

屈服面演化与基于物理机制建立塑性本构理论方法的探讨

梁乃刚¹ 刘芳^{1,2} 陈岑¹

1. 中国科学院力学研究所非线性力学国家重点实验室, 北京 100190

2. 武汉理工大学交通学院, 武汉, 430063

摘要 介绍了屈服面及其演化方面的实验结果和理论模型; 总结了塑性力学所面临的挑战; 重点探讨了屈服面演化中的畸变、尖点、包氏效应和正负交叉效应等特征及应对想法。介绍了基于物理机制建立塑性本构模型来研究屈服面及其演化规律的方法。

关键词 屈服面演化, 畸变, 非比例加载, 各向异性, 尖角, 包氏效应

1 引言

固体材料或结构在其服役过程中一般会经历弹性、塑性、损伤到破坏的变形阶段。在超出弹性变形范围的复杂变形条件下, 变形通常会诱发材料的各向异性以及对变形历史的依赖性^[1, 2], 对于唯象模型来说描述这些现象是困难的。另一方面, 材料的变形虽然复杂多样, 但其力学行为取决于它的微结构性质^[3-5]。因此, 包含了材料微结构信息的微观物理模型得到广泛应用^[6-8]。基于微观力学的物理模型有利于深入了解材料的微观力学行为, 但是微结构和变形机制的复杂性限制了其应用。描述材料力学响应的治本之道在于建立基于微观物理机制的本构模型。

建立本构模型后, 需要对其有效性和适用范围进行验证。关于屈服面演化的实验数据很丰富, 为理论模型的检验提供了素材。屈服面及其演化在经典塑性理论中有着至关重要的地位, 经典塑性理论认为存在屈服面, 且塑性应变率的方向始终垂直于屈服面, 屈服面位置及形状的确定直接影响着塑性应变的预测。因此, 屈服面及其演化是对材料力学状态的全面描述, 经典塑性理论依赖于屈服面及其演化。另外, 材料的应力应变行为和破坏对屈服函数的微小变化非常敏感, 一个先进的模型应该能够准确地描述屈服面的畸变^[9]。因此, 能否精确描述材料的屈服面及其演化过程是对理论模型预测材料塑性变形行为能力的一种全面考查。大量文献从实验^[10-43]和理论分析^[44-65]两方面对屈服面演化进行了研究。

对于初始屈服面, Tresca 屈服准则、von Mises 屈服准则和双剪理论已经得到了广泛的认可^[66]。而对于后继屈服面的演化, 大量实验^[10-12, 14-16, 18, 19, 22-24, 27, 37, 39, 40, 43]显示, 它们不仅会膨胀、移动, 同时也会发生变形(distortion)。在屈服面及其演化的实验研究方面, 研究者针对材料的屈服准则及硬化规律进行了大量的实验研究^[10-42]。实验中, 后继屈服面的膨胀或缩小、移动、畸变和旋转与加载路径、探针路径、预应变(应力)的大小、实验材料

以及屈服的定义是紧密相关的。其中,屈服点的定义是主要影响因素之一。一些学者对不同屈服定义方法下的后继屈服面进行了研究^[13, 31, 33, 39]。一般认为,屈服的定义有三种方法:(1)比例极限法(proportional limit method),考虑到实验中无法取到精确的比例极限,通常取较小的偏移应变(offset strain)代替,如 $10\mu\epsilon$ 。对于这种屈服定义方法,后继屈服面一般发生移动和畸变,趋向于随动硬化;(2)回推屈服点法(Load backward extrapolation method),该方法与取较大的偏移应变,如0.2%是等效的。对于这种屈服定义方法,后继屈服面一般会变大,几乎可忽略的移动以及很小的畸变,即趋向于等向强化;(3)采用的偏移应变介于上述两者之间,如 $10\sim 1000\mu\epsilon$,后继屈服面会同时出现膨胀、移动和畸变等特征,趋向于等向——随动组合强化。

目前,随着实验技术的发展,第一种屈服定义方法逐渐被很多研究者接受。因为,采用小偏移应变来定义屈服点,一方面可以较真实的反映材料从弹性进入塑性屈服;另一方面,只需用一根试件即可测得当前加载路径下的所有后继屈服面^[40]。

2009年,国际塑性力学主编Khan发表了一系列文章^[40-42],给出了两种加工硬化铝合金材料在有限塑性变形条件下后继屈服面和弹性常数的演化,加载方式分为单轴拉伸、纯扭转和拉扭组合比例/非比例加载,实验中屈服面发生了畸变。经典塑性理论显然无法合理地解释这一现象,而一些高级的塑性理论模型由于其局限性,也无法对复杂加载条件下的屈服面演化做出合理的预测。

