

# 相似参数敏感性分析及其应用<sup>1)</sup>

徐 犇 李家春

(中国科学院力学研究所环境力学重点实验室, 北京 100190)

**摘要** 利用复杂流动相似准数敏感性分析的方法, 从理论公式及数值分析出发, 分别将该方法应用于 Wigley 船模阻力分析、剪切流中对称 Joukowsky 翼型的升力和力矩系数分析, 以及脉冲管制冷机内部交变流动与换热的分析中. 仔细比较了  $Re, Fr, Sr, Ma$  等无量纲参数对不同目标函数的敏感性, 定量地得到了上述无量纲参数的敏感区间, 并将数值结果与实验结果进行了比较, 为相关工程应用提供了依据.

**关键词** 相似准则, 敏感因子, Wigley 船模, Joukowsky 翼型, 脉冲管制冷机

**中图分类号:** TV131.2, O303 **文献标识码:** A **文章编号:** 0459-1879(2011)02-0255-12

## 引 言

在科学研究中, 除了理论研究、数值分析和现场观测外, 物理模型实验是非常重要的途径. 物理模型实验以相似理论为基础, 从相似模型的观测数据来分析原型的规律. 然而, 相似模型要求所有无量纲参量与原型必须保持一致, 这对于工业及环境中的复杂流动来说常常是难以满足的, 有时甚至对某些无量纲参数的要求是矛盾的<sup>[1]</sup>. 例如, 在船舶运动分析中, 表示惯性力与重力之比的  $Fr$  数与表示惯性力与黏性力之比的  $Re$  数, 二者是不能同时得到满足的; 在飞行器风洞实验中,  $Re$  数和  $Ma$  数相等的要求也不能同时得到满足.

郑哲敏和谈庆明<sup>[2]</sup>指出, 对于不能完全相似的问题, 可以采用局部模拟, 即对主要物理现象的无量纲参数进行完全模拟, 而放松对次要参数的要求. 确定主要相似参数的方法有两种: 一种是基于物理规律进行定性分析, 即根据所研究问题的物理本质确定主要相似参数; 另一种方法是近来开始出现的基于数值分析的方法, 即通过研究目标函数对各相似参数的敏感性来定量确定主要的相似参数, 如: Mackinnon 等<sup>[3]</sup>建立了生态系统的多相、多组分数学模型, 以系统的生物转换率为目标函数, 分析了 4 组无量纲参数对其的敏感性. 但是 Mackinnon 所定义的敏感系数没有一般性, 也没有考虑到无量纲参数的取值范围对敏感性的影响, 并仅应用于他所研究的生态系统的生态修复问题.

本文根据前人的研究, 利用李家春等<sup>[4]</sup>提出的一种优选主要相似参数的数值优化方法来获得主要相似参数. 分别讨论了该方法在 Wigley 船模阻力、剪切流中对称 Joukowsky 翼型升力, 以及脉冲管制冷机中的交变流动与换热问题中的应用, 将得到的数值计算结果与实验结果进行了比较, 为工程应用提供了依据.

## 1 相似参数的敏感性方法

对于一个多变量的复杂流动系统, 其目标函数可以定义为

$$f = f(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_N) \quad (1)$$

其中  $f$  为某一目标函数, 该目标函数是经过对不同的复杂系统分析而确定的, 要具有一定代表性, 能够表示物理模拟结果的意义;  $\pi_k$  表述描述该复杂流动的无量纲参数,  $k = 1, 2, \dots, N$ ,  $N$  为无量纲参数的个数.

对于一个含有多个无量纲参数的复杂问题, 要设计合理而有效的模型, 必须明确其中的主要无量纲参数, 可以通过目标函数对每一无量纲参数的敏感性进行衡量, 首先定义敏感因子如下

$$s_k = \left| \frac{\partial f}{\partial \pi_k} \right|, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (2)$$

敏感因子越大, 与之对应的无量纲参数对目标函数

2010-05-05 收到第 1 稿, 2011-02-15 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金重大项目 (50890182) 资助.

的影响也就越大. 因此, 可以根据敏感因子的大小来确定无量纲参数的主次关系.

另一方面, 当变量或参数的变化范围很大的时候, 有必要由物理量的相对变化率来重新定义敏感因子, 即

$$s_k = \left| \frac{\partial(f/f_p)}{\partial(\pi_k/\pi_p)} \right|, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (3)$$

式中,  $f_p = f(\pi_{1,p}, \pi_{2,p}, \dots, \pi_{N,p})$ ,  $\pi_{k,p}$  为第  $k$  个无量纲参数  $\pi_k$  的原型值,  $s_k$  表示第  $k$  个无量纲参数  $\pi_k$  取某一特定值  $\pi_{k,p}$  时, 目标函数  $f$  对  $\pi_k$  的敏感性.

