

# 用物理黏性构建高阶不振荡对流扩散差分格式<sup>1)</sup>

高 智<sup>2)</sup>

(中国科学院力学研究所高温气体动力学国家重点实验室, 北京 100190)

**摘要** 利用数值摄动算法, 通过扩散格式数值摄动重构把对流扩散方程的 2 阶中心差分格式 (2-CDS) 重构为高精度高分辨率格式, 解析分析和模型方程计算证实了新格式的高精度不振荡性质. 新格式是把物理黏性使流动光滑化的扩散运动规律引入 2-CDS 中的结果. 该法显然与构建高级离散格式的常见方法不同. 证实: 数值摄动重构中引入扩散运动规律的结果格式与引入对流运动规律 (下游不影响上游的规律) 的结果格式一致, 说明对离散方程的数值摄动运算, 在维持原格式结构形式不动的条件下, 不仅能提高格式精度和稳健性, 且可揭示对流离散运动规律与扩散离散运动规律之间的内在关联; 同时证实, 文中提出和使用的上、下游分裂方法是构建高精度不振荡离散格式的一个有效方法.

**关键词** 计算流体力学, 数值摄动算法, 高精度不振荡差分格式, 对流扩散方程

**中图分类号:** O357 **文献标识码:** A **文章编号:** 0459-1879(2012)03-0505-08

## 引 言

在计算流体力学的发展过程中, 构建 Navier-Stokes 方程组和 Euler 方程组的高精度高分辨率差分格式一直是一个重要课题<sup>[1-2]</sup>. 高精度通常采用多结点方法和增加结点导数的紧致方法. 高分辨率不振荡格式的构建, 最早是 von Neumann 等为捕捉间断解提出的人工黏性法<sup>[3-4]</sup>, 后来又发展了调控数值耗散、数值色散和数值群速度的迎风和人工光滑化方法, 如 1 阶精度 Godunov 间断分解算法<sup>[5]</sup>、Harten<sup>[6]</sup> 2 阶精度 TVD 等. 为了提高不振荡格式的精度, Harten 等<sup>[7]</sup> 提出根据差商绝对值极小选择原则逐次扩展节点模板的本质不振荡 (ENO) 高阶格式, Liu 等<sup>[8]</sup> 通过引入权重系数改进 ENO 插值模板选择方案的 WENO 格式, 提供了构建高精度高分辨率 (本质无振荡) 差分格式的一般方法. 人们构建的众多高分辨率不振荡格式均离不开对数值耗散、数值色散和数值群速度的人为调控, 都是处理对流离散格式的结果, 且高于 2 阶精度的本质不振荡格式均需使用多结点.

作者提出的数值摄动算法<sup>[9-12]</sup> 与上述常用方法不同, 该法通过数值摄动重构对流离散格式构建出一组高精度条件稳定和高精度绝对稳定有限差分

(FD) 和有限体积 (FV) 格式<sup>[13-15]</sup>, 该法不扩充结点不使用限制器之类的任何人工光滑化技术, 而通过引入下游不影响上游的对流运动规律和对格式的数值摄动运算, 获得高精度高分辨率格式. 本文进一步发展数值摄动算法, 把摄动重构对流离散格式发展为重构扩散离散格式以及摄动重构上、下游扩散格式, 令人惊奇的是, 数值摄动重构扩散格式可获得摄动重构上、下游对流格式同样优良的高精度不振荡重构格式.

## 1 数值摄动重构扩散离散格式

物理黏性具有使流场光滑化的特性, 既然调控数值耗散和色散的人工光滑化技巧可使格式不振荡, 因此可以期望“调控”物理黏性同样可使格式不振荡, 为此对扩散离散格式进行数值摄动重构. 对流扩散方程

$$u \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \gamma \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + F \quad (1)$$

的 2 阶中心差分格式 (2CDS) 为

$$\frac{1}{2} u_i \Delta x (\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}) = \gamma (\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}) + F_i \Delta x^2 \quad (2)$$

对 2-CDS 中扩散离散格式的数值摄动重构格式为

2011-06-07 收到第 1 稿, 2011-11-07 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金资助项目 (10872204).

2) E-mail: gaozhi@imech.ac.cn

$$\frac{1}{2}u_i\Delta x(\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}) = G_d(\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}) + G_f\Delta x^2 F_i \quad (3)$$

其中数值摄动重构函数  $G_d$  和  $G_f$  为

$$G_d = \gamma \left( 1 + \sum_{n=1}^N d_n \Delta x^n \right), \quad G_f = 1 + \sum_{n=2}^N f_n \Delta x^n \quad (4)$$

将  $G_d$  和  $G_f$  代入格式 (3), 并将  $\varphi_{i\pm 1}$  对  $i$  结点取 Taylor 展开, 得到重构格式 (3) 的修正微分方程为

$$\begin{aligned} \frac{u_i}{\gamma} \Delta x \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Delta x + \sum_{n=2}^N \frac{2}{(2n-1)!} \frac{\partial^{2n-1} \varphi}{\partial x^{2n-1}} \Delta x^{2n-1} \right] = \\ \left( 1 + \sum_{n=2}^N d_n \Delta x^n \right) \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \Delta x^2 + \sum_{n=2}^N \frac{2}{(2n)!} \frac{\partial^{2n} \varphi}{\partial x^{2n}} \Delta x^{2n} \right] + \\ \frac{1}{\gamma} \Delta x^2 \left( 1 + \sum_{n=2}^N f_n \Delta x^n \right) F_i \end{aligned} \quad (5)$$