下面分实验结果、理论模型对屈服面演化的现状进行介绍,然后对塑性力学的几个关键问题进行探讨。接着介绍了构元组集模型,为屈服面演化的预测提供了一个新的途径。最后对本文进行了总结。

2 实验研究

关于材料在比例加载下的后继屈服面及其演化方面,Naghi等人对24ST-4铝合金薄壁管在预施纯扭转下的后继屈服面演化进行了研究^[10];Ivey研究了19S铝合金薄壁管试件在不同预施纯扭转塑性变形情况下的后继屈服面演化^[11];Bertsch和Findley对6061-T6铝薄壁管试件在单轴拉伸下的后继屈服面进行了精确的试验^[12]。

值得一提的是,Wu和Yeh系统地研究了annealed AISI type 304不锈钢分别在单轴拉伸、纯扭转和拉-扭组合比例加载、卸载(反向加载)以及循环加载下的屈服面演化^[24]。采用的屈服定义是偏移应变 $5\mu\epsilon$ 。实验结果表明材料更趋向于随动硬化而不是各向同性硬化。后继屈服面发生了移动和畸变。后继屈服面的前端凸出,尾部缩进,呈现“前凸后扁”的特征。当反向加载时,原来的尾部成为前端,而原来的前端变成尾部。同时,从后继屈服面的尾部可以观察到非常明显的包氏效应影响,但交叉效应(屈服面垂直于加载方向的横向尺寸的变化)几乎可以忽略。

这是一组比较有代表性的结果,许多理论模型针对此试验结果进行了模拟,如Chiang等人采用分布单元模型(Distributed-element model)^[53]、Yeh和Lin采用内时理论模型(endochronic model)^[61]、Feigenbaum和Dafalias利用基于热力学框架的各向异性塑性模型^[64, 65]以及付强等人采用构元组集模型^[67]都进行了模拟。

对于比例加载路径,屈服面的演化规律比较一致。从文献中的实验结果,可总结出以下规律:(1)后继屈服面发生了移动,屈服面后端表现出明显的包氏效应。(2)后继屈服面的前端凸出,尾部缩进,呈现“前凸后扁”的特征。(3)垂直于加载方向的横向尺寸基本不变,没有明显的交叉效应。

对于非比例加载下的后继屈服面研究, Bertsch 和 Findley 对 6061-T6 铝薄壁管试件在多种复杂加载路径下的后继屈服面进行了精确的试验^[12],包括三种 Z 字形路径下的后继屈服面。Phillips 和 Lee 给出了 1100-0 铝在先拉伸后扭转加载下的后继屈服面^[68]。

对于非比例加载情况,后继屈服面会出现旋转,另外,特征也变得复杂,没有一致的规律。

上述后继屈服面演化的实验研究大多都是在小变形范围($\epsilon_{eq} < 5\%$)。随着塑性力学在金属板材成型等材料加工技术中的应用,人们迫切需要了解材料在有限变形下的变形行为。在 20 世纪,一些学者研究了从小变形到有限变形下的屈服面演化^[20, 21, 30, 31, 33-36, 38, 39],但存在一些局限性,如只研究了比例加载情况,没有涉及非比例加载情况;采用的屈服定义过大,不能够精确反映材料从弹性到屈服的过渡;以及当时的实验条件,在多轴加载及应变测量方面均存在较大误差。

最近, Khan 及其合作者对有限变形下的屈服面演化进行了系统的实验研究^[40-42]。采用的材料有两种:低加工硬化铝合金 Al6061-T6511 和高加工硬化铝合金 annealed 1100 Al。屈服的定义为偏移应变 $10\mu\epsilon$ 。实验中给出了两种铝合金材料在单轴拉伸、纯扭转和拉扭组合比例加载下以及高加工硬化铝合金在拉扭组合非比例加载下的屈服面演化。实验指出,初始屈服面与 Mises 准则给出的屈服面非常接近。与小变形情况下比例加载得到的屈服面演化规律类似,实验中比例加载下得到的后继屈服面也发生了移动和畸变,前端凸出,尾部缩进,呈现前凸后扁的特征。但与小变形情况不同的是,随着塑性变形的增大,低加工硬化铝合金 Al6061-T6511 后继屈服面逐渐收缩,表现出负的交叉效应(negative cross-effect)^[40],如图 1(a)所示;而高加工硬化铝合金 annealed 1100 Al 后继屈服面整体膨胀,表现出正的交叉效应(positive cross-effect)^[41],如图 1(b)所示。