由于目标函数是所有无量纲参数的函数, 且这种函数关系一般不是线性的, 因此敏感因子也一定是所有无量纲参数的函数, 也就是说, 每一个敏感因子会随它所对应的无量纲参数的值域而变化. 因此, 即使是同一种复杂流动系统, 无量纲参数可能在不同的取值范围, 由敏感因子确定的无量纲参数的主次关系也会发生变化, 因此在进行敏感性分析的过程中, 需要明确找出无量纲参数与目标函数之间的关系. 因此, 如果对于某一具体的物理流动问题, 目标函数存在具体的解析表达式, 那么敏感性分析的结果是显而易见的, 直接对于此关系式进行求导就可以得到敏感因子的敏感区间; 但是对于复杂问题的情况, 目标函数与各无量纲参数之间的函数关系很难显式地表达, 敏感因子不能直接通过解析求导运算得到. 此时, 可采用基于无量纲方程的数学模型, 通过改变某一无量纲参数所得到的敏感因子便确实反映了该无量纲参数对目标函数的影响. 本文对于此两种情况的敏感性分析, 分别以 3 个例子来进行具体的说明, 同时为工程应用提供一定的依据.

## 2 船舶阻力的敏感性分析

### 2.1 计算模型

假设流体是理想、无旋、定常、低速流动, 因而在流场中存在速度势  $\phi$ , 得到如下的控制方程  
流动区域内

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (4)$$

船和水底的边界面上

$$\phi_n = 0 \quad (5)$$

$Z = \xi$  的自由表面上的边界条件:

运动学边界条件

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (6)$$

动力学边界条件

$$-\frac{p_a}{\rho} = g\eta + \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2, \quad p = p_a \quad (7)$$

$$\nabla \phi = (U_\infty, 0, 0), \quad \text{当 } r \rightarrow \infty \text{ 时} \quad (8)$$

这里坐标系是固定在船体上的,  $x$  轴的正方向与来流方向一致;  $y$  轴指船的侧向,  $y = 0$  是船形对称面;  $z = 0$  的平面是未受扰动的自由水面,  $z$  轴正向向上, 原点  $x = 0$  将船长截为两等分.  $\nabla$  为梯度算符,  $\zeta$  是自由面高度, 下标  $n$  表示法向导数,  $P_a$  是大气压,  $U_\infty$  是来流速度,  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

根据 Ogilvie, Newman, Baba 等的研究 [5], 得到相应船体的兴波阻力系数的理论公式

$$C_w = \frac{2}{\pi} Fr^4 \int_0^\infty (1+t^2)^{-1/2} \left| \oint_{L_0} D(x,y) \exp[iFr^{-2}\sqrt{1+t^2}(x+ty)] dy \right|^2 dt \quad (9)$$

针对 Wigley 船模进行阻力的敏感性分析,  $Fr = U/\sqrt{gL}$ , 为 Froude 数;  $C_w, Fr$  是以船体的总长  $L$  进行无量纲化的; 而  $D(x,y)$  为非齐次项

$$D(x,y) = -\left( \phi_x \frac{\partial}{\partial x} + \phi_y \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 \phi - Fr^2 \phi_z$$

其取值是用船体的半总长进行无量纲化, 其中  $\phi_x, \phi_y, \phi_z$  分别为  $X, Y, Z$  三个方向的速度分量.

Wigley 抛物形船是国际标模之一, 记  $L$  为船长,  $B$  为半船宽,  $T$  为吃水深度,  $C_b$  为方型系数, 其船形表达式为

$$y = \pm \frac{B}{2} [1 - (2x/L)^2][1 - (z/T)^2] \quad (10)$$

其中  $L/B = 10, T/L = 0.0625, B/T = 1.6$ , 这里可以取  $L = 10 \text{ m}, B = 1 \text{ m}, T = 0.625 \text{ m}$ , 如图 1 所示.

