

载流圆板的磁弹性随机振动*

RANDOM VIBRATION OF A CURRENT CARRYING CIRCULAR PLATE IN MAGNETIC FIELD

王平^{**1 2} 李晓靓¹ 白象忠¹

(1. 燕山大学 建筑工程与力学学院, 秦皇岛 066004)

(2. 中国科学院力学研究所 国家非线性力学重点实验室 (LNM), 北京 100080)

WANG Ping^{**1 2} LI XiaoJing¹ BAI XiangZhong¹

(1. College of Civil Engineering and Mechanics, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China)

(2. State Key Laboratory of Nonlinear Continuum Mechanics (LNM), Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

摘要 分析载流圆板在磁场中的磁弹性随机振动问题。根据薄板、薄壳体的磁弹性运动方程和连续体的随机振动理论, 导出在磁场环境中圆板的磁弹性随机振动方程。对磁场中的载流圆板进行随机响应分析, 得到圆板位移响应的自相关函数、功率谱密度函数及均值函数等数字特征。通过具体算例, 对处于外加磁场中通入平稳随机电流的导电圆板, 计算其位移响应的功率谱密度函数。

关键词 随机振动 圆板 磁弹性 功率谱密度函数

中图分类号 O324 O441.4

Abstract The magnetic-elastic random vibration problem of a current-carrying circular plate in a magnetic field is studied. Based on the magneto-elastic theory and the random vibration theory of a continue system with distributed parameters, the magneto-elastic random vibration equation of a current carrying circular plate in a magnetic field was derived. The stochastic response analysis of the circular plate in a magnetic field was finished. The auto-correlation function, power spectral density function and the mean function of the random displacement response of the circular plate in a magnetic field were obtained. In a specific example, the power spectral density function of the displacement response of the circular plate with stationary random current was calculated.

Key words Random vibration; Circular plate; Magneto-elasticity; Power spectral density function

Corresponding author: WANG Ping, E-mail: wangpin0721@sina.com, wangpin0721@163.com, Tel: +86-335-8057101

The project supported by the National Natural Science Foundation of China (No. 50875230).

Manuscript received 20100705, in revised form 20120312.

引言

随机振动理论的应用十分广泛^[1]。从 20 世纪 50 年代初, 随机振动理论与方法在火箭和航空领域内开始得到应用。20 世纪 50 年代后, 才开始应用于土木、机械等工程领域。至今随机振动已经成为现代应用力学中的一个重要分支, 且在随机激励作用下的随机振动响应分析、非线性随机参数振动系统的可靠性灵敏度分析、非线性结构平稳随机过程数值仿真分析与随机振动实验等一系列的动力学问题中取得一定的研究成果^[2-6]。近二、三十年来, 随着高新科学技术的发展, 在航天、航空、化工、原子及核工业装置的防护系统等

实际应用领域, 强电磁场环境中应用的结构元件越来越多, 其随机振动响应的强度、方差等随机数字特征的分析具有非常重要的意义。国内外许多学者对磁弹性非线性振动理论进行研究, 取得一些成果。如 Hasanyan D J 等^[7-8] 给出理想导体板在磁场中非线性振动的数学模型, 并研究有限导电板条在磁场中的非线性振动问题。文献 [9] 研究传导薄板在磁场环境中的非线性磁弹性振动问题, 给出磁场中薄板的磁弹性耦合运动方程, 得到电磁力和电磁力矩的表达式。文献 [10] 对导电薄板在磁场中的磁弹性亚谐波共振及稳定性问题进行研究。

综上所述, 对于处在电磁场和变形场耦合场作用

* 20100705 收到初稿, 20120312 收到修改稿。国家自然科学基金 (50875230)、河北省自然科学基金 (A2012203140)、国家非线性力学重点实验室 (LNM) 开放课题基金资助。