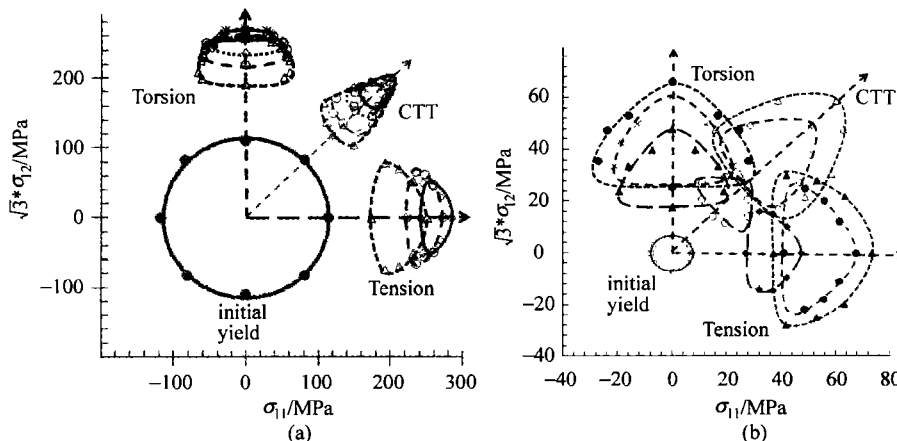


图 1 比例加载路径下的后继屈服面演化

另外, Philips 及其合作者在屈服面演化的实验研究方面做了很多工作^[14-19, 22, 23],尤其是考虑了温度的影响。为了验证 Casey 和 Naghdi 提出的在应变空间确定塑性应变的方法^[69],

Brown 等人研究了 1100-O 铝在应力空间和应变空间下的屈服面演化规律^[27]。实验结果表明：不管是在哪个空间，后继屈服面随着塑性变形的增加均发生移动和明显的畸变，前端凸出，尾部缩进。

3 理论模型

实验研究结果表明后继屈服面发生了明显的畸变。经典理论中的等向、随动以及混合硬化模型均无法解释后继屈服面的畸变。最新的研究表明，材料的应力应变行为和破坏对屈服函数的微小变化非常敏感，一个先进的模型应该能够描述屈服面的畸变^[9]。因此，能否精确描述材料的屈服面及其演化过程是对理论模型预测材料塑性变形行为能力的一种全面考查。

许多学者在屈服面演化模型方面进行了理论分析研究^[44-63]。目前，典型的理论分析方法可分为代数法和几何法两种^[53, 61]。在代数法中，使用各向异性材料张量(anisotropic material tensor)定义的屈服函数来描述后继屈服面的膨胀、畸变和旋转等，屈服面的移动常常假设与经典塑性理论相关，典型的成果有 Ortiz 和 Popov 的唯象模型^[70]、Voyiadjis 和 Foroozesh 的各向异性模型^[71]以及 Feigenbaum 和 Dafalias 基于热力学框架的各向异性塑性模型^[64, 65]。在几何法中，后继屈服面的移动、变形等主要采用几何上的拟合来实现，即通过几何映射的方法，将后继屈服面分为前端和尾部两部分来分别计算，典型的成果有分布单元模型^[53]、内时理论模型^[61]以及构元组集模型^[67]。

Chiang 等人采用分布单元模型(Distributed-element model)对 Wu 和 Yeh 给出的 304 不锈钢在单轴拉伸加载下的屈服面演化的实验结果^[24]进行了理论分析^[53]。该模型描述简单，参数较少且物理意义比较明确。正如该文作者所言，模型暂无法适用于非比例加载情况。

Yeh 和 Lin 也针对 Wu 和 Yeh 实验结果^[24]，采用内时理论模型(endochronic model)对屈服面演化中表现出的变形诱导各向异性行为进行了研究^[61]。对于同一组实验数据，该模型的计算结果要优于分布单元模型^[53]。但是，该模型描述比较复杂，对于不同的加载路径需要重新标定模型参数，参数较多，缺乏物理意义，而且同样无法描述非比例加载情况。

Feigenbaum 和 Dafalias 利用基于热力学框架的各向异性塑性模型^[64, 65]，引入一个四阶张量和一个标量作为内变量，四阶张量称为背应力(back stress)，背应力与一个有方向性的标量乘子的演化共同描述了屈服面的畸变特征。Feigenbaum 和 Dafalias 也针对 Wu 和 Yeh 的实验^[24]研究了比例加载下的屈服面演化规律^[65]，该模型也无法处理非比例加载问题。