在方程 (5) 中令  $\Delta x^m$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ) 的系数为零, 由  $\Delta x^2$  系数为零得到

$$\frac{u_j}{\gamma} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{1}{\gamma} F_i \quad (6)$$

由线性化对流扩散方程 (6) 推出

$$\frac{\partial^n \varphi}{\partial x^n} = \left( \frac{u_j}{\gamma} \right)^{n-1} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{\gamma} \left( \frac{u_j}{\gamma} \right)^{n-2} F_i \quad (n \geq 2) \quad (7)$$

将线性高阶导数式 (7) 代入式 (5), 由  $\Delta x^n$  系数为零可求出诸系数  $d_n$  和  $f_n$ , 部分  $d_n$  和  $f_n$  为

$$d_{2n-1} = 0, \quad f_{2n-1} = 0, \quad n \geq 1 \quad (8a)$$

$$\left. \begin{aligned} d_2 &= \frac{1}{12} \left( \frac{u_i}{\gamma} \right)^2, \quad d_4 = -\frac{1}{6!} \left( \frac{u_i}{\gamma} \right)^4 \\ d_6 &= \frac{1}{6 \times 7!} \left( \frac{u_i}{\gamma} \right)^6, \quad d_8 = \frac{-3}{10!} \left( \frac{u_i}{\gamma} \right)^8 \\ d_{10} &= \frac{5}{6 \times 11!} \left( \frac{u_i}{\gamma} \right)^{10}, \quad f_{2n} = 0 \quad n \geq 1 \end{aligned} \right\} \quad (8b)$$

将  $d_n$  和  $f_n$  诸系数 (8a) 和 (8b) 代入格式 (3) 得到一组高精度扩散重构摄动格式 (DPS).

## 2 扩散摄动重构格式 (DPS) 的性能分析

DPS (式 (3)) 可写成如下一般形式

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{\Delta x^2} [C_{d,i+1}(2N+2)\varphi_{i+1} - C_{d,i}(2N+2)\varphi_i + \\ C_{d,i-1}(2N+2)\varphi_{i-1}] + F_i = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

并有

$$C_{d,i}(2N+2) = C_{d,i+1}(2N+2) + C_{d,i-1}(2N+2) \quad (10)$$

对  $N = 0$ , 即经典 2 阶中心差分格式 (3)

对  $N = 1$ , 即 4 阶精度 DPS,

$$C_{d,i\pm 1} = 1 \mp \frac{1}{2} R_{\Delta x} \quad (11a)$$

$$C_{d,i\pm 1}(4) = \left( 1 \mp \frac{1}{4} R_{\Delta x} \right)^2 + \frac{1}{48} R_{\Delta x}^2 \quad (11b)$$

对  $N = 2$ , 即 6 阶精度 DPS

$$C_{d,i\pm 1}(6) = \left( 1 \mp \frac{1}{4} R_{\Delta x} \right)^2 + \frac{1}{48} R_{\Delta x}^2 \left( 1 - \frac{1}{15} R_{\Delta x}^2 \right) \quad (11c)$$

对  $N = 3$ , 即 8 阶精度 DPS

$$\begin{aligned} C_{d,i\pm 1}(8) &= \left( 1 \mp \frac{1}{4} R_{\Delta x} \right)^2 + \\ &\frac{1}{48} R_{\Delta x}^2 \left( 1 - \frac{1}{30} R_{\Delta x}^2 \right)^2 + \frac{1}{20 \times 7!} R_{\Delta x}^6 \end{aligned} \quad (11d)$$

对  $N = 4$ , 即 10 阶精度 DPS

$$\begin{aligned} C_{d,i\pm 1}(10) &= \left( 1 \mp \frac{1}{4} R_{\Delta x} \right)^2 + \\ &\frac{1}{48} R_{\Delta x}^2 \left( 1 - \frac{1}{30} R_{\Delta x}^2 \right)^2 + \\ &\frac{1}{20 \times 7!} \left( 1 - \frac{1}{12} R_{\Delta x}^2 \right)^2 R_{\Delta x}^6 \end{aligned} \quad (11e)$$

对  $N = 5$ , 即 12 阶精度 DPS

$$\begin{aligned} C_{d,i\pm 1}(12) &= \left( 1 \mp \frac{1}{4} R_{\Delta x} \right)^2 + \\ &\frac{1}{48} R_{\Delta x}^2 \left( 1 - \frac{1}{30} R_{\Delta x}^2 \right)^2 + \\ &\frac{1}{20 \times 7!} R_{\Delta x}^6 \left( 1 - \frac{1}{24} R_{\Delta x}^2 \right)^2 + \frac{37}{4 \times 21!} R_{\Delta x}^{10} \end{aligned} \quad (11f)$$

式 (11) 中  $R_{\Delta x} = u_i \Delta x / \gamma$  为网格 Reynolds 数. 由式 (11) 推知, 对  $N = 2m - 1$  ( $m = 1, 2, 3$ ) 如下关系式恒成立:

对  $R_{\Delta x}$  的任意值

$$C_{d,i+1}(4m) \geq 0, \quad C_{d,i-1}(4m) \geq 0 \quad (12a)$$

$$|C_{d,i}(4m)| \geq |C_{d,i+1}(4m)| + |C_{d,i-1}(4m)| \quad (12b)$$

可见对 4 阶、8 阶和 12 阶精度 DPS, 由线性方程 (9) 组建的线性代数方程组, 其系数矩阵对  $R_{\Delta x}$  的任意值均为对角占优, 故这几个 DPS 绝对稳定, 即临界网格 Reynolds 数  $R_{cri}$  为无穷大. 事实上, 离散方程 (9) 无源  $F_i = 0$  时的通解求出为

$$\varphi_i = A + B \left( \frac{C_{d,i-1}}{C_{d,i+1}} \right)^i, \quad x = i \Delta x \quad (12c)$$

其中,  $A$  和  $B$  由边界条件确定; 通解 (12c) 表明:

上述 DPS 不会产生振荡解，为单调格式。对 6 阶和 10 阶精度 DPS(9),  $2N + 2 = 2 + 4m$  ( $m = 1, 2$ ), 有

$$\left. \begin{aligned} &C_{d,i+1}(2+4m) > 0, C_{d,i-1}(2+4m) > 0, \\ &\text{当 } R_{\Delta x} \text{ 不大} \\ &C_{d,i+1}(2+4m) < 0, C_{d,i-1}(2+4m) < 0, \\ &\text{当 } R_{\Delta x} \text{ 足够大} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

可见，6 阶和 10 阶精度 DPS(9) 为条件稳定格式，它们为稳定的  $R_{cri}$  为有限值，例如 6 阶精度 DPS(9) 为稳定格式的  $R_{cri}$  约为 4。此外， $C_{d,i\pm 1}(2n+2)$  的最后一项可写成  $CR_{\Delta x}^{2N}$ ，其系数  $C$  随  $N$  的增大而显著减小，故高于 12 阶精度 DPS(9) 本文不再考虑。

### 3 扩散重构摄动格式 (DPS) 优良性能的数值验证

利用一维非线性 Burgers 方程、一维和二维线

性对流扩散方程检验扩散摄动格式 (DPS) 的不振荡和高精度性质。定常 Burgers 方程为

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1 \quad (14)$$

方程 (14) 的精确解取为  $u = \tanh[Re(1-2x)/4]$ ，计算取均匀网格， $Re = 200$ 。表 1 给出 2 阶中心差分格式 (2-CDS)、4 阶和 8 阶精度扩散重构摄动格式 (4-DPS 和 8-DPS) 计算 Burgers 方程的最大误差  $L_\infty$  和均方根误差  $L_2$ 。在多数网格条件下，2-CDS 均为振荡或发散，但 4-DPS 和 8-DPS 网格再粗也不会产生振荡解，对细网格 (网格数  $N = 320$ )，4-DPS 和 8-DPS 的  $L_\infty$  和  $L_2$  均很小于 2-CDS 的  $L_\infty$  和  $L_2$ 。值得注意的是：8-DPS 的  $L_\infty$  和  $L_2$  分别均与 4-DPS 的  $L_\infty$  和  $L_2$  相近，有的甚至还差 (如对  $N = 320$ )，原因有待进一步的研究，初步看来是  $x = 0.5$  处解间断及非线性效应所致，因为对一维和二维线性问

表 1 2-CDS, 4-DPS 和 8-DPS 计算 Burgers 方程的最大误差  $L_\infty$  和均方根  $L_2$  误差  
Table 1 Maximum error  $L_\infty$  and mean square root error  $L_2$  of 2-CDS, 4-DPS and 8-DPS solving Burgers equation

N	2-CDS		4-DPS		8-DPS	
	$L_\infty$ error	$L_2$ error	$L_\infty$ error	$L_2$ error	$L_\infty$ error	$L_2$ error
40	—	—	0.581 50	0.142 82	0.703 59	0.359 40
80	—	—	0.609 425	0.083 58	0.515 178	0.116 082
160	—	—	0.802 481	0.065 131 8	0.869 026	0.069 237 5
320	0.646 67	0.051 544 5	0.004 264 2	0.000 375 375	0.031 535 2	0.002 491 75
640	0.127 819	0.007 805 53	0.040 352 5	0.002 375 91	0.042 226 1	0.002 499 9
1 280	0.024 393 3	0.001 577 57	0.009 739 7	0.000 600 8	0.009 838 6	0.000 607 5
2 560	0.005 782 6	0.000 377 46	0.002 438 5	0.000 147 3	0.002 443 7	0.000 147 7

题，4-DPS 和 8-DPS 与 2-CDS 相比的高精度高分辨率特性十分规律 (参见下文)。图 1 给出诸格式在间断位置 ( $x = 0.5$ ) 附近的 Burgers 方程解，进一步展现了 2-CDS 振荡、4-DPS 和 8-DPS 不振荡的特性。4-DPS 和 8-DPS(9) 的高精度高分辨率性质得到数值证实。

表 2 进一步给出 3-DPS 与 5 阶精度 WENO(5-WENO) 格式计算 Burgers 方程 (14) 的对比情况，表中同时给出 2-CDS 的结果。网格很粗，3-DPS 和 5-WENO 格式均不振荡，数值精度两者大体一致。考虑到 3-DPS 为 3 节点中心格式，不存在降低计算质量的数值边界效应问题；而 5-WENO 格式为 7 节点偏心格式，避不开数值边界效应的不利因素。特