**王平, 男, 1965 年 1 月生, 吉林省四平市人, 汉族。副教授, 博士, 研究方向为磁弹性理论及其应用。

下构件的随机振动研究还不多见。本文根据薄板、薄壳体的磁弹性运动方程和连续体的随机振动理论, 导出在电磁场环境中圆板的磁弹性随机振动方程, 给出载流圆板在耦合场中的洛伦兹力及力矩表达式, 并将洛伦兹力的一部分假设为板的一种阻尼, 另一部分假设为随机分布载荷, 对薄板的挠度响应进行分析。最后以夹支圆形薄板为例, 得到外加磁场中通入随机电流的该圆形薄板的挠度响应的自相关函数、功率谱密度函数及均值函数等数字特征。

1 圆板的磁弹性随机振动方程

如图 1 所示, 建立柱坐标系 (r, θ, z) , 给出在电磁场环境下的圆形薄板, 半径为 R , 外加磁场的磁感应强度为 $B = (B_r, 0, 0)$, $J_{\theta cl}$ 为环向电流, 外加横向随机载荷为 $P_z(t)$, 其中 t 为施加载荷的时间。由轴对称性质可知, 圆形薄板的几何量和物理量均与 θ 无关。根据轴对称情况圆板的运动方程和磁弹性运动方程, 略去自重及转动惯性力的作用, 根据板的弯曲振动理论和磁弹性运动方程理论, 可得到磁场中的振动方程^{[11][18]}

$$\frac{\partial^2(rM_r)}{\partial r^2} - \frac{\partial M_\theta}{\partial r} - \frac{\partial(rN_r, \theta)}{\partial r} + \frac{\partial(rL_r)}{\partial r} + r(P_z + F_z) = r\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2(rM_r)}{\partial r^2} - \frac{\partial(rN_r)}{\partial r} - N_\theta + rF_r = 0 \quad (2)$$

式中, $N_r, N_\theta, M_r, M_\theta$ 为相应方向上的内力和弯矩, P_z 为外加横向随机载荷, F_r, F_z 分别为径向和法向电磁力, L_r 为电磁力矩, ρ 为材料密度, h 为板厚度, w 为垂直圆板中面的 z 方向挠度响应。略去热效应及位移电流的影响, 且假设材料为非极化、非磁化的良导体, 根据文献 [11]^[18] [12], 电磁力及力矩为

$$\begin{cases} F_z = -\sigma h B_r \left(e_\theta + B_r \frac{\partial w}{\partial t} \right) - h B_r J_{\theta cl} \\ F_r = 0 \quad L_r = 0 \end{cases} \quad (3)$$

式中, e_θ 为感应电场在 θ 方向上的分量, $J_{\theta cl}$ 为环向电流, B_r 为径向磁感应强度, σ 为材料的电导率。

弹性关系及几何关系

$$\begin{cases} M_r = D_M (k_r + \mu k_\theta) & M_\theta = D_M (k_\theta + \mu k_r) \\ k_r = -\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} & k_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \end{cases} \quad (4)$$

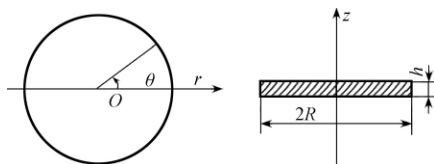


图 1 磁场中的圆板

Fig. 1 A circular plate in magnetic field

式中, D_M 为薄板的弯曲刚度, μ 为材料的泊松比, k_r, k_θ 分别为圆板的径向及环向的体力分量。

将式 (3)、式 (4) 代入式 (1)、式 (2), 不考虑感应电场强度和外部介质的黏性阻尼, 只考虑圆板的线性阻尼, 并假设横向随机载荷 $P_z(t)$ 不存在, 最终得到电磁场中圆板的磁弹性随机振动方程为

$$D_M \nabla^4 w(r, t) + \rho h \frac{\partial^2 w(r, t)}{\partial t^2} + C_1 \frac{\partial w(r, t)}{\partial t} + \sigma h B_r^2 \frac{\partial w(r, t)}{\partial t} = -h B_r J_{\theta cl}(t) \quad (5)$$

式中, $w(r, t)$ 表示板的横向振动位移, C_1 是板内线阻尼系数, 算子 ∇^4 为重调和算子, 定义为

$$\begin{aligned} \nabla^4 &= \nabla^2 \nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) = \\ &= \frac{\partial^4}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3}{\partial r^3} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \end{aligned}$$

