/2} - \hat{h}_{i-1/2}) \\ \mathbf{A}\hat{h}_{i+1/2} = \mathbf{C}f_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \end{cases} \quad (5)$$

其中， $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$  和  $\mathbf{C}$  是系数矩阵。申义庆等人提出有限紧致格式<sup>[10, 11]</sup>，间断点将传统紧致格式的整体相关求解分为多个局部的光滑区域求解，利用双对角隐式紧致格式，避免了传统紧致格式穿过间断点引起的麻烦。文献<sup>[9]</sup>提出的通用有限紧致格式（generalized finite compact scheme）将 WENO 格式与紧致格式结合，通过光滑因子之间的关系自动判断间断点，1）在包含间断点的区域（包括这些区域的边界）

光滑因子  $IS_k$  的形式有多种选择，本文使用 Borges 等人所建议的形式<sup>[12]</sup>。

### 1.2 优化 WENO (OWENO) 格式

针对 CAA 算法的特点，Wang and Chen<sup>[2]</sup>根据 DRP 格式<sup>[3]</sup>的色散优化思想提出了 OWENO 格式，其构造思想为牺牲精度，提高解析率（resolving efficiency）<sup>[5]</sup>，相比原始的 WENO 格式，具有更低的耗散和色散误差。其优化方法与 DRP 格式类似，在原始 WENO 格式的基础上，降低一阶导数的逼近精度，将自由参数用于最小化色散和耗散误差，形式上与 WENO 格式相同，调节系数  $c_{kj}$  和理想权重  $d_k$ 。表 1 列出其中由 7 阶 WENO 格式优化得到的 3 阶 OWENO 格式（OWENO3）的系数  $c_{kj}$  与理想权重  $d_k$ 。

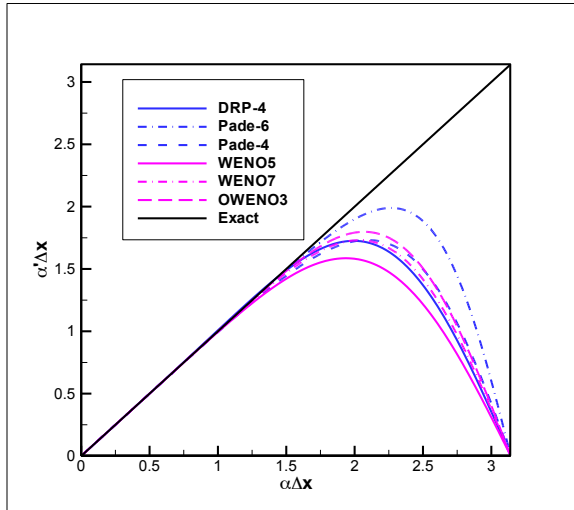
采用 WENO 格式计算数值流通量；2）在上述两个区域之间的点定义为紧致格式模版，运用紧致格式计算数值流通量。该算法的详细叙述可参见文献<sup>[9]</sup>。由于该格式的通用性，对于上述两步，任意的 WENO 格式和紧致格式均可根据需要进行组合，用于构造通量，新的组合可构成新的格式。

本文在通用有限紧致格式框架下，构造优化的有限紧致格式，即采用 6 阶 Padé 紧致格式，结合 3 阶 OWENO 格式（FC-OWENO3）以获得计算气动声学问题所需的高精度与低耗散低色散性质和捕捉激波的优势。使用 5 阶和 7 阶 WENO 格式（FC-WENO5 和 FC-WENO7）与之对比，同时也与原 WENO7、OWENO3 格式数值结果进行对比，发现优化的有限紧致格式在声波模拟和激波捕捉方面具有明显的优势。

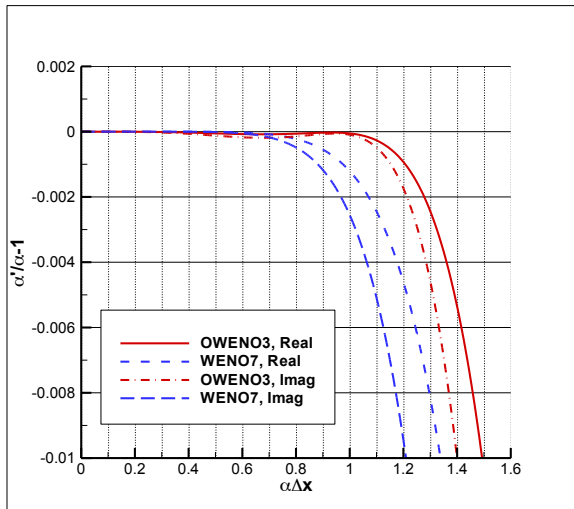
时间格式采用 4 阶 TVD Runge-Kutta<sup>[7]</sup>显式推进。