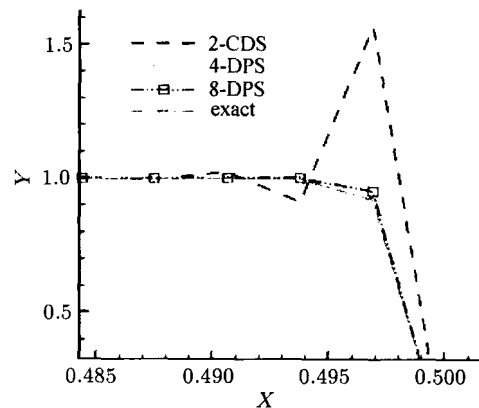


图 1 Burgers 方程计算，诸格式在间断位置 ( $x = 0.5$ ) 附近的解  
Fig.1 Solutions near discontinuous location ( $x = 0.5$ ) of various schemes solving Burgers equation

表 2 2-CDS, 3-DPS 和 5-WENO 计算 Burgers 方程的最大误差  $L_\infty$  和均方根误差  $L_2$  比较Table 2 Maximum error  $L_\infty$  and mean square root error  $L_2$  of 2-CDS, 3-DPS and 5-WENO solving Burgers equation

$Re$	$N$	2-CDS		3-DPS		5-WENO	
		$L_\infty$	$L_2$	$L_\infty$	$L_2$	$L_\infty$	$L_2$
100	20	—	—	0.2300	$0.3087 \times 10^{-1}$	$0.9388 \times 10^{-1}$	$0.9522 \times 10^{-2}$
	40	—	—	$0.7812 \times 10^{-1}$	$0.4350 \times 10^{-2}$	0.1310	$0.7276 \times 10^{-2}$
	80	—	—	$0.3288 \times 10^{-1}$	$0.8569 \times 10^{-3}$	$0.8761 \times 10^{-1}$	$0.3325 \times 10^{-2}$
	160	$0.6978 \times 10^{-1}$	$0.1899 \times 10^{-2}$	$0.2686 \times 10^{-1}$	$0.5975 \times 10^{-3}$	$0.1494 \times 10^{-1}$	$0.5572 \times 10^{-3}$
	320	$0.1431 \times 10^{-1}$	$0.4386 \times 10^{-3}$	$0.5908 \times 10^{-2}$	$0.1433 \times 10^{-3}$	$0.2892 \times 10^{-2}$	$0.1057 \times 10^{-3}$
	640	$0.3180 \times 10^{-2}$	$0.9435 \times 10^{-4}$	$0.1106 \times 10^{-2}$	$0.2625 \times 10^{-4}$	$0.7987 \times 10^{-3}$	$0.3229 \times 10^{-4}$
500	1280	$0.4231 \times 10^{-3}$	$0.1200 \times 10^{-4}$	$0.2195 \times 10^{-3}$	$0.1027 \times 10^{-4}$	$0.4442 \times 10^{-3}$	$0.1812 \times 10^{-4}$
	20	—	—	0.6328	0.1983	$0.5089 \times 10^{-1}$	$0.4939 \times 10^{-2}$
	40	—	—	0.4754	$0.5554 \times 10^{-1}$	$0.6180 \times 10^{-1}$	$0.3104 \times 10^{-2}$
	80	—	—	0.2884	$0.1120 \times 10^{-1}$	$0.8334 \times 10^{-1}$	$0.2166 \times 10^{-2}$
	160	—	—	0.1216	$0.1794 \times 10^{-2}$	0.1208	$0.1657 \times 10^{-2}$
	320	—	—	$0.3723 \times 10^{-2}$	$0.4160 \times 10^{-4}$	0.1170	$0.9597 \times 10^{-3}$
	640	0.1270	$0.6249 \times 10^{-3}$	$0.3973 \times 10^{-1}$	$0.1745 \times 10^{-3}$	$0.2782 \times 10^{-1}$	$0.2224 \times 10^{-3}$
	1280	$0.2386 \times 10^{-1}$	$0.1407 \times 10^{-3}$	$0.9222 \times 10^{-2}$	$0.4660 \times 10^{-4}$	$0.3596 \times 10^{-2}$	$0.3136 \times 10^{-4}$

别是 3-DPS 的构建设没有使用人工黏性也没有使用限制器; 而 5-WENO 格式使用了限制器. 因此, 可以认为 3-DPS 比 5-WENO 格式更好.

一维和二维线性常系数和变系数对流扩散模型方程为

$$u \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (15)$$

$$\left(y - \frac{1}{2}\right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \left(x - \frac{1}{2}\right) \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \gamma \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right), \quad 0 \leq x, y \leq 1 \quad (16)$$

方程 (15) 和 (16) 的精确解分别取为  $\varphi = (e^{xRe} - 1)/(e^{Re} - 1)$  和  $\varphi(x, y) = \exp\left[\frac{1}{\gamma}\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right)\right]$ . 计算中均取均匀网格, 取  $Re = 200$ ,  $\gamma = 0.025$ . 表 3 给