2 圆板的随机位移响应分析

2.1 通入随机电流为非平稳随机过程时圆板的位移响应

现将方程 (3) 中 $\sigma h B_r^2 \frac{\partial w(r, t)}{\partial t}$ 假设为圆板的一种阻尼, $-h B_r J_{\theta cl}(t)$ 假设为随机分布载荷 $P(r, t)$, 当通入非平稳随机电流时, 可得到随机分布载荷的均值和相关函数^[13]

$$\begin{cases} U_p(r, t) = -h B_r U_{J_{\theta cl}}(t) \\ \Phi_p(r_1, r_2; t_1, t_2) = h^2 B_r^2 \Phi_{J_{\theta cl}}(t_1, t_2) \end{cases} \quad (6)$$

式中, t_1, t_2 为加载过程中的任意两个时刻; $U_p(r, t)$ 表示随机分布载荷 $P(r, t)$ 的均值, $U_{J_{\theta cl}}(t)$ 表示随机电流 $J_{\theta cl}(t)$ 的均值; $\Phi_{J_{\theta cl}}(t_1, t_2)$ 表示随机电流 $J_{\theta cl}(t)$ 的自相关函数, 此时的随机分布力在空间分布上不相关, 而在时间分布上为非平稳的情形。

利用模态分析法, 方程 (5) 的位移响应可以表示为^[14]

$$w(r, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(r) Y_i(t) \quad (7)$$

其中, $Y_i(t)$ 是与第 i 阶主振型对应的模态响应, $\varphi_i(r)$ 表示圆板的第 i 阶固有振型函数。

模态函数的正交条件

$$2\pi \int_0^R \rho h \varphi_i(r) \varphi_k(r) r dr = m \delta_{ik} \quad (8)$$

考虑各阶模态函数应满足的条件

$$\iint_{\Omega} D_M [\nabla^4 \varphi_i(r)] \varphi_j(r) r dr d\theta = \omega_i^2 \delta_{ij} \quad (9)$$

式 (8)、式 (9) 中, $\varphi_k(r), \varphi_j(r)$ 分别表示圆板的第 k, j 阶固有振型函数, m 为圆板的总质量, $m = \pi \rho h R^2$; δ_{ik}, δ_{ij} 为 Kronecher δ 数。

将式(7)代入方程(5)中,在方程两端同时乘以振型函数 $\varphi_i(r)$,然后对 r 从零积分到 R ,并利用式(8)和式(9),可得模态响应 $Y_i(t)$ 的常微分方程组

$$\ddot{Y}_i(t) + 2\zeta_i\omega_i\dot{Y}_i(t) + \omega_i^2 Y_i(t) = G_i(t) \quad (10)$$

$i = 1, 2, 3, \dots$

式中, $\ddot{Y}_i(t)$ 为加速度响应; $\dot{Y}_i(t)$ 为速度响应; ζ_i 为第 i 阶振型阻尼比; ω_i 为第 i 阶的固有频率; $G_i(t)$ 为模态激励,可表示为

$$G_i(t) = \frac{-2\pi h B_r J_{\theta_{cl}}(t)}{m} \int_0^R \varphi_i(r) r dr \quad (11)$$

而模态阻尼为

$$2\zeta_i\omega_i = \frac{\sigma h B_r^2 + C_1}{\rho h} \quad (12)$$

假定系统的初始条件为零,方程(10)的解可以表示为

$$Y_i(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_i(t-\tau) \eta_i(\tau) d\tau \quad (13)$$

式中, τ 为时间坐标的移动值,且 $\tau = t_2 - t_1$ 。 $\eta_i(t)$ 为模态脉冲响应函数,有

$$\eta_i(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} H_i(\omega) \exp(-j\omega t) d\omega \quad (14)$$

式中 $j^2 = -1$ 。

相应的模态频率响应函数为

$$H_i(\omega) = \frac{1}{[(\omega_i^2 - \omega^2) + j2\zeta_i\omega_i\omega]} \quad (15)$$