### 1.4 格式分析

采用常用 Fourier 分析方法<sup>[1, 2]</sup>, 对所使用的格式进行波数空间的色散误差分析, 如图 1(a)所示, 其中  $\alpha\Delta x$  为精确解波数,  $\alpha'\Delta x$  为数值解波数。可见, 对于波数空间的解析率, 6 阶 Padé 格式在其中最具优势, 意味着要控制相同的色散误差, 每周期所需网格点数(PPW)最少, 且其为对称格式, 没有数值耗散, 因此是一种较理想的计算气动声学格式; WENO 系列格式 (WENO5, WENO7, OWENO3), 一方面具有较大的耗散, 另一方面色散误差也相对较大, 但优化后的 OWENO3 格式具有相对较小的色散和耗散误差, 见图 1(b); 从 4 阶中心格式优化而来的 DRP 格式<sup>[3]</sup>的与 4 阶 Padé 格式和 7 阶 WENO 的波数解析率接近。



(a) 本文所用格式与 DRP 格式比较



(b) 优化 WENO 格式与 7 阶 WENO 格式局部比较

图 1 空间格式随波数变化情况比较

因此, 选择混合的通用有限紧致格式, 可较大限度地发挥紧致格式的高精度和高波数解析优势, 在不光滑区域使用优化的 WENO 可克服紧致格式易振荡的缺点, 并仍然保持较低的色散和耗散误差。因而, 可以预期其对于复杂问题, 具有较好的适应性。

## 2 数值实验结果

### 2.1 精度和间断解测试

由于计算气动声学问题主要研究线性问题, 为考验数值格式, 本文采用的控制方程均为线性单波传播方程 (1)。本小节利用正弦波光滑解测试精度, 方波间断解测试激波捕捉。

$$1) u_0(x) = \sin(\pi x) \quad (6)$$

即正弦波, 计算域为  $[-1, 1]$ , 周期性边界条件, 计算时间为  $t = 1$ , CFL 数取 0.1。对于该光滑解, FC-WENO 系列格式退化为 Padé 紧致格式, 其精度为 6 阶, WENO7 格式数值上达到 6 阶, OWENO3 是 3 阶格式, 数值上可达到了 3 阶, 如表 2 所示。其次, 采用方波

$$2) u_0(x) = \begin{cases} 1, & -0.2 \leq x \leq 0.2 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (7)$$

测试间断点捕捉, 计算域为  $[-1, 1]$ , 仍采用周期性边界条件, 计算时间为  $t = 2$ , CFL 数取 0.1。其最大误差发生在间断点附近。放大其间断点  $x = -0.2$  附近的结果, 如图 2 所示。可见, 对于本文涉及的所有格式, 间断点周围均采用 WENO 格式, 在间断点都不会发生非物理振荡。而离开间断点, 数值解的误差显示: WENO 系列格式 (WENO7 和 OWENO3) 误差较大, 而优化过的 OWENO3 比相同模版的 WENO7 误差明显地小; 有限紧致格式 (FC) 的误差要小于前两者, 即使是 FC-WENO5 也不例外, FC 格式之间的误差相差不大。有限紧致格式避免了在此处采用标准紧致格式所带来的非物理振荡 (图中未给出); 同时在间断点周围, 结果相比 WENO 格式要好得多。

表 2  $u_0 = \sin(\pi x)$  的误差和精度

Scheme	N	$L_\infty$ error	$L_\infty$ order	$L_1$ error	$L_1$ order
WENO7	20	0.878497E-02	-	0.384864E-02	-
	40	0.225660E-03	5.283	0.851062E-04	5.499
	80	0.541237E-05	5.382	0.122066E-05	6.124
	160	0.148036E-06	5.192	0.184780E-07	6.046
	320	0.414347E-08	5.159	0.282437E-09	6.032
	640	0.116006E-09	5.159	0.469763E-11	5.910
OWENO3	20	0.187131E-02	-	0.109968E-02	-
	40	0.555126E-03	1.753	0.376286E-03	1.547
	80	0.890769E-04	2.640	0.570723E-04	2.721
	160	0.117994E-04	2.916	0.749647E-05	2.929
	320	0.150364E-05	2.972	0.954548E-06	2.973
	640	0.232024E-06	2.696	0.147701E-06	2.692
FC	20	0.578082E-02	-	0.152544E-02	-
	40	0.133000E-03	5.442	0.405741E-04	5.233
	80	0.244637E-05	5.765	0.756117E-06	5.746
	160	0.424190E-07	5.850	0.118885E-07	5.991
	320	0.690273E-09	5.941	0.181680E-09	6.032
	640	0.108957E-10	5.985	0.290324E-11	5.968