出 2-CDS, 4-DPS, 8-DPS 和 12-DPS 计算方程 (15) 的均方根误差  $L_2$  及其精度阶 ( $L_2$  error); 表 4 给出诸格式计算二维方程 (16) 的最大误差  $L_\infty$  和均方根误差  $L_2$ . 表 3 数据说明: 2-CDS, 4-DPS 和 8-DPS 求解常系数对流扩散方程 (15) 均可达到各自的  $L_2$  精度阶. 2-CDS 在粗网格时振荡或发散; 网格再粗 4-DPS 和 8-DPS 均不振荡, 4-DPS 和 8-DPS (9) 的高精度不振荡性质得到进一步数值证实; 应当指出 12-DPS 与 8-DPS 相比难分好坏, 这是因为, 前者比后者多出的级数项  $R_{\Delta x}^8$  和  $R_{\Delta x}^{10}$ , 在计算的所有网格雷诺数  $R_{\Delta x}$  ( $R_{\Delta x} < 1$ ) 范围内, 这两项的贡献很小很小, 因此 12-DPS 的实际精度与 8-DPS 相近. 参见表 3. 2-CDS 在粗网格 (网格数  $N < 200$ ) 下在边界 ( $x = 1.0$ ) 附近产生振荡解, 参见图 2.

表 3 2-CDS, 4-DPS, 8-DPS 和 12-DPS 计算线性对流扩散方程 (15) 的均方误差  $L_2$  error 及其精度阶 (order)Table 3 Mean square root error  $L_2$  and accurate order of 2-CDS, 4-DPS, 8-DPS and 12-DPS solving 1-D linear convective diffusion equation (15)

$N$	2-CDS		4-DPS		8-DPS		12-DPS	
	$L_2$ error	Order	$L_2$ error	Order	$L_2$ error	Order	$L_2$ error	Order
20	—	—	$6.9202 \times 10^{-2}$	1.5100	0.214603	1.224	0.51585	0.1254
40	—	—	$1.5748 \times 10^{-2}$	2.1717	$6.0288 \times 10^{-3}$	5.1897	$1.2761 \times 10^{-3}$	8.6591
80	—	—	$1.7906 \times 10^{-3}$	3.1367	$4.1862 \times 10^{-5}$	7.1701	$3.9799 \times 10^{-5}$	5.0029
160	—	—	$1.2477 \times 10^{-4}$	3.8431	$1.8111 \times 10^{-7}$	7.8526	$1.8054 \times 10^{-7}$	7.7843
320	$1.1886 \times 10^{-3}$	—	$7.6455 \times 10^{-6}$	4.0285	$6.9406 \times 10^{-10}$	8.0276	$6.9392 \times 10^{-10}$	8.0233
640	$2.9035 \times 10^{-4}$	2.0334	$4.7125 \times 10^{-7}$	4.0201	$2.6749 \times 10^{-12}$	8.0195	$2.6746 \times 10^{-12}$	8.0193
1280	$7.2112 \times 10^{-5}$	2.0095	$2.9322 \times 10^{-8}$	4.0064	$1.0328 \times 10^{-14}$	8.0211	$1.0525 \times 10^{-14}$	7.9894

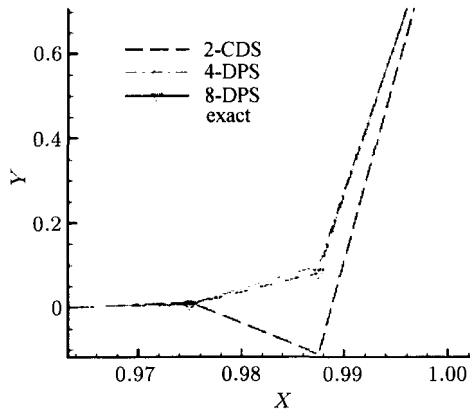


图 2 一维线性对流扩散方程，诸格式在边界  $x = 1.0$  附近的解  
Fig.2 Solutions near boundary  $x = 1.0$  of various schemes solving 1-D linear convective diffusion equation

表 4 的数据表明：计算二维线性变系数对流扩散方程 (16)，网格再粗 4-DPS 和 8-DPS 均不振荡，而 2-CDS 在粗网格时数值振荡；4-DPS 和 8-DPS 在二维情况下的高精度不振荡性质得到数值证明。4-DPS 和 8-DPS 在粗网格 ( $N \times N = 10 \times 10, 20 \times 20$ ) 下的最大误差  $L_\infty$  和均方根误差  $L_2$  比细网格 ( $N \times N = 100 \times 100$ ) 下 2-CDS 的  $L_\infty$  和  $L_2$  误差还小。

表 4 2-CDS, 4-DPS 和 8-DPS 计算二维对流扩散方程的最大误差  $L_\infty$  和均方根  $L_2$  误差

Table 4 Maximum error  $L_\infty$  and mean square root error  $L_2$  of 2-CDS, 4-DPS and 8-DPS solving 2-D convective diffusion equation

$N \times N$	Error	2-CDS	4-DPS	8-DPS
10×10	$L_\infty$	—	0.165 84	$5.354\ 78 \times 10^{-3}$
	$L_2$	—	$5.571\ 23 \times 10^{-1}$	$4.385\ 12 \times 10^{-4}$
20×20	$L_\infty$	—	$7.100\ 12 \times 10^{-1}$	$8.125\ 41 \times 10^{-5}$
	$L_2$	—	$6.321\ 48 \times 10^{-2}$	$7.068\ 37 \times 10^{-6}$
50×50	$L_\infty$	28.294 1	$6.166\ 52 \times 10^{-2}$	$6.671\ 73 \times 10^{-7}$
	$L_2$	2.816 77	$5.892\ 01 \times 10^{-3}$	$6.033\ 54 \times 10^{-8}$
100×100	$L_\infty$	7.234 46	$4.108 \times 10^{-3}$	$2.872\ 18 \times 10^{-9}$
	$L_2$	0.719 067	$3.801\ 51 \times 10^{-4}$	$3.133\ 08 \times 10^{-10}$

