

有限变形条件下的本构理论与屈服面演化等效性质

刘芳^{1,2} 陈岑¹ 梁乃刚¹ 孔祥韶²

1. 中国科学院力学研究所非线性力学国家重点实验室, 北京, 100190

2. 武汉理工大学交通学院, 武汉, 430063

摘要 根据材料微观物理变形机制,建立了多晶材料有限变形条件下的弹塑性损伤本构理论。研究了两种加工硬化铝合金材料在单轴拉伸、纯扭转和拉扭组合比例/非比例加载下后继屈服面和弹性常数的演化。基于滑移构元的硬化规律和包氏效应对后继屈服面在比例和非比例加载下的演化规律进行了解释,给出了不同加载路径下后继屈服面之间的等效性质。理论分析为模拟结果与实验结果的误差来源分析提供了依据。

关键词 屈服面演化,各向异性,有限变形,等效性质,构元组集模型

1 引言

随着塑性力学在金属板材成型等材料加工技术中的应用,人们迫切需要了解材料在有限变形条件下的塑性变形行为。屈服面及其演化是对材料塑性变形状态的全面描述,也是对理论模型预测材料塑性变形行为能力的一种全面考查。预测材料的力学性质需要确定材料的屈服面及其演化。大量文献从实验^[1-33]和理论分析^[34-55]两方面对屈服面演化进行了研究。

在屈服面及其演化的实验中,后继屈服面的膨胀或缩小、移动、畸变和旋转与加载路径、探针路径、预应变(应力)的大小、实验材料以及屈服的定义是紧密相关的。在比例加载情况下,屈服面的演化规律比较一致。从实验研究^[1-3,15]中给出的比例加载下的屈服面演化结果,可总结出以下规律:(1)后继屈服面整体发生了移动。(2)后继屈服面的前端凸出,尾部缩进,表现出明显的包氏效应,呈现“前凸后扁”的特征。(3)垂直于加载方向的横向尺寸基本不变,没有明显的交叉效应。非比例加载情况下,后继屈服面会出现旋转,另外,特征也变得复杂,没有一致的规律。另外,在20世纪,一些学者研究了从小变形到有限变形下的屈服面演化^[11,12,21,22,24-27,29,30]。最近,Khan及其合作者对有限变形下的屈服面演化进行了系统的实验研究^[31-33],给出了两种铝合金材料(低加工硬化铝合金 Al 6061-T6511 和高加工硬化铝合金 annealed 1100 Al)在单轴拉伸、纯扭转和拉扭组合比例加载下以及高加工硬化铝合金 annealed 1100 Al 在拉扭组合非比例加载下的屈服面演化。

屈服面演化的实验研究结果表明后继屈服面发生了明显的畸变。经典理论中的等向、随动以及混合硬化模型均无法解释后继屈服面的畸变。最新的研究表明,材料的应力应变行

为和破坏对屈服函数的微小变化非常敏感,一个先进的模型应该能够描述屈服面的畸变^[56]。因此,能否精确描述材料的屈服面及其演化过程是对理论模型预测材料塑性变形行为能力的一种全面考查。

许多学者在屈服面演化模型方面进行了理论分析研究^[34-53]。在比例加载方面,Chiang等人采用分布单元模型(Distributed-element model)^[43]、Yeh和Lin采用内时理论模型(endochronic model)^[51]以及Feigenbaum和Dafalias利用基于热力学框架的各向异性塑性模型^[54, 55]对Wu和Yeh给出的304不锈钢在单轴拉伸加载下的屈服面演化的实验结果^[15]进行了理论分析。这些模型都能反映比例加载情况下后继屈服面在移动过程中“前凸后扁”的变形特征,但是由于无法考虑加载路径改变或者缺乏塑性变形的历史信息,均无法处理非比例加载问题。在非比例加载方面,Francois通过改进经典弹塑性本构模型,考虑了屈服面的畸变特征,研究了非比例加载下的屈服面演化^[42]。Suprun提出了一种包含三个塑性常数的本构模型,计算了先拉伸后扭转加载情况下的后继屈服面演化结果^[50]。上述理论模型均限制在小变形的研究范围。Wu对有限变形条件下,不同加载路径对后继屈服面的影响进行了研究^[47]。由于模型中只包含各向同性硬化,因此该模型无法描述后继屈服面的畸变。

可以看出,屈服面演化模型大多数局限于小变形的研究范围,且难以处理非比例加载问题及描述有限变形条件下屈服面演化过程中的畸变特征。在此背景下,付强等人利用构元组集模型对屈服面演化规律进行了研究^[57],模拟了Wu和Yeh给出的304不锈钢在三种比例加载下的屈服面演化的实验结果^[15]。Liu等人利用构元组集模型对有限变形条件下的屈服面演化规律进行了系统的研究^[58],模拟了Khan等人对有限变形下两种铝合金材料在单轴拉伸、纯扭转和拉扭组合比例/非比例加载下的屈服面演化^[31-33],分析了屈服面演化的各向异性特征。然而,对单轴拉伸、纯扭转和拉扭组合比例加载这三种比例加载路径下屈服面演化之间的等效关系没有进行系统的分析。本文将研究比例加载下屈服面演化的等效性质,试图给模拟结果与试验结果的差别来源提供依据。