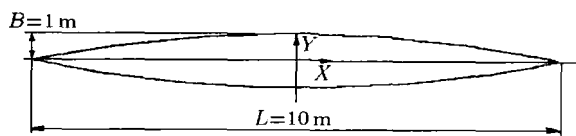


图 1 Wigley 抛物形船示意图  
Fig.1 Schematic of the Wigley ship

得到 Wigley 船模的兴波阻力系数的表达式 [6]

$$C_w = 2B^2\pi D^2\left(\frac{1}{2}, 0\right)Fr^6 - 8B^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}D^2\left(\frac{1}{2}, 0\right) \cdot TB \cdot Fr^7 + 2B^2\sqrt{2\pi}D^2\left(\frac{1}{2}, 0\right) \sin\left(Fr^{-2} + \frac{\pi}{4}\right)Fr^7 \quad (11)$$

其中,  $TB = \int_0^\infty (1 + 2Bt)^{-1}(1 + t^2)^{-5/4}dt$ ; 对于黏性阻力系数, 采用 1957ITTC 船模公式

$$C_f = \frac{0.075}{(\lg Re - 2)^2} \quad (12)$$

总阻力系数的表达式则可以写成

$$C_D = C_f(Re) + C_w(Fr) \quad (13)$$

根据上述分析结果, 可以分别得到如下图形.

图 2 表明了黏性阻力系数  $C_f$  随着  $Re$  数的增加呈现减少的趋势, 而且根据  $Re$  数的定义,  $Re = UL/\nu$ , 在做船模拖曳实验的时候, 电机拖动船模的最小速度不会低于 0.01 m/s, 船模最高速度  $U = 4$  m/s,  $L = 10$  m, 最高  $Re$  数能达到  $10^7$  量级, 因此, 雷诺数的取值范围为  $10^5 \sim 10^7$ .

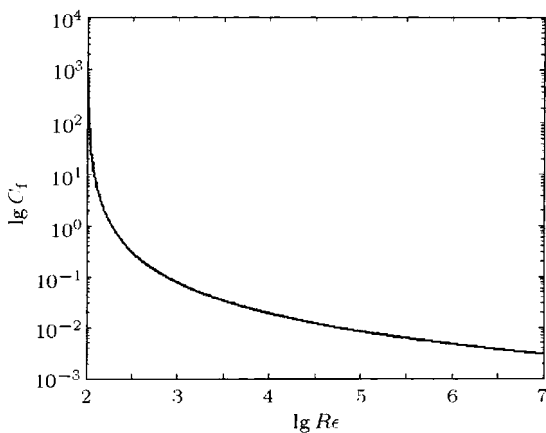


图 2 黏性阻力系数  $C_f$  与  $Re$  数的关系  
Fig.2 The relationship of between  $C_f$  and  $Re$

图 3 说明了兴波阻力系数  $C_w$  虽略有波动, 总体来说随着  $Fr$  数的增加而增长, 尤其当  $Fr > 0.2$  以后, 呈快速增长的趋势. 实际上, 船模速度  $U = 0.01 \sim 4$  m/s,  $Fr$  数范围是  $0 < Fr < 0.4$ .

图 4 给出了黏性阻力系数  $C_f$  和兴波阻力系数  $C_w$  占总阻力  $C_D$  的比例. 如图 4 所示, 当航行速度

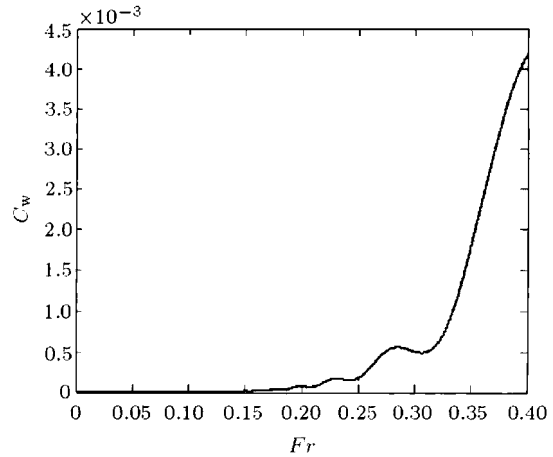


图 3 兴波阻力系数  $C_w$  与  $Fr$  数的关系  
Fig.3 The relationship between  $C_w$  and  $Fr$

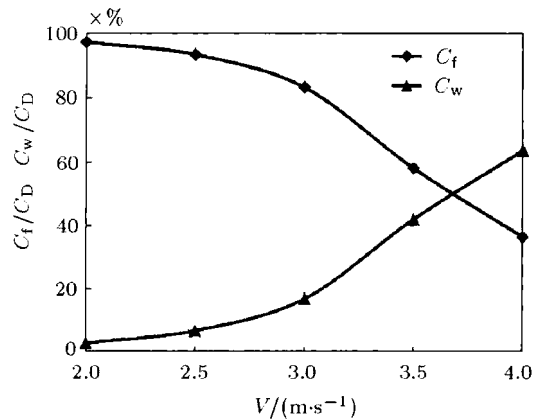


图 4  $C_f$  与  $C_w$  的比例关系  
Fig.4 The relationship between  $C_f$  and  $C_w$

达到  $V_{max}$  的一半之前, 即  $V = 2$  m/s 时, 其  $C_f$  和  $C_w$  的比例仍然是  $C_f$  占据绝对主导, 其比例达到 97% 以上, 但是从这以后,  $C_f$  所占比例快速下降, 当达到全速前进时, 二者的比例分别为 60% 和 40%, 此时兴波阻力占主导地位.