## 4 讨论

### 4.1 重构扩散离散格式的意义和用途

上文通过数值摄动重构扩散离散 2 阶中心格式，构建出对流扩散方程的高精度不振荡 3 结点中心差分格式。该法显然不同于构建高精度不振荡格式的常用方法。常用方法提高格式精度需扩充 (增加) 结点或引入结点导数作新的待求量 (紧致方法)；构建不振荡格式则采用人工黏性、通量限制器等调控

数值耗散、数值色散的人工光滑化技术；常用方法中 3 结点不振荡格式的精度不会超过 2 阶，构建高精度本质不振荡格式的有效方法是 ENO 方法，即根据各阶差商绝对值极小的选择原则逐次扩展结点模板的方法。特别也应提到，常用方法都处理和重构对流离散格式，不处理扩散离散格式。本文数值摄动重构扩散离散格式的结果表明：重构扩散格式同样是构建高精度不振荡格式的有效方法，且在 3 结点的条件下，重构扩散格式可获得既是高精度又不振荡的中心差分格式；该法的物理本质是把物理黏性使扩散量分布光滑化的扩散运动规律耦合进 2 阶中心差分格式 (2-CDS)。可以想像，既然调控格式数值耗散的人工光滑化处理可使格式不振荡，那么利用物理耗散本身调控格式的数值耗散和数值色散，同样可使格式不振荡。

### 4.2 重构扩散格式与重构对流格式的关系

作者已通过上、下游分裂双重数值摄动重构对流格式，构建出对流扩散方程的高精度不振荡 3 结点中心差分格式 [12]，简称对流摄动格式 (CPS)，写为

$$\frac{\gamma}{\Delta x^2} \left\{ \left( 1 - \frac{1}{2} R_{\Delta x} G_i^+ \right) \varphi_{i+1} - \left[ 2 - \frac{1}{2} R_{\Delta x} (G_i^+ - G_i^-) \right] \varphi_i + \left( 1 + \frac{1}{2} R_{\Delta x} G_i^- \right) \varphi_{i-1} \right\} = 0 \quad (17)$$

其中  $G_i^-$  和  $G_i^+$  分别是上游和下游数值摄动重构函数，它们都是网格 Reynolds 数  $R_{\Delta x}$  的简单多项式，即

$$G_i^\pm = 1 \mp \frac{1}{6} R_{\Delta x} \pm \frac{1}{360} R_{\Delta x}^3 \mp \frac{1}{3 \times 7!} R_{\Delta x}^5 \pm \frac{3}{5 \times 9!} R_{\Delta x}^7 \mp \frac{5}{3 \times 11!} R_{\Delta x}^9 \quad (18)$$

类似地，扩散摄动重构格式 DPS(9) 亦可写成

$$\frac{\gamma}{\Delta x^2} \left[ \left( G_d - \frac{1}{2} R_{\Delta x} \right) \varphi_{i+1} - 2G_d \varphi_i + \left( G_d + \frac{1}{2} R_{\Delta x} \right) \varphi_{i-1} \right] = 0 \quad (19)$$

通过比较，不难发现

$$\left. \begin{aligned} G_d - \frac{1}{2} R_{\Delta x} &= 1 - \frac{1}{2} R_{\Delta x} G_i^+ \\ G_d + \frac{1}{2} R_{\Delta x} &= 1 + \frac{1}{2} R_{\Delta x} G_i^- \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

$$G_d = 1 - \frac{1}{4} R_{\Delta x} (G_i^+ - G_i^-), \quad G_i^+ + G_i^- = 2 \quad (21)$$

由上述关系式 (17)~(21) 可知, 2 阶中心差分格式 (2-CDS) 的扩散摄动重构格式 (DPS)(9) 或 (19) 与 2-CDS 的对流摄动重构格式 CPS(17) 完全一致. 这就是说, DPS(9) 或 (19) 竟然把下游不影响上游的对流运动规律也“吸收”了进来, 粗看有点奇怪, 其实不论扩散格式摄动重构还是对流格式摄动重构本质上都是扩散格式和对流格式相耦合的摄动重构, 构建 DPS 和 CPS 的所有数学运算都是对方程的摄动重构格式的运算. 因此 DPS“包含”下游不影响上游的对流运动规律, CPS“包含”物理黏性使扩散量分布光滑化扩散运动规律, DPS(9) 或 (19) 与 CPS(17) 完全一致, 应当是必然的结果. DPS 与 CPS 相同的结论, 上面只证明了直到 12 阶精度结论成立, 精度高于 12 阶时结论依然成立, 不过由于高于 12 阶精度的 DPS 缺乏实际价值, 故不再考虑.