上述这些模型都能反映比例加载情况下后继屈服面在移动过程中“前凸后扁”的变形特征，然而都无法应用于非比例加载情况。

Zattarin 等人采用自洽方法研究了多晶材料中微结构对后继屈服面的影响^[58]。该模型计算了小变形条件下某铝合金在单轴拉伸下的后继屈服面，并与实验结果进行比较。另外，考虑微结构参数，如内应力、位错等的影响，计算了有限变形下的后继屈服面，得到了三阶内应力对有限变形下的屈服面演化起主导作用的结论。

在非比例加载方面，Francois 通过改进经典弹塑性本构模型，考虑了屈服面的畸变特征，研究了非比例加载下的屈服面演化^[52]，该模型计算了 2024-T4 铝合金在拉扭组合非比

例加载路径下的后继屈服面演化结果，并实验结果进行比较。

Suprun 提出了一种包含三个塑性常数的本构模型，研究了后继屈服面的移动、转动和重构等规律^[60]。该模型计算了先拉伸后扭转加载情况下的后继屈服面演化结果。

对于非比例加载，没有一致的演化规律。Khan 和 Cheng 指出复杂加载下后继屈服面由多条不同曲率的线构成^[72]。

上述理论模型均限制在小变形的研究范围。Wu 对有限变形条件下，不同加载路径对后继屈服面的影响进行了研究^[57]。由于模型中只包含各向同性硬化，因此该模型无法描述后继屈服面的畸变。

可以看出，屈服面演化模型大多数局限于小变形的研究范围，且难以处理非比例加载问题及描述有限变形条件下屈服面演化的畸变特征。

讨论

针对屈服面及其演化的研究现状，下面对屈服面演化中的几个重要特征和关键问题进行探讨。

尖点

尖点指屈服面上的非光滑点，也称为尖点效应 (vertex effect)。

T. H. Lin^[73]指出当应力增量处于屈服面上的光滑点时，塑性应变增量的方向与屈服面垂直；当应力增量处于屈服面的顶点时，塑性应变增量的方向位于与屈服面垂直的法线所构成的锥体内。也就是说，当塑性应变增量的方向与应力增量的方向相关时，尖点存在。

实验中，屈服面由若干个离散的屈服点组成，无法得到理论中的尖点。实际结果表明，屈服面前端由一个小曲率区域构成，呈现“前凸”的特征。

文献中，也有理论模型得到的后继屈服面包含尖点，如 Schurig, M. 等人对后继屈服面尖点的形成和移动进行了研究^[74]，Liu 等人预测的比例加载下后继屈服面前端有明显的尖角^[75]。

包氏效应

包氏效应指拉伸时强化引起压缩时弱化的现象。包氏效应影响着后继屈服面尾部的移动和形状。

实验结果表明，在比例加载下，后继屈服面尾部膨胀，由一个大曲率区域构成，呈现“后扁”的特征，如 Wu 和 Yeh 的实验结果^[24]、Khan 的实验结果^[40-42]（见图 1）等。

综合比例加载下后继屈服面前端和尾部的特征，后继屈服面可描述为“前凸后扁”。

需要说明的是，若在卸载后反向加载，后继屈服面原来的尾部成为前端，而原来的前端变成尾部，尖点仍处于加载点处，而尾部仍由一个大曲率区域构成。

交叉效应

交叉效应指屈服面演化过程中横向尺寸的变化。

小变形情况下，后继屈服面一般无明显的交叉效应，横向尺寸基本不变，如 Wu 和 Yeh 的实验结果^[24]。

有限变形情况下, 后继屈服面可能表现出正或负的交叉效应, 如 Khan 的实验结果^[40-42]中, 低加工硬化铝合金 Al6061-T6511 后继屈服面逐渐收缩, 表现出负的交叉效应(negative cross-effect)^[40]; 而高加工硬化铝合金 annealed 1100 Al 后继屈服面整体膨胀, 表现出正的交叉效应(positive cross-effect)^[41]。

畸变

大量实验观察到屈服面演化中出现了畸变, 这反映了材料塑性变形后的各向异性。对于比例加载, 后继屈服面呈现“前凸后扁”的变形特征, 对于非比例加载, 屈服面的演化更加复杂, 没有一致的规律。然而, 材料的应力应变行为和破坏对屈服函数的微小变化非常敏感^[9], 屈服面的形状直接影响着塑性应变增量的方向, 一个先进的模型应该能够准确地描述屈服面的畸变特征。