从上述分析可以看出, 当船模以接近全速前进时, 兴波阻力影响会很大, 这样在进行船舶设计时就要考虑到这点, 严格按照相关的标准进行设计.

### 2.2 总阻力系数的敏感性分析

根据敏感性分析的基本原理和  $Re, Fr$  数的取值范围, 定义敏感因子

$$S_1 = \frac{\partial \lg C_D}{\partial \lg Re}, \quad S_2 = \frac{\partial C_D}{\partial Fr} \quad (14)$$

分析结果如图 5 和图 6 所示.

图 5 说明总阻力系数  $C_D$  在  $Re < 10^{2.5}$  时敏感因子  $S_1$  的值才会比较大, 但是实际有意义的  $Re$  数区间为  $Re > 10^5$ , 从图 5 中可以看出, 此时的敏感因

子  $S_1$  的值很小, 因此对雷诺数不敏感. 综上所述, 在 Wigley 船模的阻力实验时, 即使摩阻仍占总阻力的一定比例, 但仍可以忽略总阻力系数  $C_D$  对  $Re$  数的敏感依赖性, 即不考虑  $Re$  数的相似.

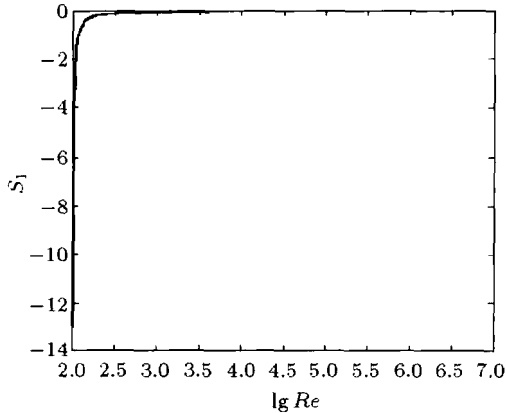


图 5 总阻力系数  $C_D$  对  $Re$  数的敏感性  
Fig.5 The sensitivity between  $C_D$  and  $Re$

图 6 显示出, 当  $0.32 < Fr < 0.4$  时, 总阻力系数  $C_D$  对  $Fr$  的敏感性很强, 而且随着船速的增大, 这种敏感性更加明显. 如前所述,  $Fr$  数有意义的范围为  $0 < Fr < 0.4$ , 因此, 当船模速度很高时, 或者说当  $Fr > 0.32$  时, 即使波阻还未构成总阻力的主要部分, 在船模实验或者工程应用中, 仍必须保证  $Fr$  数相似.

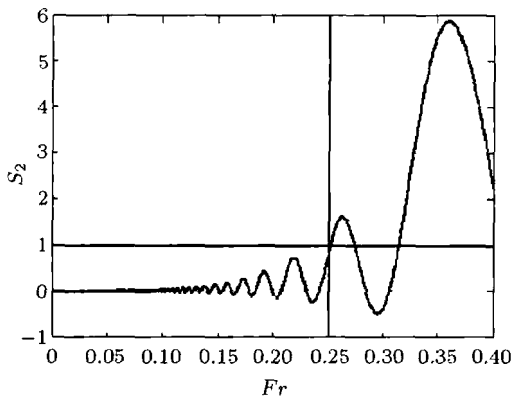


图 6 总阻力系数  $C_D$  对  $Fr$  数的敏感性  
Fig.6 The sensitivity between  $C_D$  and  $Fr$