本文先介绍构元组集模型及其对屈服面演化的预测,在此基础上,研究比例加载下屈服面演化的等效特征。

2 构元组集模型的弹塑性损伤本构关系

对于晶体材料,认为变形分为两步。首先,从初始构形开始,沿着滑移系发生一系列简单剪切变形。这一步的变形梯度称为塑性变形梯度 F^p ,由滑移引起的塑性变形使材料发生变形和旋转,但是不影响晶格结构。接着这个过程的是晶格变形,这个过程的变形梯度称为弹性变形梯度 F^e ,材料和晶格在 F^e 下发生变形和旋转,如图1所示。因此,变形梯度 F 可以分解为

$$F = F^e \cdot F^p \quad (1)$$

更复杂的分解形式见Voyiadjis和Park^[59]以及Brünig^[60]等人的工作,其中,引入中间无损构形以进一步区分弹性变形和损伤变形。

基于对泛函势和Cauchy-Born准则,将原子键按方向分组,同一方向上的原子键抽象为一个弹簧束构元;原子嵌入作用抽象为体积构元。由这两种构元描述了材料的弹性损伤

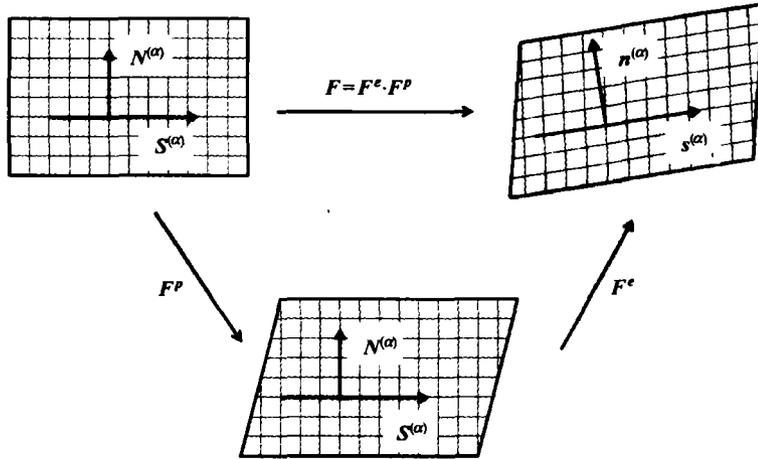


图1 弹塑性变形分解示意图

本构关系^[58]。材料的弹性损伤刚度张量为

$$C_{ijkl} = \sum_{s=1}^n \left(f'(\lambda) - 2f(\lambda) \right) e^{-4\lambda} n_i n_j n_k n_l + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n f(\lambda) e^{-2\lambda} (n_j n_l \delta_{ik} + n_i n_k \delta_{jl} + n_j n_k \delta_{il} + n_i n_l \delta_{jk}) + p'(\theta) \delta_{ij} \delta_{kl} \quad (2)$$

其中, λ 为弹簧束构元的变形, $f(\lambda)$ 为弹簧束构元上的力, n_i 为弹簧束构元方向矢量在 i 方向上的方向余弦, θ 为体积构元的变形, $p(\theta)$ 为体积构元上的力。

根据塑性变形的滑移机制, 抽象出滑移构元的概念, 对于单晶体, 滑移构元等同于滑移系; 对于多晶体, 滑移构元是大量取向随机分布的晶粒内部的滑移系按取向的分组, 它描述了不同晶粒内部具有相同运动学特点的滑移系的宏观平均性质。基于滑移构元来描述材料的塑性变形响应与晶体滑移理论类似^[61]。材料的弹塑性损伤本构关系可表述为

$$\overset{\vee}{\boldsymbol{\tau}} = \left(\mathbf{C}^e - \sum_{\alpha=1}^m \sum_{\beta=1}^m (g_{\alpha\beta})^{-1} \boldsymbol{\lambda}^{(\alpha)} \otimes \boldsymbol{\lambda}^{(\beta)} \right) : \mathbf{D} = \mathbf{C}^{epd} : \mathbf{D} \quad (3)$$

其中, $\overset{\vee}{\boldsymbol{\tau}}$ 为 Kirchhoff 应力的 Jaumann 导数, $\boldsymbol{\lambda}^{(\alpha)} = \mathbf{P}^{(\alpha)} : \mathbf{C}^e + \mathbf{Q}^{(\alpha)} \cdot \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{Q}^{(\alpha)}$, $\mathbf{P}^{(\alpha)}$ 和 $\mathbf{Q}^{(\alpha)}$ 分别为第 α 个滑移构元的对称和反对称张量, 表述为 $\mathbf{P}^{(\alpha)} = \frac{1}{2} (\mathbf{s}^{(\alpha)} \otimes \mathbf{n}^{(\alpha)} + \mathbf{n}^{(\alpha)} \otimes \mathbf{s}^{(\alpha)})$, $\mathbf{Q}^{(\alpha)} = \frac{1}{2} (\mathbf{s}^{(\alpha)} \otimes \mathbf{n}^{(\alpha)} - \mathbf{n}^{(\alpha)} \otimes \mathbf{s}^{(\alpha)})$ 。 $g_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} + \boldsymbol{\lambda}^{(\alpha)} : \mathbf{P}^{(\beta)}$, 其中 $h_{\alpha\beta}$ 为硬化模量。 \mathbf{D} 为变形率张量。式中求和符号只对开动的滑移构元求和。 \mathbf{C}^{epd} 是材料的弹塑性损伤刚度张量, 其表达式为

$$\mathbf{C}^{epd} = \mathbf{C}^e - \sum_{\alpha=1}^m \sum_{\beta=1}^m (g_{\alpha\beta})^{-1} \boldsymbol{\lambda}^{(\alpha)} \otimes \boldsymbol{\lambda}^{(\beta)} \quad (4)$$