由式(7)、式(13),可得圆板的横向随机位移响应为

$$w(r,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(r) \int_{-\infty}^{+\infty} G_i(t-\tau) h_i(\tau) d\tau \quad (16)$$

位移响应的均值为

$$U_w(r,t) = E[w(r,t)] = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(r) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^R \frac{-2\pi h B_r}{m} \varphi_i(v) \times U_{J_{\theta_{cl}}}(t) \eta_i(\tau) v dv d\tau \quad (17)$$

式中, v 为引进的积分变量。

位移响应的相关函数为

$$\begin{aligned} \Phi_w(t_1, t_2, r) &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_i(r) \varphi_j(r) E \left[\int_{-\infty}^{+\infty} G_i(t_1 - \tau_1) \times \right. \\ &\quad \left. \eta_i(\tau_1) d\tau_1 \int_{-\infty}^{+\infty} G_j(t_2 - \tau_2) \eta_j(\tau_2) d\tau_2 \right] = \\ &\quad \left(\frac{2\pi h B_r}{m} \right)^2 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_i(r) \varphi_j(r) \times \\ &\quad \left[r \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^R \int_0^R \eta_i(\tau_1) \eta_j(\tau_2) \varphi_i(v_1) \varphi_j(v_2) \times \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\left. R_{J_{\theta_{cl}}}(t_1 - \tau_1, t_2 - \tau_2) v_1 v_2 dv_1 dv_2 d\tau_1 d\tau_2 \right] = \\ &\quad \left(\frac{2\pi h B_r}{m} \right)^2 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_i(r) \varphi_j(r) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^R \int_0^R H_i(\omega_1) \times \\ &\quad H_j(-\omega_2) \varphi_i(v_1) \varphi_j(v_2) S_{J_{\theta_{cl}}}(\omega_1, \omega_2) \times \\ &\quad \exp[j(\omega_1 t_1 - \omega_2 t_2)] v_1 v_2 dv_1 dv_2 d\omega_1 d\omega_2 \quad (18) \end{aligned}$$

式中, v_1, v_2 为引进的积分变量, τ_1 为时间坐标 t_1 的移动值, τ_2 为时间坐标 t_2 的移动值。

2.2 通入随机电流为平稳随机过程时圆板的位移响应

当通入平稳随机电流时,由前面假设可知,此时的随机分布载荷是平稳随机函数。在空间分步上同样是不相关的,而在时间分布上是平稳的。其相关函数就仅仅是时间坐标的移动值 τ 和径向坐标的函数 $\Phi_p(\tau, r_1, r_2) = h^2 B_r^2 \Phi_{J_{\theta_{cl}}}(\tau)$,功率谱密度是 $S_p(\omega, r_1, r_2) = h^2 B_r^2 S_{J_{\theta_{cl}}}(\omega)$,式中 r_1, r_2 为任意两点的径向坐标。此时,位移响应的均值为

$$\begin{aligned} U_w(r,t) &= E[w(r,t)] = \\ &\quad \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(r) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^R \frac{-2\pi h B_r}{m} \varphi_i(v) \times \\ &\quad U_{J_{\theta_{cl}}}(t) \eta_i(\tau) v dv d\tau \quad (19) \end{aligned}$$

位移响应的相关函数为

$$\begin{aligned} \Phi_w(\tau, r) &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_i(r) \varphi_j(r) E \left[\int_{-\infty}^{+\infty} G_i(t_1 - \theta_1) \times \right. \\ &\quad \left. \eta_i(\theta_1) d\theta_1 \int_{-\infty}^{+\infty} G_j(t_2 - \theta_2) \eta_j(\theta_2) d\theta_2 \right] = \\ &\quad \left(\frac{2\pi h B_r}{m} \right)^2 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_i(r) \varphi_j(r) \times \\ &\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^R \int_0^R h_i(\theta_1) h_j(\theta_2) \varphi_i(v_1) \varphi_j(v_2) \times \\ &\quad R_{J_{\theta_{cl}}}(\tau - \theta_1, \theta_2) v_1 v_2 dv_1 dv_2 d\theta_1 d\theta_2 = \\ &\quad \left(\frac{2\pi h B_r}{m} \right)^2 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_i(r) \varphi_j(r) \times \\ &\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^R \int_0^R [H_i(\omega)]^2 \varphi_i(v_1) \varphi_j(v_2) S_{J_{\theta_{cl}}}(\omega) \times \\ &\quad \exp(j\omega\tau) v_1 v_2 dv_1 dv_2 d\omega \quad (20) \end{aligned}$$