### 3 剪切流中对称 Joukowsky 翼型的敏感性分析

#### 3.1 计算模型

由升力系数及力矩系数公式<sup>[7]</sup>, 进行剪切流中

的 Joukowsky 对称翼型的敏感性分析

$$\left. \begin{aligned}
 C_L &= \frac{Y}{\frac{1}{2}\rho U_0^2 c^2} = 2\pi[l_0 \sin \alpha + K(l_1 + l_2 \cos 2\alpha) + \\
 &\quad K^2(l_3 \sin \alpha + l_4 \sin 3\alpha)] \\
 C_{M_0} &= \frac{-M_0}{\frac{1}{2}\rho U_0^2 c^2} = \frac{\pi}{2} \left[ \frac{m_0}{2} \sin 2\alpha + \right. \\
 &\quad K(m_1 \cos \alpha + m_2 \cos 3\alpha) + \\
 &\quad \left. K^2(m_3 \sin 2\alpha + m_4 \sin 4\alpha) \right]
 \end{aligned} \right\} (15)$$

确定力矩系数前的负号是为了同通常规定失速力矩为正相一致, 其中  $l_0, l_1, l_2, l_3, l_4$  和  $m_0, m_1, m_2, m_3, m_4$  的定义如附录所示. 由上述关系式, 可以将  $C_L, C_{M_0}$  简化成 3 个无量纲控制参量的函数, 其分别为攻角  $\alpha$ , 无量纲的来流涡度或剪切强度  $K$  及无量纲翼型厚度  $\epsilon$ .

本文主要考虑对称 Joukowsky 翼型的升力和力矩对无量纲的来流涡度或剪切强度  $K$  的敏感性, 这样得出的结果有助于了解切变风或起飞、落地时翼型的气动性能, 这对于实际翼型的设计将有指导意义. 实际上, 当飞机在起飞、降落过程中, 飞机通过大气边界层的剪切流动区, 10 m 高度的风速可以达到 20 m/s, 此时的速度剪切为 2(1/s); 考虑到机翼最大的来流速度约为 100 m/s, 且弦长约为 m 的量级, 因此无量纲速度梯度  $K$  的取值范围为  $0 < K < 0.1$ , 本文将重点研究这一范围内升力系数  $C_L$  和力矩系数  $C_{M_0}$  对  $K$  的相关特性.

#### 3.2 计算结果

根据上述的计算公式, 分别定义敏感因子, 并得到不同情形下无量纲的来流涡度或剪切强度  $K$  的敏感性区间, 如图 7 和图 8 所示.

图 7 说明了无量纲速度梯度  $K$  的大小实际代表了近地面剪切风效应的大小, 随着剪切效应的增强, 在固定的无量纲翼型厚度  $\epsilon$  的情况下, 升力系数  $C_L$  对无量纲涡度  $K$  的敏感因子  $S_1$  其数值大小基本不变, 但是随着  $\epsilon$  的增大,  $S_1$  也明显增加, 而且此种敏感性随着攻角  $\alpha$  的增大逐渐减小, 当  $\epsilon = 3.0, \alpha = 5^\circ$  时,  $S_1$  基本在其最大值 3.0 附近徘徊; 当  $\epsilon = 0.5, \alpha = 20^\circ$  时,  $S_1$  基本在其最小值 0.8 附近徘徊. 即攻角  $\alpha$  越小、无量纲翼型厚度  $\epsilon$  越大,  $C_L$  对  $K$  的敏感性越强.