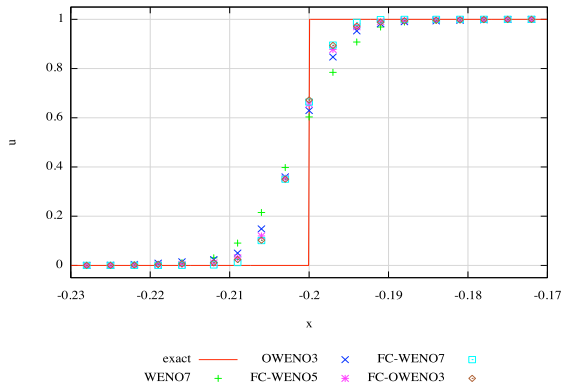


图2 方波结果对比 (N = 640)

## 2.2 计算气动声学问题 1-高斯波

采用第一次 CAA 标准测试会议<sup>[13]</sup>的一维简单问题，高斯波的线性传播：

$$u_0(x) = 0.5 \exp\left[-(\ln 2)\left(\frac{x}{3}\right)^2\right] \quad (8)$$

要求网格  $\Delta x = 1$ ，计算给出  $t = 400$  时刻的数值解和误差，此处 CFL 数取 0.1。该例子结果表明（图 3），对于该尖波，WENO7 格式的分辨率是相关格式中最低的，OWENO3 格式有较大提升；FC 格式的精度接近紧致格式，且对紧致格式在高斯波上游出现的振荡有抑制作用。

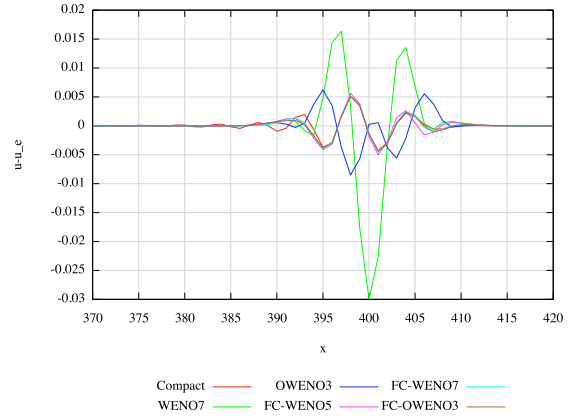
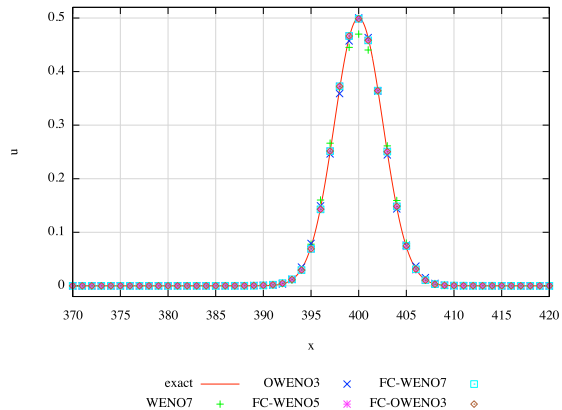


图3 高斯波结果对比 ( $t = 400$ ) 上下图分别为数值解和误差在波峰附近的图像

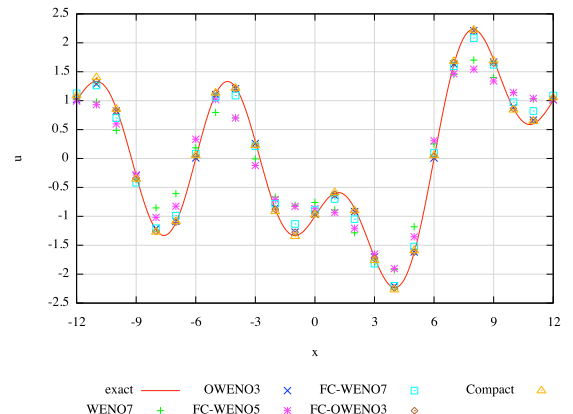
## 2.3 计算气动声学问题 2-宽频波

采用下例考察解析宽频声波的能力<sup>[2]</sup>，波形由 3 个正弦波组成， $\Delta x = 1$ ，则 PPW 相对于短波为 6，中波为 12，长波为 24。

$$u_0(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi x}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi x}{12}\right) \quad (9)$$