#### 4.3 上、下游重构与上、下游分裂及格式的迎风问题

由对流摄动重构格式 CPS(17) 可知, 对流格式的上、下游间断摄动重构, 实际上扩散格式也被作了上、下游间断摄动重构. 由此可以推知, 扩散格式的摄动重构同样可对上游和下游分别进行重构, 此时 2-CDS 的扩散摄动重构格式 (DPS) 应为

$$\frac{u_i}{2\gamma} \Delta x (\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}) = G_d^+ (\varphi_{i+1} - \varphi_i) + G_d^- (\varphi_{i-1} - \varphi_i) \quad (22)$$

$$G_d^\pm = 1 + \sum_{n=1} d_n^\pm \Delta x^n \quad (23)$$

将式 (23) 代入 DPS(22), 把  $\varphi_{i\pm 1}$  对结点  $i$  取 Taylor 展开, 令 DPS(22) 修正微分方程中  $\Delta x^n (n = 1, 2, 3, \dots)$  的系数为 0 即可求出诸系数  $d_n^\pm$ , 因而求得上、下游摄动重构函数  $G_d^-$  和  $G_d^+$ , 发现

$$G_d^+ = G_d^- = G_d \quad (24)$$

可见, 不仅摄动重构对流格式可采用符合对流运动规律的上游和下游分裂重构, 而且对扩散格式同样可进行上游和下游的分裂重构, 证实上、下游分裂是构建高级离散格式的一种有效方法. 在计算流体力学离散格式设计中, 空间分裂是常用的方法, 但上、下游分裂并不多见. 上、下游分裂方法的好处是: 不仅对 3 结点且对多结点 (如 5 结点格式<sup>[13-14]</sup>) 该法均可把下游不影响上游的对流运动规律引入格式之中, 构建成高精度不振荡迎风和中心格式, 参见本文和文献 [13-14]. 应当强调, 常说的多结点迎风

格式, 如 5 结点 3 阶迎风格式, 其实它并非真正迎风, 因为  $\varphi_{i\pm 1}$  同时包含在  $u_i > 0$  和  $u_i < 0$  的格式中, 因此格式具有中心格式特性, 只有  $\varphi_{i+2}$  和  $\varphi_{i-2}$  分别包含在  $u_i > 0$  和  $u_i < 0$  的格式中, 它合理的称呼应是 5 结点偏心格式, 这就是它为条件稳定格式的物理原因. 上述情况说明: 只有对上游和下游格式分别进行摄动重构, 即间断数值摄动重构, 也就是只有上、下游分裂方法, 才能构建出 3 结点和更多结点 (如 5 结点) 高精度不振荡格式, 这是真正的物理意义上的迎风格式. 特别是间断数值摄动重构通过对上游和下游格式修正微分方程的数值运算获得重构格式的高精度不振荡性质, 既不需要也不可能添加人工黏性, 既不需要也不可能使用限制器, 这是间断数值摄动算法比间断伽辽金 (DG) 算法 (该法添加人工黏性或使用限制器) 和 WENO 格式 (该格式使用限制器) 优越的地方; 同时说明上、下游分裂方法是重构 CFD 高精度不振荡格式的一个十分有效的新方法, 值得发展和使用.

#### 4.4 扩散摄动格式 (DPS) 的数值耗散和色散特性

分析 DPS(9) 修正微分方程余项表明: DPS 为耗散格式, 数值色散项为零. 故 DPS 为耗散占优格式, 对 4 阶、8 阶和 12 阶精度 DPS(9), 它们的数值耗散主项为正, 因此它们为绝对稳定格式. 因此说明: 摄动重构扩散格式, 即利用物理耗散可以调控 DPS 的数值耗散和数值色散, “消除掉”数值色散, 并使部分精度阶的数值耗散主项对网格 Reynolds 数  $R_{\Delta x}$  的任意值均为正, 保证了格式高精度不振荡.

## 5 结束语

对于计算流体力学 (CFD) 高精度高分辨率计算格式的构建, 数值摄动算法通过引入对流运动规律或“扩充”扩散运动规律和对数值摄动重构格式本身的数学运算使格式高精度化和不振荡化, 因此是与增加结点, 使用限制器等人为调控数值耗散和数值色散的常见构建方法不同的新型方法. 摄动法与常见方法相比, 优点是格式结构简洁, 使用结点数少; “扩充”扩散运动规律即使用物理耗散的摄动重构格式与引入对流运动规律的上、下游间断摄动重构格式相比, 优点是引入的摄动重构函数成倍减少, 特别是源项的摄动重构函数  $G_f = 1$ .  $G_f = 1$  意味着二维或三维对流扩散方程的扩散摄动重构, 在其进行空间分裂运算时可能引入的未知的交叉作用项. 在二维或三维摄动格式的导出过程中将被消除, 因此

二维或三维对流扩散方程的扩散摄动格式就是 2 个或 3 个一维扩散摄动格式的简单即直接相加, 这无疑也是一个很有用的性质. 此外, 对离散方程的数值摄动重构运算, 不仅能提高格式的精度和稳健度, 且可揭示对流离散运动规律与扩散离散运动规律之间的内在关联; 因此在 Euler 方程和 N-S 方程高精度高分辨率格式的构建中十分有用, 值得进一步研究和发