其中, 弹性损伤刚度张量 \mathbf{C}^e 的分量由式(2)确定。

总之, 弹簧束构元和体积构元描述了材料的弹性损伤本构关系, 共同承担应力。在相同的应力状态下, 滑移构元产生相应的塑性变形。因此, 塑性变形是附加的变形, 不影响

应力状态。材料的力学响应通过组集三种构元的力学响应得到。由这三种构元组集而成的模型描述了材料在有限变形条件下的弹塑性损伤本构关系，称为构元组集模型。

3 屈服面演化

构元组集模型可以用来描述屈服面的演化。理论上，本模型可以描述任意六维应力空间内的屈服面演化。限于当前文献中屈服面演化的实验都在二维空间，且大多数实验在正应力—剪应力空间讨论，因此，模型只考虑正应力—剪应力空间内的屈服面演化。

在单晶体中，滑移系的数目是固定的，如面心立方金属有 12 个滑移系，体心立方金属有 12 个（可能为 48 种）滑移系，密排六方金属有 3 个滑移系。但是本模型中滑移构元的数目可以是任意的，取决于计算精度。在本文中，采用了 30 个独立的滑移构元，分布在第一和第二象限，如图 2 所示。值得说明的是，滑移构元可以沿正反两个方向滑动，计作一个滑移构元。

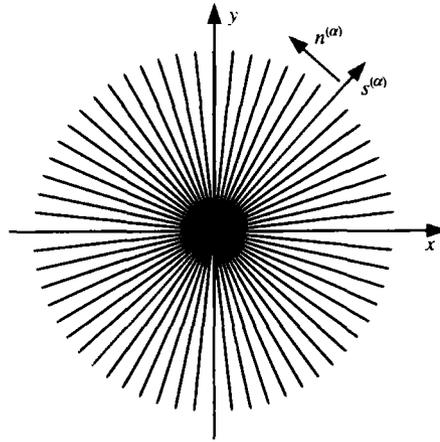


图 2 平面离散构元的滑移方向和法向

模型中，屈服的定义采用比例极限。当某一滑移构元的分解剪切应力达到其临界值时，滑移构元开动，材料屈服。对于第 α 个滑移构元，其屈服条件为

$$f^{(\alpha)} = \tau^{(\alpha)} - \tau_{\pm cr}^{(\alpha)} = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{P}^{(\alpha)} - \tau_{\pm cr}^{(\alpha)} = 0 \quad (5)$$

其中， $\tau^{(\alpha)}$ 和 $\tau_{\pm cr}^{(\alpha)}$ 分别为第 α 个滑移构元的分解剪切应力和临界正负分解剪切应力。

在正应力—剪应力空间，式(5)可写为

$$\tau_{11} P_{11}^{(\alpha)} + 2\tau_{12} P_{12}^{(\alpha)} = \tau_{\pm cr}^{(\alpha)} \quad (6)$$

需要说明的是，实验中屈服面一般在 Cauchy 应力空间确定，屈服条件可写为

$$\sigma_{11} P_{11}^{(\alpha)} + 2\sigma_{12} P_{12}^{(\alpha)} = \frac{1}{J} \tau_{\pm cr}^{(\alpha)} \quad (7)$$

考虑到有塑性变形的情况下，弹性变形相对于总变形来说一般都很小，Cauchy 应力与 Kirchhoff 应力非常接近，式(7)可近似写为

$$\sigma_{11} P_{11}^{(\alpha)} + 2\sigma_{12} P_{12}^{(\alpha)} = \tau_{\pm cr}^{(\alpha)} \quad (8)$$

由式(8)得到屈服面的示意图如图3所示。从图3可以看出,第 α 个滑移构元的两个状态变量(正负临界分解剪切应力 $\tau_{+cr}^{(\alpha)}$ 和 $\tau_{-cr}^{(\alpha)}$)确定了两条临界线。遍历所有的滑移构元,得到一组临界线,而屈服面就是这些临界线所形成的内包络面。因此,一旦得到各滑移构元的正负临界分解剪切应力值,屈服面就能确定。

在本文中,对于临界分解剪切应力的演化,主要考虑了硬化规律和包氏效应的影响。主动方向上的临界分解剪切应力随硬化规律变化,被动方向上的临界分解剪切应力随包氏效应变化^[58]。