计算域为  $[-12, 12]$ ，CFL 数取为 0.1。结果如图 4 所示。

该例为光滑解，但计算的 PPW 数较小。WENO7 格式的误差最大，因为其耗散较大；OWENO3 对耗散和色散误差进行了优化，所以表现较佳，误差大大小于 WENO7 格式；标准紧致格式在该例子中保持了其低耗散低色散的特点，误差也远小于 WENO7 格式；而 FC 格式则体现了混合格式的特征，与对应的 WENO7 格式相比 FC-WENO7 误差减小，但低耗散低色散优化效果不如 OWENO3 格式；而由于低耗散低色散的 OWENO3 格式与紧致格式相比，误差很接近，二者的混合格式 FC-OWENO3 格式表现也没有明显的提升。



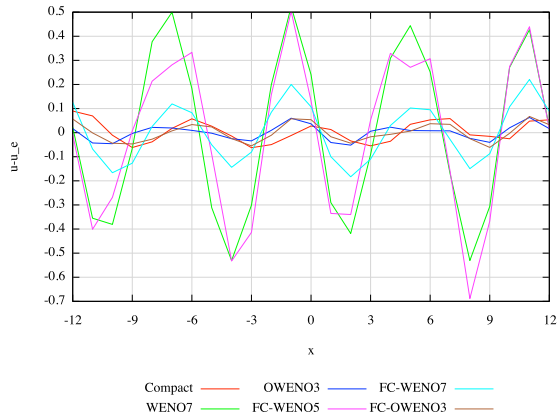


图 4 宽频波结果，上下图分别为数值解和对应的误差图像( $t = 30$ )

## 2.4 计算气动声学问题 3-激波/声波干扰

考察简化的激波/声波干扰例子<sup>[2]</sup>:

$$u_0(x) = \begin{cases} \sin(\frac{\pi x}{3}) + 1, & -7.5 \leq x \leq 19.5 \\ \sin(\frac{\pi x}{3}), & \text{otherwise} \end{cases} \quad (10)$$

计算域为 $[0, 24]$ ,  $\Delta x = 1$ ,  $CFL = 0.1$ , 计算时间  $t = 48$ 。该解为含有间断点的声波传播问题。

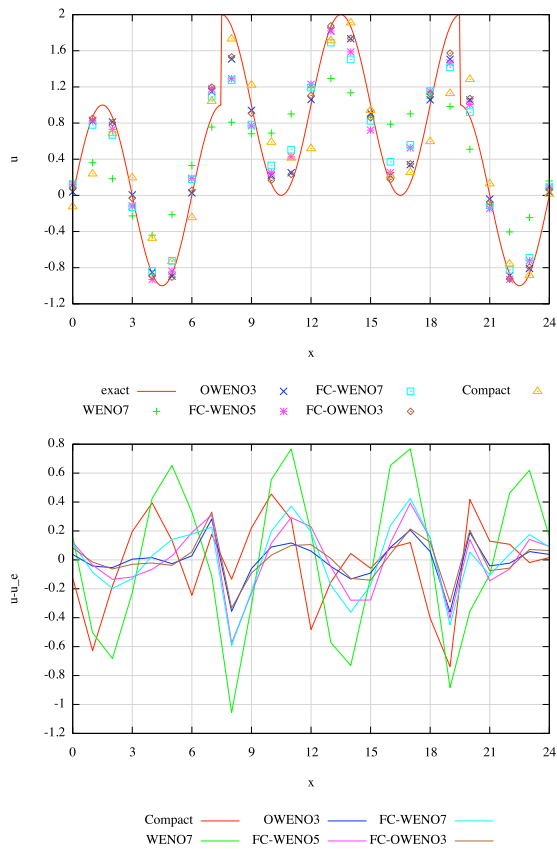


图 5 激波声波/干扰数值解结果与误差 ( $t = 48$ )

对于含有间断点的解，标准紧致格式会出现较严重的非物理振荡，从而误差较大，波形失真；WENO7 虽然可以避免非物理振荡，却耗散误差较大，使得波形变得平滑；OWENO3 格式则较好地减小了耗散误差；FC 格式与对应的 WENO 格式相比能更好地保持精度，与紧致格式相比又能克服间断点周围的振荡，其中 FC-OWENO3 格式性能最优。