位移响应的功率谱密度函数为

$$\begin{aligned} S_w(\omega, r) &= \left(\frac{2\pi h B_r}{m} \right)^2 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_i(r) \varphi_j(r) \times \\ &\quad \int_0^R \int_0^R |H_i(\omega)|^2 \varphi_i(v_1) \varphi_j(v_2) \times \\ &\quad S_{J_{\theta_{cl}}}(\omega) v_1 v_2 dv_1 dv_2 \quad (21) \end{aligned}$$

若假设通入的随机电流是零均值平稳白噪声的情形,此时可得位移响应的功率谱密度函数为

$$S_w(\omega, r) = S_0 \left(\frac{2\pi h B_r}{m} \right)^2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^4 \left(\int_0^R \varphi_i(x) \varphi_j(x) r dr\right)}{(\omega_i^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta_i \omega_i \omega)^2} =$$

$$S_0 \left(\frac{2hB_r}{m} \right)^2 \left(\frac{m}{2\pi\rho h} \right) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)^4}{(\omega_i^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta_i \omega_i \omega)^2} \quad (22)$$

式中, S_0 为当平稳随机干扰是白噪声时的谱密度, ω_i 为第 i 阶固有振动频率。

3 算例

取一圆板, 在 $r = R$ 处夹支, $r = R = 0.4 \text{ m}$, 厚度 $h = 3 \times 10^{-3} \text{ m}$, 材料的弹性模量 $E = 70 \text{ GPa}$, 泊松比 $\mu = 0.3$, 密度 $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$, 简约内阻尼系数 $C_1 = 0.04$ 。

圆板所处的电磁场的特征参数 $\mathbf{B}(B_r, 0, 0)$, $B_r = 0.01 \text{ T}$, 电导率 $\sigma = 3.63 \times 10^7 \text{ } \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$, 考虑外加电流为平稳随机电流, 且为理想白噪声, 则其电流密度分量 $J_{\theta \text{cl}}(t)$ 的功率谱密度为一常数, $S_{J_{\theta \text{cl}}}(\omega) = 4 \times 10^{12} (\text{A/m}^2)^2 / \text{Hz}$ 。此时的激励为平稳随机激励。只考虑圆板的第一阶固有振型, 即

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \varphi_i(r) = \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)^2 \\ \omega_1 = \frac{10.22}{R^2} \sqrt{\frac{D}{m}} = 198 \text{ rad/s} \end{cases} \quad (23)$$

将式(23)、式(20)和以上参数以及 $r = R/2$ 分别代入式(22), 即可得到圆板上该点的功率谱密度为

$$S_w \left(\frac{R}{2}, \omega \right) = \frac{2hB_r^2 S_0}{m\rho\pi} \frac{\left(1 - \frac{1}{4} \right)^4}{(\omega_1^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta_1 \omega_1 \omega)^2}$$

利用 Matlab 语言编制程序, 可画出圆板上该点的功率谱密度函数图形, 如图 2、图 3、图 4。

功率谱密度反映随机过程统计参量均方值在频率域上的分布, 即在各个频率域上振动能量的概率分布。这样即可以从功率谱密度中得出具有不同固有频率的振动激励所蕴含的振动能量的平均密度, 从而避免或改进振动激励, 以降低振动的发生或减小振动的破坏。