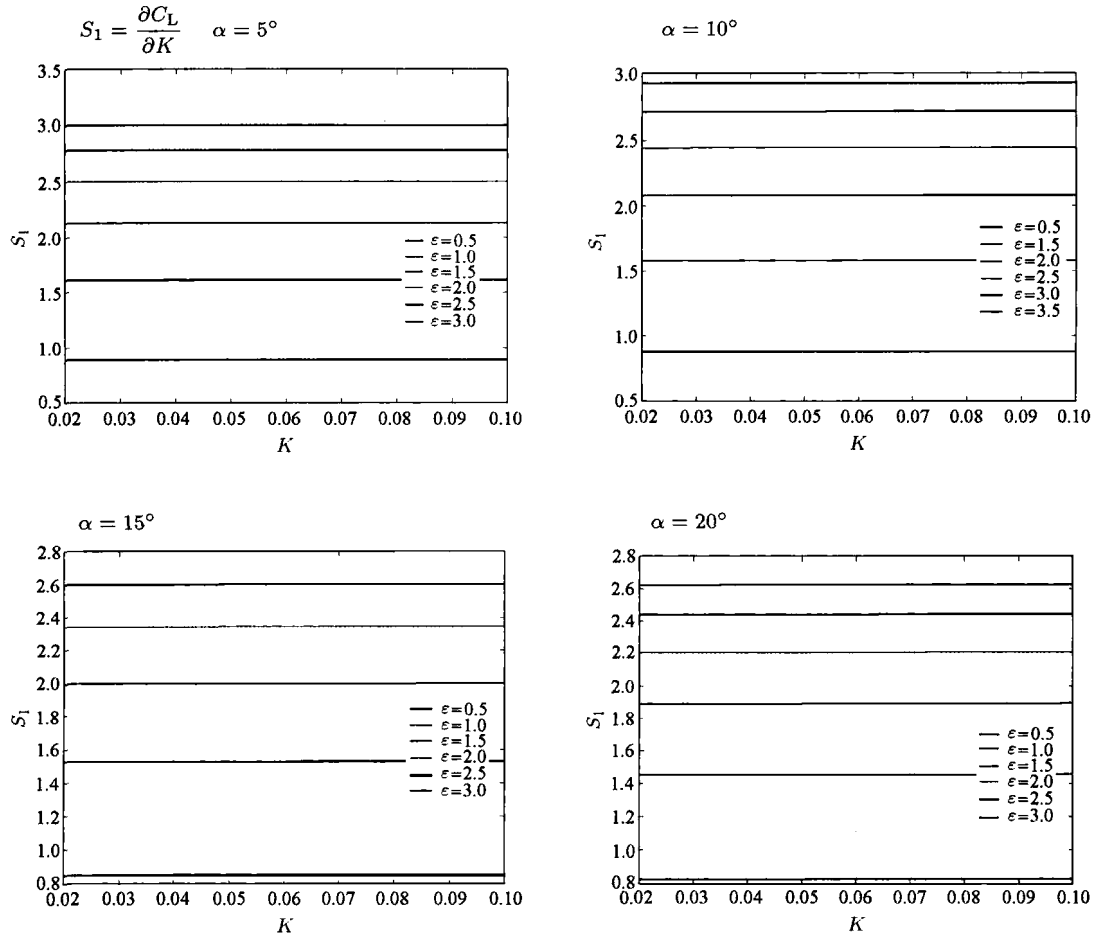


图 7 不同的无量纲翼型厚度  $\epsilon$  情况下，升力系数  $C_L$  对  $K$  的敏感性

Fig.7 The sensitivity of  $C_L$  to  $K$  with different  $\epsilon$

图 8 说明了力矩系数  $C_{M_0}$  对无量纲涡度  $K$  的敏感因子  $s_2$  在一定的  $\epsilon$  情况下，随着  $K$  的增大呈现出直线式的增加，但是其敏感因子的数值整体来