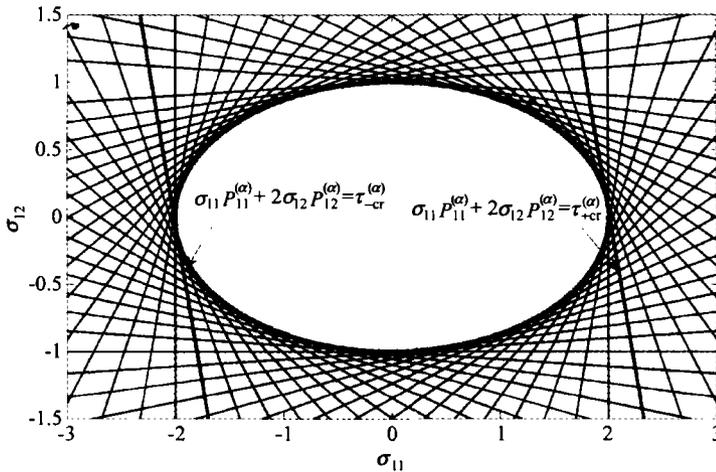
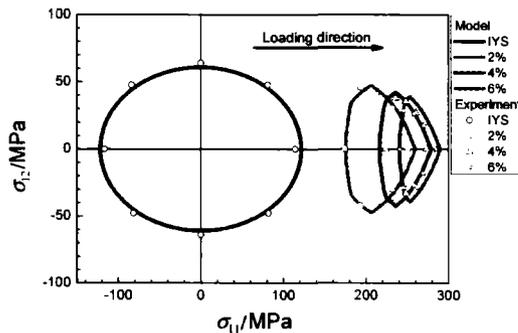


图3 由临界线内包络面得到屈服面的示意图

4 算例

文献[58]利用本模型模拟了两种加工硬化铝合金材料(低加工硬化铝合金材料 Al 6061-T6511 和高加工硬化铝合金材料 annealed 1100 Al)在单轴拉伸、纯扭转和拉扭组合比例/非比例加载下的屈服面演化。模拟得到的低加工硬化铝合金材料在三种比例加载情况下的屈服面演化如图4所示。



(a) 单轴拉伸

图4 构元组集模型模拟得到的屈服面演化及与试验结果的比较

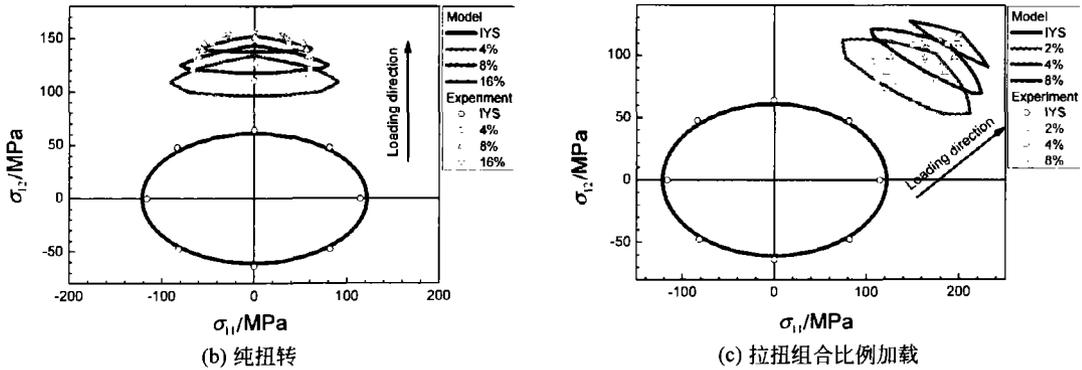


图 4 (续)

从图 4 可以看出，模型能模拟两种铝合金材料在三种比例加载下后继屈服面前凸后扁的变形特征。从模型的角度可以解释为：屈服面的前端由于潜在硬化的影响而呈现尖角，而尾部由于包氏效应的影响而缩进。因此，后继屈服面呈现出一个尖的前端和一个钝的尾部，或者称为“鼻形”。

5 屈服面的等效

在图 4 的屈服面演化结果中，利用单轴拉伸的结果标定材料参数，预测了纯扭转和拉扭组合比例加载下的屈服面演化结果。预测得到的屈服面与实验结果存在一定的差别。下面将通过研究比例加载下的后继屈服面之间的等效性质来分析差别的原因，为理论预测提供指导。

由于屈服面演化过程中的各向异性，一般情况下，有着相同加载点但是经历不同加载路径得到的屈服面是不同的。但是，理论上来说，若经过方向转换后，不同加载方式对应着实际上相同的加载路径，那么，得到的屈服面经过相应的方向转换后也是重合的。

对于比例加载路径上的任一应力状态，可以将它转化到主应力空间的相应应力状态。而且，若不考虑静水压力对于材料塑性行为的影响，任意比例加载均可以转化为单轴拉伸情况。从而，可研究任意比例加载下的屈服面演化与单轴拉伸情况下的屈服面演化之间的等效关系。

对于比例加载路径上的某一加载点 (σ_0, τ_0) ，它的两个主应力是

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_0}{2} + \sqrt{\frac{\sigma_0^2}{4} + \tau_0^2}, \quad \sigma_2 = \frac{\sigma_0}{2} - \sqrt{\frac{\sigma_0^2}{4} + \tau_0^2} \quad (9)$$