对于小变形条件下的比例加载情况, 理论能描述屈服面在移动过程中前凸后扁的变形特征, 如 Chiang 的分布单元模型(Distributed-element model)^[53]、Yeh 和 Lin 的内时理论模型(endochronic model)^[61]、Feigenbaum 和 Dafalias 基于热力学框架的各向异性塑性模型^[65]。但正, 由于无法考虑加载路径的改变或缺乏与加载历史相关的塑性变形信息, 这些模型均无法处理非比例加载问题。

对于非比例加载情况, 屈服面的演化更加复杂, 对于畸变的描述也更加困难。Francois 通过改进经典弹塑性本构模型, 考虑了屈服面的畸变特征, 研究了非比例加载下的屈服面演化^[52]。Suprun 提出了一种包含三个塑性常数的本构模型, 计算了先拉伸后扭转加载情况下的后继屈服面演化结果^[60]。

上述理论模型均限制在小变形的研究范围。材料和结构的变形常常超出小变形的研究范围, 因此需要研究有限变形下材料的力学响应。在有限变形条件下, 屈服面的演化更加复杂。同时, 由于有限变形条件下屈服面演化中新的特征, 在屈服面演化模型中需要考虑后继屈服面的交叉效应。

Wu 对有限变形条件下, 不同加载路径对后继屈服面的影响进行了研究^[57]。由于模型中只包含各向同性硬化, 因此该模型无法描述后继屈服面的畸变。

可以看出, 屈服面演化模型大多数局限于小变形的研究范围, 且难以处理非比例加载问题及描述有限变形条件下屈服面演化过程中的畸变特征。Khan 等人给出的有限变形条件下比例/非比例加载情况的屈服面演化结果^[40-42]给屈服面演化模型提供了一个全面考察的算例, 也是对现有塑性理论的挑战。

4 构元组集模型

针对现有理论在屈服面演化预测中的局限性, 构元组集模型对屈服面演化规律进行了系统的研究^[75]。下面对构元组集模型进行简单的介绍, 具体理论推导过程和对屈服面演化的预测结果见文献^[75]。

基于物理学中的原子间势函数——对泛函势, 它从原子间相互作用和原子嵌入作用的角度描述了材料的势能, 将材料单元的势能用对泛函势的变化描述。按照 Cauchy-Born 准则, 建立了微观的原子键的变形和电子云密度变化与材料宏观变形的关系。进一步, 将原

子键按方向分组，同一方向上的原子键抽象为一个弹簧束构元；原子嵌入作用抽象为体积构元。从而，建立了一个由分布于各个方向的弹簧束构元和一个体积构元组成的材料模型。由于损伤实质上是原子键合力的衰弱与丧失，损伤可以通过两种构元的力响应函数反映。组集两种构元的力学响应，可以得到材料的弹性损伤本构关系。

考虑滑移作为多晶金属材料的主要塑性变形机制，将单晶体的滑移系推广到多晶体，提出了用滑移构元描述材料的塑性变形响应。

将总变形分解为弹性变形和塑性变形，弹性变形响应由基于对泛函势和 Cauchy-Born 准则的弹性损伤本构关系描述，弹簧束构元和体积构元描述了材料的弹性损伤本构关系，共同承担应力。在相同的应力状态下，滑移构元产生相应的塑性变形，塑性变形是附加的变形，不影响应力状态。塑性变形响应用滑移构元描述。结合材料的弹性损伤变形响应和塑性变形响应，得到了弹塑性损伤本构方程。从而，建立了一个由弹簧束构元、体积构元和滑移构元组集而成的模型——构元组集模型。构元组集模型一致描述了材料的弹性、塑性、损伤到破坏阶段的力学响应。

基于滑移构元描述材料的屈服面演化只需要给定滑移构元临界分解剪切应力的演化就可以确定后继屈服面，而临界分解剪切应力的演化通过硬化规律和包氏效应确定。基于滑移构元的硬化规律和包氏效应，可以描述屈服面演化过程中的膨胀/收缩、移动、畸变和正负交叉效应等特征。文献[75]利用构元组集模型对 Khan 的实验结果^[40-42]中两种加工硬化铝合金在单轴拉伸、纯扭转和拉扭组合比例/非比例加载下后继屈服面演化进行了模拟和预测，并对屈服面演化过程中的畸变特征进行了解释。

5 总结

本文介绍了屈服面及其演化方面的实验结果和理论模型，对屈服面演化中的畸变、尖点、包氏效应、正负交叉效应等特征进行了探讨，分析了现有理论在非比例加载和有限变形条件下预测屈服面所面临的困难。最后介绍了构元组集模型，此模型试图对屈服面及其演化给出一个系统的描述，为屈服面演化的预测提供了一个新的途径。