在假设横向随机载荷 $P_z(t)$ 不存在的情况下, 由于磁场中的圆板通以随机电流, 会产生随机变化的洛

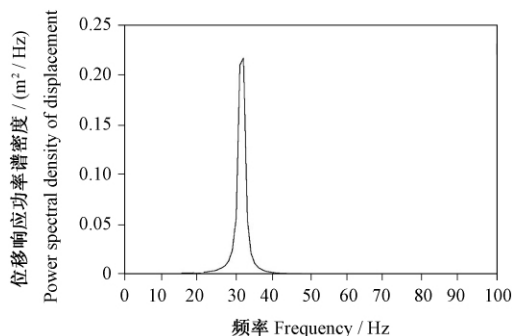


图 2 圆板上 $r = R/2$ 处的位移功率谱密度图

Fig. 2 The power spectral density map of displacement at $r = R/2$ on the circular plate

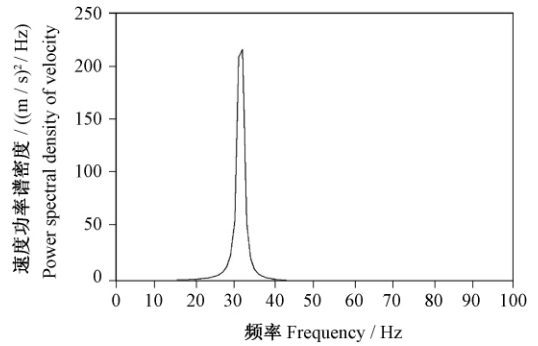


图 3 圆板上 $r = R/2$ 处的速度功率谱密度图

Fig. 3 The power spectral density map of velocity at $r = R/2$ on the circular plate

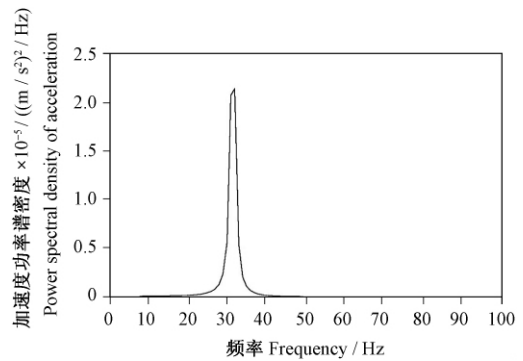


图 4 圆板上 $r = R/2$ 处的加速度功率谱密度图

Fig. 4 The power spectral density map of acceleration at $r = R/2$ on the circular plate

伦兹力, 该洛伦兹力即可视为作用在板上的随机激励, 将会引起板的随机振动。从图 2、图 3、图 4 中可看出, 该点的位移功率谱密度图、速度功率谱密度图和加速度功率谱密度图都陡然成峰, 故该随机振动是一个窄带随机过程, 振动能量的概率分布近似高斯分布。这意味着, 仅在集中于对应峰值频率附近的一个窄频带中, 功率谱密度有值得注意的数值。

从图 2、图 3、图 4 中可看出频率在 $20 \text{ Hz} \sim 40 \text{ Hz}$ 这个范围内, 振动能量达到最大值。图 2 所示的功率谱密度曲线下构成的面积是频率范围内的位移均方值; 图 3 所示的功率谱密度曲线下构成的面积是频率范围内的速度均方值; 图 4 所示的功率谱密度曲线下构成的面积是频率范围内加速度均方值。

4 结论

1) 根据薄板、薄壳体的磁弹性运动方程和连续体的随机振动理论, 导出在电磁场环境中载流圆板的磁弹性随机振动方程; 并导出通入平稳随机电流时圆板随机振动的相关数字特征。

2) 针对通入随机电流为平稳随机电流的情况, 通过具体算例对磁场中的载流圆板进行随机响应分析,

得到圆板上相应位置的位移功率谱密度图、速度功率谱密度图及加速度功率谱密度图。功率谱密度函数从频域方面描述振动的统计特性,反映出振动能量对频率的分布规律。通过改变通入薄板随机电流的功率谱密度函数可用来改变振动能量对频率的分布律。

3) 本文所得到结果可在减振降噪研究以及对结构系统的监测与故障诊断等实际问题中,起到一定的参考作用。

参考文献 (References)