若不考虑静水压力对塑性变形的影响，上面的应力状态可以通过减去大小为 σ_2 的静水压力而转化为单轴拉伸的应力状态。等效的单轴拉伸应力为

$$\sigma'_1 = 2\sqrt{\frac{\sigma_0^2}{4} + \tau_0^2} \quad (10)$$

对于加载点 (σ_0, τ_0) ，所对应的屈服面上的点记为 $(\sigma_{11}, \sigma_{12})$ 。若将两个主方向设为新的应力轴，原来屈服面上的点 $(\sigma_{11}, \sigma_{12})$ 转化为新的屈服点 $(\sigma'_{11}, \sigma'_{22})$ ，转换关系为

$$\begin{cases} \sigma'_{11} = \sigma_{11} \cos^2 \theta + \sigma_{12} \sin 2\theta \\ \sigma'_{12} = -\frac{1}{2} \sigma_{11} \sin 2\theta + \sigma_{12} \cos 2\theta \\ \sigma'_{22} = \sigma_{11} \sin^2 \theta - \sigma_{12} \sin 2\theta \end{cases} \quad (11)$$

其中 θ 是第一主应力相对于原来 σ_{11} 轴的角。

类似地, 上述应力状态中需要减去大小为 σ'_{22} 的静水压力, 新的屈服面由新的屈服点 $(\tilde{\sigma}'_{11}, \tilde{\sigma}'_{12})$ 得到, 其与原来屈服点 $(\sigma_{11}, \sigma_{12})$ 之间的转换关系为

$$\begin{cases} \tilde{\sigma}'_{11} = \sigma_{11} \cos 2\theta + 2\sigma_{12} \sin 2\theta \\ \tilde{\sigma}'_{12} = -\frac{1}{2} \sigma_{11} \sin 2\theta + \sigma_{12} \cos 2\theta \end{cases} \quad (12)$$

根据上式, 即可得到任意比例加载下的屈服面转换到等效单轴拉伸情况下的屈服面。

在本模型中, 对于滑移方向为 α 的滑移构元, 其相应的二阶张量 $\mathbf{P}^{(\alpha)}$ 初始的分量形式为

$$P_{11}^{(\alpha)} = -\frac{1}{2} \sin 2\alpha, \quad P_{22}^{(\alpha)} = \frac{1}{2} \sin 2\alpha \quad (13)$$

由于出现塑性变形后, 弹性变形在总变形中占的比例较小, 可以不考虑。若不考虑弹性变形对于滑移构元方向改变的影响, 即张量 $\mathbf{P}^{(\alpha)}$ 不变, 此时, 在静水压力作用下, α 方向上滑移构元临界分解剪切应力为

$$\tau^{(\alpha)} = \sigma_{11} P_{11}^{(\alpha)} + \sigma_{22} P_{22}^{(\alpha)} = 0 \quad (14)$$

即任一滑移构元上分解剪切应力均为零。因此, 静水压力不产生塑性变形的假设对于本模型是成立的。从而, 任一比例加载可以转化为一个等效的单轴拉伸加载, 而在任意比例加载下得到的屈服面也可以相应转化为等效单轴拉伸加载下的屈服面。而且, 转化后的屈服面与直接单轴拉伸得到的屈服面是完全重合的。

实验中, 不同比例加载下得到的屈服面经过转化后也应该存在关系。下面通过 Khan^[31, 32] 以及 Wu 和 Yeh^[15] 在三种比例加载下得到的屈服面比较来说明上述等效关系。

5.1 Khan 的实验结果

对于实验中的三种比例加载路径下得到的屈服面, 根据式(12)也可以将它们转化为单轴拉伸情况下的屈服面并进行对比。根据 Khan^[31, 32] 给出的两种铝合金材料的后继屈服面演化结果, 根据式(12)等效转换后的比较结果分别如图 5(a)和(b)所示。

实验中, 三种比例加载下得到的后继屈服面之间存在差别可归结于以下几个方面:

- (1) 材料的各向异性。
- (2) 试件之间的差异。
- (3) 对于实际材料, 静水压力不产生塑性变形的假设并不成立。
- (4) 不可避免的实验误差。

利用本模型得到的三种比例加载下的后继屈服面经过转化后能完全重合。因此, 实验得到三种加载方式下屈服面的差异可以解释模拟结果与预测结果之间存在差别的原因。若单轴拉伸情况下模型模拟结果和实验结果之间吻合得很好, 那么, 在纯剪切和拉扭组合比