说并不大，明显得出  $s_2 < s_1$ ，因此，飞行时应更加关注风切变对于升力系数的影响。

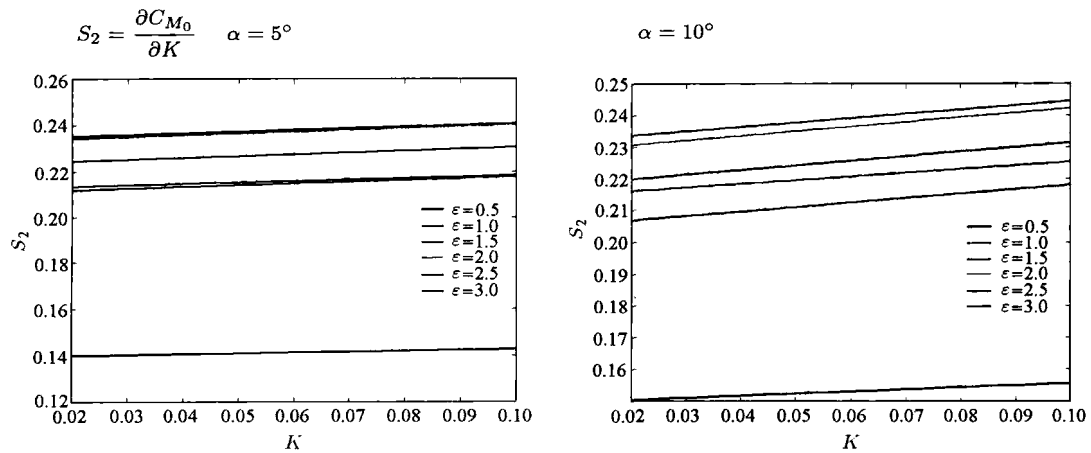


图 8 不同的无量纲翼型厚度  $\epsilon$  情况下，力矩系数对  $K$  的敏感性

Fig.8 The sensitivity of  $C_{M_0}$  to  $K$  with different  $\epsilon$

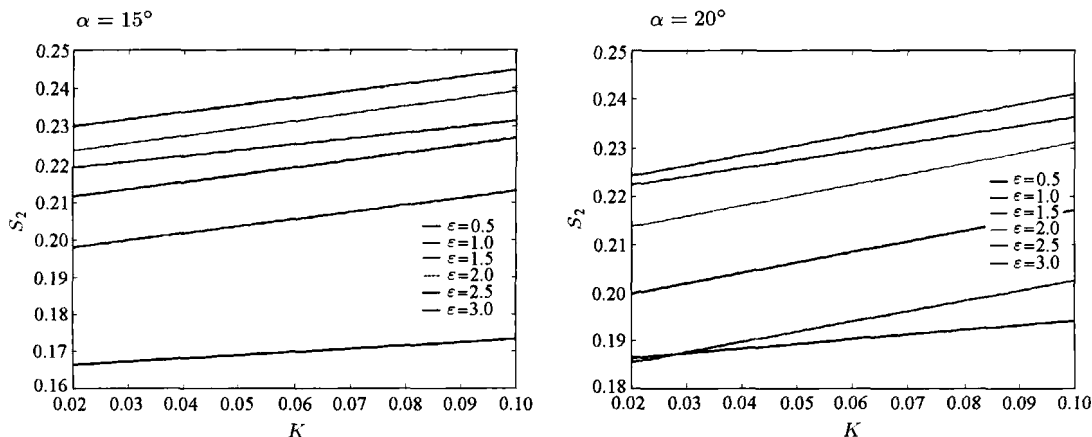


图 8 不同的无量纲翼型厚度  $\epsilon$  情况下, 力矩系数对  $K$  的敏感性 (续)

Fig.8 The sensitivity of  $C_{M_0}$  to  $K$  with different  $\epsilon$  (continued)

### 4 交变流动与换热的敏感性分析

脉冲管制冷机是一种新型的回热式制冷机, 它取消了 Stirling 制冷机在低温端的运动部件排出器, 以“气体活塞”代替真实活塞, 这一改变的最大优点是使得整机几乎没有振动, 有利于提高可靠性和延长使用寿命. 此外, 由于采用了恰当的相位移技术, 相应提高了系统的制冷系数 COP 值 (表征系统的输出功率与输入功率的比值). 脉冲管制冷机的这些显著优点使得它成为适合空间应用的新一代低温制冷机, 目前在效率方面也已经逐步赶上或超过 Stirling 制冷机.

脉冲管制冷机主要由线性压缩机、蓄冷器、脉冲管、换热器和调相机构组成, 如图 9 所示. 通过内部工作气体的振荡与回热器的固体介质热相互作用产生时均能量效应, 从而在蓄冷器与脉冲管的连接处 (即制冷机的冷端换热器部位) 产生制冷效应. 与稳定流动所不同的是, 脉冲管制冷机内部经历着交变气体的流动和压力变化 [8-9], 同时交变流动过程中工作气体的压力和流量都体现出周期性的波动特性, 因此在脉冲管制冷机内部各处, 二者都具有不同的相位, 相位差是脉冲管制冷机中一个非常重要的参数.

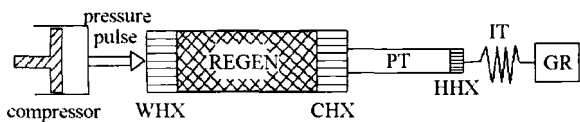


图 9 惯性管型脉冲管制冷机

Fig.9 Schematic of pulse tube cryocooler

由于交变流动与换热过程的复杂性, 尤其是在大振幅、高频率的工作条件下, 使得在脉冲管制冷

机的模拟实验或其工业应用过程中, 满足所有的相似参数是不可能的. 因此我们必须确定哪些相似参数是主要的, 而哪些是次要的.

#### 4.1 交变流动控制方程及计算模型

##### 4.1.1 交变流动无量纲方程组

脉冲管制冷机交变流动无量纲方程组

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{t}} + \frac{1}{Sr} \frac{\partial}{\partial \bar{x}_i} (\bar{\rho} \bar{v}_i) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \bar{t}} (\bar{\rho} \bar{v}_i) + \frac{1}{Sr} \frac{\partial}{\partial \bar{x}_i} (\bar{\rho} \bar{v}_i \bar{v}_j) &= -\frac{1}{\gamma Sr Ma^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}_i} + \\ &\quad \frac{1}{Sr Re} \frac{\partial}{\partial \bar{x}_j} \left( 2\bar{\mu} \bar{e}_{ij} - \frac{2}{3} \bar{\mu} \bar{e}_{kk} \delta_{ij} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \bar{t}} (\bar{\rho} \bar{E}) + \frac{1}{Sr} \frac{\partial}{\partial \bar{x}_i} (\bar{\rho} \bar{E} \bar{v}_i) &= \\ &\quad -\frac{1}{\gamma Sr Ma^2} \frac{\partial (\bar{p} \bar{v}_i)}{\partial \bar{x}_i} + \\ &\quad \frac{1}{Sr Re} \frac{\partial}{\partial \bar{x}_j} \left[ \bar{v}_i \left( 2\bar{\mu} \bar{e}_{ij} - \frac{2}{3} \bar{\mu} \bar{e}_{kk} \delta_{ij} \right) \right] + \\ &\quad \frac{1}{(1-\gamma) Re Pr Ma^2} \frac{\partial}{\partial \bar{x}_i} \left( \bar{k} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}_i} \right) \end{aligned} \right\} (16)$$