- [1] 李杰,陈建兵. 随机振动理论与应用新进展[M]. 上海: 同济大学出版社, 2009: 1-5.
LI Jie, CHEN JianBing. The new development of random vibration theory and its application [M]. Shanghai: Press of Tongji University, 2009: 1-5(In Chinese).
- [2] Kargarnovin M H, Mehri B, Younesian D. Response of a suspended cable to Narrow-Band random excitation with peaked P. S. D. [J]. Mathematical and Computer Modeling, 2005(41): 1203-1212.
- [3] 张军, 谯勇, 张志谊, 华宏星. 卫星随机试验的振动响应分析[J]. 机械强度, 2006, 28(1): 016-019.
ZHANG Jun, CHEN Yong, ZHANG ZhiYi, HUA HongXing. Research on the random vibration test of the satellite [J]. Journal of Mechanical Strength, 2006, 28(1): 016-019(In Chinese).
- [4] 张义民, 刘巧伶, 闻邦椿. 单自由度非线性随机参数振动系统的可靠性灵敏度分析[J]. 固体力学学报, 2003, 24(1): 61-67.
ZHANG YiMin, LIU QiaoLing, WEN BangChun. Reliability sensitivity analysis of single degree-of-freedom nonlinear vibration systems with random parameters [J]. Acta Mechanica Sinica, 2003, 24(1): 61-67(In Chinese).
- [5] 陈颖, 王东升, 朱长春, 张思箭. 刚度不确定性结构在基础随机激励下的振动响应谱分析[J]. 振动与冲击, 2004, 23(3): 87-90.
CHEN Ying, WANG DongSheng, ZHU ChangChun, ZHANG SiJian. Vibration response spectrum analysis of structures with uncertain stiffness under random base excitation [J]. Journal of Vibration and Shock, 2004, 23(3): 87-90(In Chinese).
- [6] 缪莹莹, 陈小安. 非线性结构平稳随机过程数值仿真分析[J]. 机械强度, 2008, 30(4): 523-528.
MIAO YingYun, CHEN XiaoAn. Numerical simulation analysis of stationary random vibrations on nonlinear structure [J]. Journal of Mechanical Strength, 2008, 30(4): 523-528(In Chinese).
- [7] Hasanyan D J, Khachatryan G M, Piliposyan G T. Mathematical modeling and investigation of nonlinear vibration of perfectly conductive plates in an inclined magnetic field [J]. Thin-Walled Structures, 2001, 39(1): 111-123.
- [8] Hasanyan, Davresh, Librescu, Liviu. Nonlinear vibration of finitely electro-conductive plate-strips in a magnetic field [C]// Collection of Technical Papers-AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference. New York: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2003, 4: 2827-2837.
- [9] 胡宇达. 传导薄板的非线性磁弹性振动问题[J]. 工程力学, 2001, 18(4): 89-94.
HU YuDa. Magneto-elastic nonlinear vibration of a thin conductive plate [J]. Engineering Mechanics, 2001, 18(4): 89-94(In Chinese).
- [10] Hu Yuda, Li Jing. The magneto-elastic subharmonic resonance of current-conducting thin plate in magnetic filed [J]. Journal of Sound and Vibration, 2009, 319(3-5): 1107-1120.
- [11] 白象忠, 田振国. 板壳磁弹性力学基础[M]. 北京: 科学出版社, 2006: 181-182.
BAI XiangZhong, TIAN ZhenGuo. Fundamental magneto-elasticity theory of plate and shells [M]. Beijing: Sciences Press, 2006: 181-182(In Chinese).
- [12] 何启智. 电动力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1985: 55-60.
HE QiZhi. Electrodynamics [M]. Beijing: Press of Higher Education, 1985: 55-60(In Chinese).
- [13] 胡津亚, 曾三元. 现代随机振动[M]. 北京: 中国铁道出版社, 1989: 82-85.
HU JinYa, ZENG SanYuan. Modern random vibration [M]. Beijing: China Railway Press, 1989: 82-85(In Chinese).
- [14] 欧进萍, 王光远. 结构随机振动[M]. 北京: 高等教育出版社, 1998: 167-168.
OU JinPing, WANG GuangYuan. Structural random vibration [M]. Beijing: Press of Higher Education, 1998: 167-168(In Chinese).