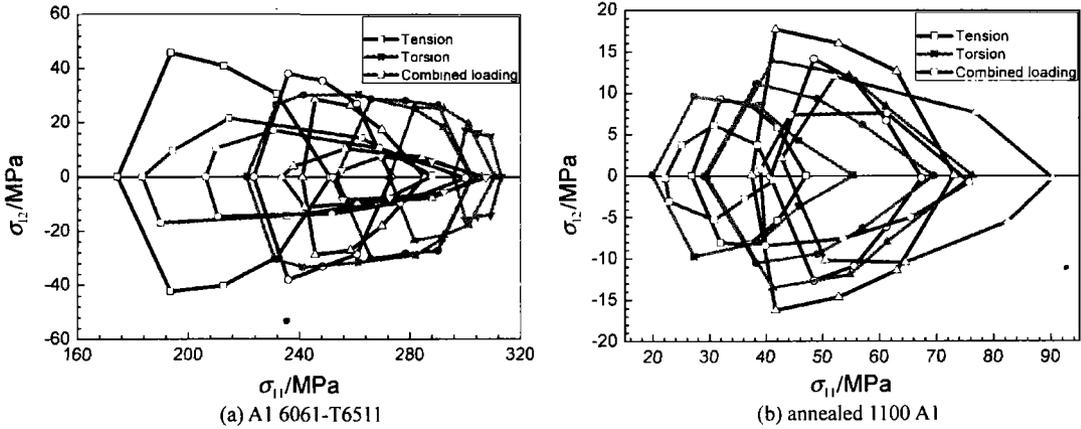


图5 三种比例加载路径下后继屈服面的比较

例加载下预测结果和实验结果之间的差别与实验中纯扭转和拉扭组合比例加载转化后的屈服面与单轴拉伸的屈服面之间的差别是一致的。

从图 4(b)中可以看出, 纯扭转加载下得到的屈服面经过转换后比单轴拉伸情况下得到的屈服面后端移动的距离小, 那么, 采用拉伸情况下模拟得到的包氏效应系数来预测纯扭转的屈服面时, 包氏效应系数较大, 屈服面尾部移动的距离比实验中屈服面尾部移动的距离大, 如图 4(b)所示。

从图 4(c)中可以看出, 拉扭组合比例加载下得到的屈服面经过转换后比单轴拉伸情况下得到的屈服面小, 那么, 采用拉伸情况下模拟得到的各向同性硬化系数来预测纯扭转的屈服面时, 各向同性硬化系数较大, 预测的屈服面比实验中得到的屈服面大, 如图 4(c)所示。

5.2 Wu 和 Yeh 的实验结果

Wu 和 Yeh 的实验^[15]中给出了三根 annealed 304 不锈钢试件分别在单轴拉伸、纯扭转及拉扭组合比例加载/卸载下的屈服面。根据式(12)将它们转化为单轴拉伸情况下的屈服面并进行对比。加载及卸载阶段的比较结果分别如图 6 和图 7 所示。从图 6 和图 7 中可以看出, 三种比例加载下得到的屈服面在转化后能基本重合。这也说明所提出的等效规律是合理的。

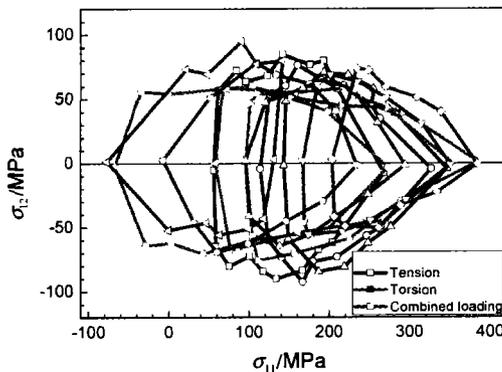


图6 三种比例加载路径下后继屈服面的比较 (加载阶段)

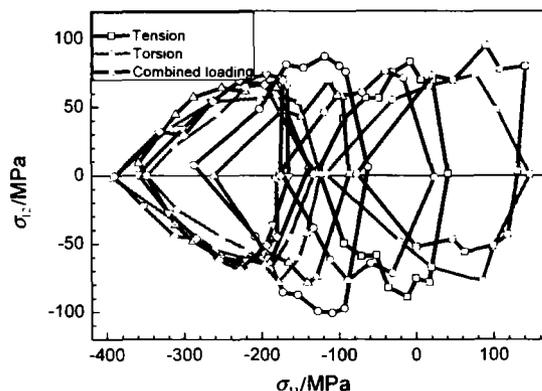


图7 三种比例加载路径下后继屈服面的比较（卸载阶段）

6 总结

在构元组集模型中，只要给定滑移构元的屈服条件及临界分解剪应力值等状态变量的演化方程，就可以计算出屈服面。基于滑移构元的硬化规律和包氏效应，描述了屈服面演化过程中的移动、畸变、膨胀/收缩。探讨了屈服面的演化规律，对于比例加载，在静水压力不影响塑性变形行为的情况下，所有加载路径下的屈服面均可以转换为同一种加载方式下的屈服面进行比较。理论预测得到的屈服面在转换后是重合的，那么，实验结果在转化后的差别为模拟结果和试验结果的比较提供了误差来源分析的依据。

参考文献

1. Naghdi P M, Essengurg F, and Koff W. An experimental study of initial and subsequent yield surfaces in plasticity. *Journal of Applied Mechanics*, 1958, 25(2): 201~209
2. Ivey H J. Plastic stress-strain relations and yield surfaces for aluminium alloys. *Journal of Mechanical Engineering Science*, 1961. 3(1): 15~31
3. Bertsch P K, and Findley W N. An experimental study of subsequent yield surface-corners, normality, Bauschinger and allied effects. *Proceedings of the Fourth U.S. National Congress of Applied Mechanics.*, 1962: 893~907
4. Hsu T C. Definition of the yield point in plasticity and its effect on the shape of the yield locus. *Journal of Strain Analysis*, 1966. 1(4)
5. Phillips A, Liu C S, and Justusson J W. An experimental investigation of yield surfaces at elevated temperatures. *Acta Mechanica*, 1972, 14(2): 119~146
6. Phillips A, and Tang J L. The effect of loading path on the yield surface at elevated temperatures. *International Journal of Solids Structures*, 1972, 8: 463~474
7. Phillips A, Tang J L, and Ricciuti M. Some new observations on yield surfaces. *Acta Mechanica*, 1974, 20(1-2): 23~39
8. Phillips A, and Ricciuti M. Fundamental experiments in plasticity and creep of aluminum-extension of previous results. *International Journal of Solids and Structures*, 1976, 12(3): 159~171
9. Phillips A, and Moon H. An experimental investigation concerning yield surfaces and loading surfaces. *Acta*