### 参 考 文 献

- 1 Chung TJ. Computational Fluid Dynamics (2nd edn). Cambridge: Cambridge University Press, 2010
- 2 Laney CB. Computational Gasdynamics. Cambridge: Cambridge University Press, 1998
- 3 Von Neuman J, Richtmyer RD. A method for numerical calculation of hydrodynamic shock. *J Applied Phys*, 1950, 21: 232-257
- 4 Jameson A, Schmidt W, Turkel E. Numerical solutions of Euler equations by finite volume methods using Runge-Kutta time-stepping schemes. AIAA 81-1259, 1981
- 5 Godunov SK. A difference method for the numerical calculation of discontinuous solutions of hydrodynamic equations. *Math Sbornik*, 1959, 47: 271-306
- 6 Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. *J Comput Phys*, 1983, 49: 357-393
- 7 Harten A, Engquist B, Osher S, et al. Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes III. *Jour Comput Phys*, 1987, 71: 231-303
- 8 Liu XD, Osher S, Chan T. Weighted essentially non-oscillatory schemes. *J Comput Phys*, 1994, 115: 200-212
- 9 高智. 对流扩散方程的高精度差分方法. 见: 北京计算流体力学讨论会文集 (第六辑). 中国科学院力学研究所, 1994, 6: 1-23 (Gao Zhi. Higher-order accuracy difference algorithm for the convective diffusion equation. In: Proc. of Beijing Workshop on computation Fluid Dynamics, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, 1994, 6: 1-23 (in Chinese))
- 10 高智. 对流扩散方程的摄动有限体积方法. 见: 第十一届全国计算流体力学会议论文集, 洛阳, 2002. 38-45 (Gao Zhi. Perturbational finite volume method for the convective diffusion equation. In: Proc. of 11th National Conference for Computation Fluid Dynamics. Luoyang, 2002. 38-45 (in Chinese))
- 11 高智. 数值摄动算法及其 CFD 格式. *力学进展*, 2010, 40(6): 607-633 (Gao Zhi. Numerical perturbation algorithm and its CFD schemes. *Advances in Mechanics*, 2010, 40(6): 607-633 (in Chinese))
- 12 高智. 对流扩散方程的绝对稳定高阶三结点中心差分格式. *力学学报*, 2010, 42(5): 811-817 (Gao Zhi. Two absolute stability, higher order central difference schemes for the convective diffusion equation. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2010, 42(5): 811-817 (in Chinese))
- 13 朱可, 李明军. 对流扩散方程 QUICK 格式的数值摄动高精度重构格式. *力学学报*, 2011, 43(1): 55-62 (Zhu Ke, Li Mingjun. Numerical perturbation higher-order accurate reconstruction of QUICK scheme for the convective diffusion equation. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2011, 43(1): 55-62 (in Chinese))
- 14 杨满叶, 舒适, 李明军. 对流扩散方程的三阶迎风格式的数值摄动高精度重构. *水动力学研究与进展, A 辑*, 2010, 25(3): 307-315 (Yang Manye, Zhu Shi, Li Mingjun. Numerical perturbation higher-order accurate reconstruction of third-order upwind difference scheme for the convective diffusion equation. *Jour Hydrodynamics Ser, A*, 2010, 25(3): 307-315 (in Chinese))
- 15 Gao Zhi. Numerical perturbation algorithm and two absolute positive higher-order accurate central finite-volume schemes for the convective diffusion equation. In: Proc. of 8th Asian Computational Fluid Dynamics Conference, HongKong. Jan, 2010

CNKI 优先出版编码: lxxb2011-157-20111124

(责任编辑: 周冬冬)

# HIGHER-ORDER ACCURATE, NON-OSCILLATORY, THREE-NODES CENTRAL DIFFERENCE SCHEME FOR THE CONVECTIVE-DIFFUSION EQUATION CONSTRUCTED BY USING PHYSICAL VISCOSITY<sup>1)</sup>

Gao Zhi<sup>2)</sup>

(*State Key Laboratory of High Temperature Gasdynamics, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China*)

**Abstract** Several higher-order accurate, non-oscillatory, three-nodes central difference schemes for the convective-diffusion equation are given by perturbationally reconstructing the diffusion scheme in the second-order accurate central difference scheme(2-CDS). Excellent properties of higher-order accurate and high resolution of the present new schemes (diffusion perturbation schemes, DPS) are verified by theoretical analyses and three numerical tests which include one-dimensional linear and non-linear and two-dimensional convective-diffusion equations. In all numerical tests, the 2-CDS oscillates and diverges on coarse grids, while part of DPS do not oscillates and can capture discontinuities with high resolution. The mean square root  $L_2$  errors of all DPS are greatly less than those of 2-CDS in all numerical tests. The DPS are the results of introducing diffusion-motion law(i.e. physical viscosity smoothing out space-distribution of diffusion quantities) into 2-CDS. The present method is obviously different from the well-known those of constructing high-order accurate and high resolution schemes. In addition, we prove that DPS are completely consistent with those schemes of introducing convection-motion law(i.e. law of that the downstream does not affect the upstream) into 2-CDS, to show that the perturbational operation to 2-CDS not only raises the scheme's accurate and stability but also reveals intrinsic relation between the convective discrete scheme and diffusion discrete scheme, and that the upstream-downstream splitting is a very useful method for reconstructing high-order accurate, high resolution CFD scheme without artificial viscosity or limiter.

**Key words** computational fluid dynamics, numerical perturbation algorithm, high-order accurate and non-oscillatory scheme, convection-diffusion equation

---

Received 7 June 2011, revised 7 November 2011.

1) The project was supported by the National Natural Science Foundation of China (10872204).

2) E-mail: gaozhi@imech.ac.cn