参考文献

1. Lemaitre J. A Course on Damage Mechanics. Berlin: Springer-Verlag, 1992
2. Carol I and Bazant Z P. Damage and plasticity in microplane theory. International Journal of Solids and Structures, 1997, 34(29): 3807~3835
3. Phillips R. Crystals, Defects and Microstructures: Modeling across Scales. Cambridge: Cambridge University Press, 2001
4. Wert J A, Huang X, Winther G, Pantleon W, and Poulsen H F. Revealing deformation microstructures. Materials Today, 2007, 10(9): 24~32
5. Gubicza J, Chinh N Q, Lábár J L, Dobatkin S, Hegedus Z, and Langdon T G. Correlation between microstructure and mechanical properties of severely deformed metals. Journal of Alloys and Compounds, 2009, 483(1~2): 271~274

6. Nicot F, and Darve F. Basic features of plastic strains: From micro-mechanics to incrementally nonlinear models. *International Journal of Plasticity*, 2007, 23(9): 1555~1588
7. Pensee V, and Kondo D. Micromechanics of anisotropic brittle damage: comparative analysis between a stress based and a strain based formulation. *Mechanics of Materials*, 2003, 35(8): 747~761
8. Bucher A, Görke U J, and Kreißig R. A material model for finite elasto-plastic deformations considering a substructure. *International Journal of Plasticity*, 2004, 20(4~5): 619~642
9. Rousselier G, Barlat F, and Yoon J W. A novel approach for anisotropic hardening modeling. Part I: Theory and its application to finite element analysis of deep drawing. *International Journal of Plasticity*, 2009, 25(12): 2383~2409
10. Naghdi P M, Essengurg F, and Koff W. An experimental study of initial and subsequent yield surfaces in plasticity. *Journal of Applied Mechanics*, 1958, 25(2): 201~209
11. Ivey H J. Plastic stress-strain relations and yield surfaces for aluminium alloys. *Journal of Mechanical Engineering Science*, 1961, 3(1): 15~31
12. Bertsch P K, and Findley W N. An experimental study of subsequent yield surface-corners, normality, Bauschinger and allied effects. *Proceedings of the Fourth U.S. National Congress of Applied Mechanics.*, 1962: 893~907
13. Hsu T C. Definition of the yield point in plasticity and its effect on the shape of the yield locus. *Journal of Strain Analysis*, 1966, 1(4)
14. Phillips A, Liu C S, and Justusson J W. An experimental investigation of yield surfaces at elevated temperatures. *Acta Mechanica*, 1972, 14(2): 119~146
15. Phillips A, and Tang J L. The effect of loading path on the yield surface at elevated temperatures. *International Journal of Solids Structures*, 1972, 8: 463~474
16. Phillips A, Tang J L, and Ricciuti M. Some new observations on yield surfaces. *Acta Mechanica*, 1974, 20(1~2): 23~39
17. Phillips A, and Ricciuti M. Fundamental experiments in plasticity and creep of aluminum-extension of previous results. *International Journal of Solids and Structures*, 1976, 12(3): 159~171
18. Phillips A, and Moon H. An experimental investigation concerning yield surfaces and loading surfaces. *Acta Mechanica*, 1977, 27(1~4): 91~102
19. Phillips A, and Lee C W. Yield surfaces and loading surfaces. experiments and recommendations. *International Journal of Solids Structures*, 1979, 15: 715~729
20. Moreton D N, Moffat D G, and Parkinson D.B. The yield surface behavior of pressure-vessel steels. *Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, 1981, 16(2): 127~136
21. Ascione L, Olivito R, and Spadea G. An experimental study on subsequent yield surfaces for metals. *Materials and Structures*, 1982, 15(1): 21~26
22. Phillips A, and Lu W Y. An experimental investigation of yield surfaces and loading surfaces of pure aluminum with stress-controlled and strain-controlled paths of loading. *Journal of Engineering Materials and Technology-Transactions of the ASME*, 1984, 106(4): 349~354
23. Phillips A, and Das P K. Yield surfaces and loading surfaces of aluminum and brass: An experimental investigation at room and elevated temperatures. *International Journal of Plasticity*, 1985, 1(1): 89~109
24. Wu H C, and Yeh W C. On the experimental determination of yield surfaces and some results of annealed 304 stainless steel. *International Journal of Plasticity*, 1991, 7(8): 803~826
25. Ishikawa H. Subsequent yield surface probed from its current center. *International Journal of Plasticity*, 1997, 13(6~7): 533~549
26. Gil C M, Lissenden C J, and Lerch B A. Yield of inconel 718 by axial-torsional loading at temperatures up to