- Mechanica, 1977, 27(1-4): 91~102
10. Phillips A, and Lee C W. Yield surfaces and loading surfaces. experiments and recommendations. *International Journal of Solids Structures*, 1979, 15: 715~729
 11. Moreton D N, Moffat D G, and Parkinson D B. The yield surface behavior of pressure-vessel steels. *Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, 1981, 16(2): 127~136
 12. Ascione L, Olivito R, and Spadea G. An experimental study on subsequent yield surfaces for metals. *Materials and Structures*, 1982, 15(1): 21~26
 13. Phillips A, and Lu W Y. An experimental investigation of yield surfaces and loading surfaces of pure aluminum with stress-controlled and strain-controlled paths of loading. *Journal of Engineering Materials and Technology-Transactions of the ASME*, 1984, 106(4): 349~354
 14. Phillips A, and Das P K. Yield surfaces and loading surfaces of aluminum and brass: An experimental investigation at room and elevated temperatures. *International Journal of Plasticity*, 1985, 1(1): 89~109
 15. Wu H C, and Yeh W C. On the experimental determination of yield surfaces and some results of annealed 304 stainless steel. *International Journal of Plasticity*, 1991, 7(8): 803~826
 16. Ishikawa H. Subsequent yield surface probed from its current center. *International Journal of Plasticity*, 1997, 13(6-7): 533~549
 17. Gil C M, Lissenden C J, and Lerch B A. Yield of inconel 718 by axial-torsional loading at temperatures up to 649 degrees C. *Journal of Testing and Evaluation*, 1999, 27(5): 327~336
 18. Brown A A, Casey J, and Nikkel D J. Experiments conducted in the context of the strain-space formulation of plasticity. *International Journal of Plasticity*, 2003, 19(11): 1965~2005
 19. Iadicola M A, Foecke T, and Banovic S W. Experimental observations of evolving yield loci in biaxially strained AA5754-O. *International Journal of Plasticity*, 2008, 24(11): 2084~2101
 20. Kuwabara T, and Horiuchi Y. Determining Subsequent Yield Surface of Pure Titanium Sheet by Use of Abrupt Strain Path Change. *International Journal of Material Forming*, 2008, 1(0): 237~240
 21. Mair W M, and Pugh H L D. Effect of pre-strain on yield surfaces in copper. *Journal of Mechanical Engineering Science*, 1964, 6(2)
 22. Williams J, and Svensson N. Effect of tensile prestrain on the yield locus of 1100-f aluminium. *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, 1970, 5(2): 128~139
 23. Hecker S S. Yield surfaces in prestrained aluminum and copper. *Metallurgical Transactions*, 1971, 2(8)
 24. Williams J, and Svensson N. Effect of torsional prestrain on the yield locus of 1100-F aluminium. *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, 1971, 6(4): 263~272
 25. Shiratori E, Ikegami K, and Kaneko K. The Influence of the Bauschinger Effect on the Subsequent Yield Condition. *Bulletin of JSME*, 1973, 16(100): 1482~1493
 26. Tozawa Y. Plastic deformation behavior under conditions of combined stress, in *Mechanics of Sheet Metal Forming*, D.P. Koistinen and N.-M. Wang, Editors. 1978, Plenum Press: New York London
 27. Stout M G, et al. Multiaxial yield behavior of 1100 aluminum following various magnitudes of prestrain. *International Journal of Plasticity*, 1985, 1(2): 163~174
 28. Helling D E, Miller A K, and Stout M G. An experimental investigation of the yield loci of 1100-0 aluminum, 70:30 brass, and an overaged 2024 aluminum alloy after various prestrains. *Journal of Engineering Materials and Technology-Transactions of the ASME*, 1986, 108: 313~320
 29. Khan A S, and Wang X W. On non-proportional infinitesimal plastic-deformation after finite plastic prestraining and partial unloading. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1988, 36(5): 519~535
 30. Khan A S, and Wang X W. An experimental study on subsequent yield surface after finite shear prestraining.