## 3 结 论

本文利用通用有限紧致格式框架，构造一系列紧致格式与 WENO 格式的混合格式，针对计算气动声学 (CAA) 的特点，构造了低耗散低色散的优化有限紧致格式，通过一维线性单波问题进行评估。得到如下结论：

1) 原始 WENO 格式由于耗散和色散误差较大，不适合用于 CAA 计算；

2) 对 WENO 格式进行低耗散低色散优化后得到的 OWENO 格式对于短波有较好的解析能力，但是精度较低。

3) 结合紧致格式与 WENO 系列格式的有限紧致格式可以在光滑区域获得高精度，同时可在间断区域抑制振荡，并保持误差在较低水平。其中，优化有限紧致格式 FC-OWENO3 具有高精度和低耗散低色散性质，对于短波有较高分辨率，在间断区域可抑制振荡，对于声波/激波干扰的 CAA 问题模拟中具有优势。

## 参考文献

- 1 Tam C K W. Computational aeroacoustics - issues and methods[J]. AIAA Journal. 1995, 33(10):1788-1796.
- 2 Wang Z J, Chen R F. Optimized weighted essentially nonoscillatory schemes for linear waves with discontinuity[J]. Journal of Computational Physics. 2001, 174(1):381-404.
- 3 Tam C K W, Webb J C. Dispersion-relation-preserving finite difference schemes for computational acoustics[J]. Journal of Computational Physics. 1993, 107(2):262-281.
- 4 Zhuang M, Chen R F. Optimized upwind dispersion-relation-preserving finite difference scheme for computational aeroacoustics[J]. AIAA Journal. 1998, 36(18):2146-2148.
- 5 Lele S K. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution[J]. Journal of Computational Physics. 1992, 103(1):16-42.
- 6 Liu X D, Osher S, Chan T. Weighted essentially non-oscillatory schemes[J]. Journal of Computational Physics. 1994, 115:200-212.
- 7 Jiang G-S, Shu C-W. Efficient implementation of weighted eno schemes[J]. Journal of Computational Physics. 1996, 126:202-228.

- 8 Balsara D S, Shu C-W. Monotonicity preserving weighted essentially non-oscillatory schemes with increasingly high order of accuracy[J]. *Journal of Computational Physics* 2000, 160:405-452.
- 9 Shen Y-Q, Zha G-C. Generalized finite compact difference scheme for shock/complex flowfield interaction[J]. *Journal of Computational Physics*. 2011, 230:4419–4436.
- 10 Shen Y-Q, Yang G-W, Gao Z. High-resolution finite compact difference schemes for hyperbolic conservation laws[J]. *Journal of Computational Physics*. 2006, 216:114–137.
- 11 Shen Y-Q, Yang G-W. Hybrid finite compact-WENO schemes for shock calculation[J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 2007, 53:531–560.
- 12 Borges R, et al. An improved weighted essentially non-oscillatory scheme for hyperbolic conservation laws[J]. *Journal of Computational Physics*. 2008, 227:3191-3211.
- 13 Hardin J C, Ristorcelli J, Tam C K W, Eds. ICASE/LaRC workshop on benchmark problems in computational aeroacoustics (CAA)[R]. NASA-CP-3300, 1995.

## OPTIMIZED FINITE COMPACT SCHEME FOR COMPUTATIONAL AEROACOUSTICS

YANG Yan SHEN Yiqing

(State Key Laboratory of High Temperature Gas Dynamics, Institute of Mechanics, CAS, No.15 Beisihuanxi Road, Beijing 100190, China)

**Abstract** High resolution for short waves is required for design of numerical schemes for computational aeroacoustics (CAA) problems with discontinuity, therefore low dissipation and low dispersion should be satisfied and capability of capturing shock wave should be obtained. Shen et al. proposed the generalized finite compact scheme to solve shock/complex flow interaction problems, which is a compact-WENO hybrid scheme. The finite compact scheme imports compact scheme in smooth regions and WENO scheme in regions with discontinuities, using the relation of smooth indicators to detect the shock region, which obtains high accuracy in smooth region and impresses the unphysical oscillations around the discontinuities. An optimized finite compact scheme was constructed, with compact scheme and optimized WENO scheme. The evaluation of the optimized finite compact scheme and related schemes for CAA benchmark problems was accomplished with several cases, resulting that the former has comparable advantages.

**Key words** CFD, CAA, finite compact scheme, high order, optimized scheme