- 649 degrees C. *Journal of Testing and Evaluation*, 1999, 27(5): 327~336
27. Brown A A, Casey J, and Nikkel D J. Experiments conducted in the context of the strain-space formulation of plasticity. *International Journal of Plasticity*, 2003, 19(11): 1965~2005
28. Iadicola M A, Foecke T, and Banovic S W. Experimental observations of evolving yield loci in biaxially strained AA5754-O. *International Journal of Plasticity*, 2008, 24(11): 2084~2101
29. Kuwabara T, and Horiuchi Y. Determining Subsequent Yield Surface of Pure Titanium Sheet by Use of Abrupt Strain Path Change. *International Journal of Material Forming*, 2008, 1(0): 237~240
30. Mair W M, and Pugh H L D. Effect of pre-strain on yield surfaces in copper. *Journal of Mechanical Engineering Science*, 1964, 6(2)
31. Williams J, and Svensson N. Effect of tensile prestrain on the yield locus of 1100-f aluminium. *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, 1970, 5(2): 128~139
32. Hecker S S. Yield surfaces in prestrained aluminum and copper. *Metallurgical Transactions*, 1971, 2(8)
33. Williams J, and Svensson N. Effect of torsional prestrain on the yield locus of 1100-F aluminium. *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, 1971, 6(4): 263~272
34. Shiratori E, Ikegami K, and Kaneko K. The Influence of the Bauschinger Effect on the Subsequent Yield Condition. *Bulletin of JSME*, 1973, 16(100): 1482~1493
35. Tozawa Y. Plastic deformation behavior under conditions of combined stress, in *Mechanics of Sheet Metal Forming*, Koistinen D P, and Wang N M, Editors. 1978, Plenum Press: New York London.
36. Stout M G, Martin P L, Helling D E, and Canova G R. Multiaxial yield behavior of 1100 aluminum following various magnitudes of prestrain. *International Journal of Plasticity*, 1985, 1(2): 163~174
37. Helling D E, Miller A K, and Stout M G. An experimental investigation of the yield loci of 1100-0 aluminum, 70:30 brass, and an overaged 2024 aluminum alloy after various prestrains. *Journal of Engineering Materials and Technology-Transactions of the ASME*, 1986, 108: 313~320
38. Khan A S, and Wang X W. On non-proportional infinitesimal plastic-deformation after finite plastic prestraining and partial unloading. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1988, 36(5): 519~535
39. Khan A S, and Wang X W. An experimental study on subsequent yield surface after finite shear prestraining. *International Journal of Plasticity*, 1993, 9(8): 889~905
40. Khan A S, Kazmi R, Pandey A, and Stoughton T. Evolution of subsequent yield surfaces and elastic constants with finite plastic deformation. Part-I: A very low work hardening aluminum alloy (Al6061-T6511). *International Journal of Plasticity*, 2009, 25(9): 1611~1625
41. Khan A S, Pandey A, and Stoughton T. Evolution of subsequent yield surfaces and elastic constants with finite plastic deformation. Part II: A very high work hardening aluminum alloy (annealed 1100 Al). *International Journal of Plasticity*, 2010, 26(10): 1421~1431
42. Khan A S, Pandey A, and Stoughton T. Evolution of subsequent yield surfaces and elastic constants with finite plastic deformation. Part III: Yield surface in tension-tension stress space (Al 6061-T 6511 and annealed 1100 Al). *International Journal of Plasticity*, 2010, 26(10): 1432~1441
43. 苏莉, 张克实, 张光, 高行山. 多晶铜后继屈服面的试验分析. *机械强度*, 2008(04)
44. Eisenberg M A, and Yeh C F. The anisotropic deformation of yield surfaces. *Journal of Engineering Materials and Technology-Transactions of the ASME*, 1984, 106: 355~360
45. Rees D W A. An examination of yield surface distortion and translation. *Acta Mechanica*, 1984, 52(1~2): 15~40
46. Helling D, and Miller A. The incorporation of yield surface distortion into a unified constitutive model, part 1: Equation development. *Acta Mechanica*, 1987, 69(1): 9~23