- International Journal of Plasticity, 1993, 9(8): 889~905
31. Khan A S, et al. Evolution of subsequent yield surfaces and elastic constants with finite plastic deformation. Part-I: A very low work hardening aluminum alloy (Al6061-T6511). International Journal of Plasticity, 2009, 25(9): 1611~1625
 32. Khan A S, Pandey A, and Stoughton T. Evolution of subsequent yield surfaces and elastic constants with finite plastic deformation. Part II: A very high work hardening aluminum alloy (annealed 1100 Al). International Journal of Plasticity, 2010, 26(10): 1421~1431
 33. Khan A S, Pandey A, and Stoughton T. Evolution of subsequent yield surfaces and elastic constants with finite plastic deformation. Part III: Yield surface in tension-tension stress space (Al 6061-T 6511 and annealed 1100 Al). International Journal of Plasticity, 2010, 26(10): 1432~1441
 34. Eisenberg M A, and Yeh C F. The anisotropic deformation of yield surfaces. Journal of Engineering Materials and Technology-Transactions of the ASME, 1984, 106: 355~360
 35. Rees D W A. An examination of yield surface distortion and translation. Acta Mechanica, 1984, 52(1-2): 15~40
 36. Helling D, and Miller A. The incorporation of yield surface distortion into a unified constitutive model, part 1: Equation development. Acta Mechanica, 1987, 69(1): 9~23
 37. Helling D, and Miller A. The incorporation of yield surface distortion into a unified constitutive model, part 2: Predictive capabilities. Acta Mechanica, 1988, 72(1): 39~53
 38. Gupta N K, and Meyers A. Considerations of translated stress deviators in describing yield surfaces. International Journal of Plasticity, 1992, 8(6): 729~740
 39. Wegener K, and Schlegel M. Suitability of yield functions for the approximation of subsequent yield surfaces. International Journal of Plasticity, 1996, 12(9): 1151~1177
 40. Kowalsky U, Ahrens H, and Dinkler D. Distorted yield surfaces - modelling by higher order anisotropic hardening tensors. Computational Materials Science, 1999, 16(1-4): 81~88
 41. Kalidindi S R, and Schoenfeld S E. On the prediction of yield surfaces by the crystal plasticity models for fcc polycrystals. Materials Science and Engineering a-Structural Materials Properties Microstructure and Processing, 2000, 293(1-2): 120~129
 42. Francois M. A plasticity model with yield surface distortion for non proportional loading. International Journal of Plasticity, 2001, 17(5): 703~717
 43. Chiang D Y, Su K H, and Liao C H. A study on subsequent yield surface based on the distributed-element model. International Journal of Plasticity, 2002, 18(1): 51~70
 44. Mollica F, and Srinivasa A R. A general framework for generating convex yield surfaces for anisotropic metals. Acta Mechanica, 2002, 154(1-4): 61~84
 45. Wu H C. Anisotropic plasticity for sheet metals using the concept of combined isotropic-kinematic hardening. International Journal of Plasticity, 2002, 18(12): 1661~1682
 46. Wu H C. On finite plastic deformation of anisotropic metallic materials. International Journal of Plasticity, 2003, 19(1): 91~119
 47. Wu H C. Effect of loading-path on the evolution of yield surface for anisotropic metals subjected to large pre-strain. International Journal of Plasticity, 2003, 19(10): 1773~1800
 48. Zattarin P, Lipinski P, and Rosochowski A. Numerical study of the influence of microstructure on subsequent yield surfaces of polycrystalline materials. International Journal of Mechanical Sciences, 2004, 46(9): 1377~1398
 49. Sai K, Cailletaud G, and Forest S. Micro-mechanical modeling of the inelastic behavior of directionally solidified materials. Mechanics of Materials, 2006, 38(3): 203~217

50. Suprun A N. A constitutive model with three plastic constants: The description of anisotropic workhardening. *International Journal of Plasticity*, 2006, 22(7): 1217~1233
51. Yeh W C, and Lin H Y. An endochronic model of yield surface accounting for deformation induced anisotropy. *International Journal of Plasticity*, 2006, 22(1): 16~38
52. Demiray S, Becker W, and Hohe J. Numerical determination of initial and subsequent yield surfaces of open-celled model foams. *International Journal of Solids and Structures*, 2007, 44(7-8): 2093~2108
53. Schurig M, Bertram A, and Petryk H. Micromechanical analysis of the development of a yield vertex in polycrystal plasticity. *Acta Mechanica*, 2007, 194(1-4): 141~158
54. Feigenbaum H P, and Dafalias Y F. Directional distortional hardening in metal plasticity within thermodynamics. *International Journal of Solids and Structures*, 2007, 44(22-23): 7526~7542
55. Feigenbaum H P, and Dafalias Y F. Simple model for directional distortional hardening in metal plasticity within thermodynamics. *Journal of Engineering Mechanics*, 2008, 134(9): 730~738
56. Rousselier G, Barlat F, and Yoon J W. A novel approach for anisotropic hardening modeling. Part I: Theory and its application to finite element analysis of deep drawing. *International Journal of Plasticity*, 2009, 25(12): 2383~2409
57. 付强. 一种基于物理机制的后续屈服面演化模型. *力学学报*, 2010, 42(5): 880~888
58. Liu F, et al. An elasto-plastic damage constitutive theory and its prediction of evolution of subsequent yield surfaces and elastic constants. *International Journal of Plasticity*, 2011, 27(9): 1355~1383
59. Voyiadjis G Z, and Park T. The kinematics of damage for finite-strain elasto-plastic solids. *International Journal of Engineering Science*, 1999, 37(7): 803~830
60. Brünig M. An anisotropic ductile damage model based on irreversible thermodynamics. *International Journal of Plasticity*, 2003, 19(10): 1679~1713
61. Asaro R J. Micromechanics of Crystals and Polycrystals. *Advances in Applied Mechanics*, 1983, 23: 1~115