47. Helling D, and Miller A. The incorporation of yield surface distortion into a unified constitutive model, part 2: Predictive capabilities. *Acta Mechanica*, 1988, 72(1): 39~53
48. Gupta N K, and Meyers A. Considerations of translated stress deviators in describing yield surfaces. *International Journal of Plasticity*, 1992, 8(6): 729~740
49. Wegener K, and Schlegel M. Suitability of yield functions for the approximation of subsequent yield surfaces. *International Journal of Plasticity*, 1996, 12(9): 1151~1177
50. Kowalsky U, Ahrens H, and Dinkler D. Distorted yield surfaces - modelling by higher order anisotropic hardening tensors. *Computational Materials Science*, 1999, 16(1~4): 81~88
51. Kalidindi S R, and Schoenfeld S E. On the prediction of yield surfaces by the crystal plasticity models for fcc polycrystals. *Materials Science and Engineering a-Structural Materials Properties Microstructure and Processing*, 2000, 293(1~2): 120~129
52. Francois M. A plasticity model with yield surface distortion for non proportional loading. *International Journal of Plasticity*, 2001, 17(5): 703~717
53. Chiang D Y, Su K H, and Liao C H. A study on subsequent yield surface based on the distributed-element model. *International Journal of Plasticity*, 2002, 18(1): 51~70
54. Mollica F, and Srinivasa A R. A general framework for generating convex yield surfaces for anisotropic metals. *Acta Mechanica*, 2002, 154(1~4): 61~84
55. Wu H C. Anisotropic plasticity for sheet metals using the concept of combined isotropic-kinematic hardening. *International Journal of Plasticity*, 2002, 18(12): 1661~1682
56. Wu H C. On finite plastic deformation of anisotropic metallic materials. *International Journal of Plasticity*, 2003, 19(1): 91~119
57. Wu H C. Effect of loading-path on the evolution of yield surface for anisotropic metals subjected to large pre-strain. *International Journal of Plasticity*, 2003, 19(10): 1773~1800
58. Zattarin P, Lipinski P, and Rosochowski A. Numerical study of the influence of microstructure on subsequent yield surfaces of polycrystalline materials. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2004, 46(9): 1377~1398
59. Sai K, Cailletaud G, and Forest S. Micro-mechanical modeling of the inelastic behavior of directionally solidified materials. *Mechanics of Materials*, 2006, 38(3): 203~217
60. Suprun A N. A constitutive model with three plastic constants: The description of anisotropic workhardening. *International Journal of Plasticity*, 2006, 22(7): 1217~1233
61. Yeh W C, and Lin H Y. An endochronic model of yield surface accounting for deformation induced anisotropy. *International Journal of Plasticity*, 2006, 22(1): 16~38
62. Demiray S, Becker W, and Hohe J. Numerical determination of initial and subsequent yield surfaces of open-celled model foams. *International Journal of Solids and Structures*, 2007, 44(7~8): 2093~2108
63. Schurig M, Bertram A, and Petryk H. Micromechanical analysis of the development of a yield vertex in polycrystal plasticity. *Acta Mechanica*, 2007, 194(1~4): 141~158
64. Feigenbaum H P, and Dafalias Y F. Directional distortional hardening in metal plasticity within thermodynamics. *International Journal of Solids and Structures*, 2007, 44(22~23): 7526~7542
65. Feigenbaum H P, and Dafalias Y F. Simple model for directional distortional hardening in metal plasticity within thermodynamics. *Journal of Engineering Mechanics*, 2008, 134(9): 730~738
66. 王仁, 黄文彬, 黄筑平. 塑性力学引论. 北京: 北京大学出版社, 1992
67. 付强, 刘芳, 张晶, 梁乃刚. 一种基于物理机制的后续屈服面演化模型. *力学学报*, 2010, 42(5): 880~888
68. Phillips A, and Lee C W. Yield surfaces and lading surfaces, experiments and recommendations. *International Journal of Solids and Structures*, 1979, 15: 715~729

69. Casey J, and Naghdi P M. A prescription for the identification of finite plastic strain. *International Journal of Engineering Science*, 1992, 30(10): 1257~1278
70. Ortiz M, and Popov P E. Distortional hardening rules for metal plasticity. *Journal of Engineering Mechanics*, 1983, 109(4): 1042~4057
71. Voyiadjis G Z, and Foroozesh M. Anisotropic distortional yield model. *Journal of Applied Mechanics*, 1990, 57(3): 537~547
72. Khan A S, and Cheng P. An anisotropic elastic-plastic constitutive model for single and polycrystalline metals. I-theoretical developments. *International Journal of Plasticity*, 1996, 12(2): 147~162
73. Lin T H. Physical theory of plasticity. *Advances in Applied Mechanics*, 1971, 11: 255~311
74. Schurig M, Bertram A, and Petryk H. Micromechanical analysis of the development of a yield vertex in polycrystal plasticity. *Acta Mechanica*, 2007, 194: 141~158
75. Liu F, Fu Q, Chen C, and Liang N. An elasto-plastic damage constitutive theory and its prediction of evolution of subsequent yield surfaces and elastic constants. *International Journal of Plasticity*, 2011, 27(9): 1355~1383