其中, 各无量纲参数定义如下

$$\begin{aligned} \bar{v}_i &= \frac{v_i}{\dot{U}}, \quad \bar{t} = t \cdot \omega, \quad \bar{x}_{i,j} = \frac{x_{i,j}}{L} \\ \bar{\rho}_t &= \frac{\rho_t}{\rho_m}, \quad \bar{p} = \frac{p}{p_m}, \quad \bar{\mu} = \frac{\mu}{\mu_m} \\ \bar{e}_{ij} &= \frac{\dot{U}}{L}, \quad \bar{T} = \frac{T}{T_m} \end{aligned}$$

其中  $\dot{U}$  为压缩机进气速度, 取为压缩机的扫气体积流率  $V$  与接口管道的面积  $A$  之比, 即  $\dot{U} = \dot{V}/A$ ,  $\omega$  为交变流动的圆频率,  $L$  为脉冲管制冷机的特征尺

寸,  $\dot{p}_m$  为压力脉动的幅值,  $\rho_m, \mu_m$  分别为常温下工质的密度和黏度,  $T_m$  为常温 300 K.

压缩机单位时间扫气体积速率的量纲为

$$\left. \begin{aligned} [\dot{V}] &= \left[ \frac{LA}{T} \right] = [L\omega D^2] \\ S_r &= \frac{\omega L}{U} = \frac{2\pi fL}{\dot{V}/A} \\ Re &= \frac{UD}{\nu} = \frac{(\dot{V}/A)D}{\nu} \\ Pr &= \frac{\nu}{a} = \frac{\mu c_p}{k} \\ Ma &= \frac{U}{\sqrt{\gamma R_m T}} = \frac{\dot{V}/A}{\sqrt{\gamma R_m T}} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

上述分析中可以看出, 影响交变流动的流动与换热过程的特征参数有如下几个:  $S_r, Re, Pr, Ma$  (注: 其中气体常数  $\gamma$  对具体的工作介质而言是定值), 其分别表征了流动的非定常性、黏性、换热特性以及可压缩性的影响.

由于  $Pr$  数与工质有着密切的关系, 在实际的工作状态下,  $Pr$  数越低, 脉冲管制冷机的工作效率越高, 但实际运行过程采用的工质是氦气, 此时  $Pr$  数的变化范围很小, 对制冷量等重要参数影响很小, 因此在本文的分析中将忽略  $Pr$  数的影响, 只分析  $S_r, Re, Ma$  的影响 (注: 为了达到高的制冷效率, 必须降低工质的  $Pr$  数, 采用混合工质是一种可靠的选择<sup>[10]</sup>).

#### 4.1.2 计算模型

建立高频脉冲管制冷机的计算模型, 如图 9 所示. 蓄冷器、水冷器、冷端换热器和热端换热器采用了多孔介质模型, 流动模型采用二维层流模型<sup>[11]</sup>, 工作介质氦气假设为理想气体, 采用实际气体参数进行修正.

计算模型包括去除线性压缩机以外的所有部件, 整个系统为一端开口系统, 表 1 是本次计算模型各部件的具体尺寸参数.

表 1 脉冲管制冷机各部件的尺寸参数  
Table 1 Size of pulse-tube cryocooler

Components	Diameter/mm	Length/mm
WHX	25	11
REGEN	25	70
CHX	25	20
PT	12	60
HHX	12	10
IT	2	2000
GR	200	90

#### 4.1.2.1 边界条件

水冷器左端接入的是线性压缩机, 因此左端面作为整个系统的输入边界条件, 其余表面均为固壁边界条件. 整机的充气压力为 3.0 MPa, 输入边界条件采用压力边界条件, 压力脉动为  $0.5 \sin(2\pi ft)$  MPa. 进口气体温度为 300 K, 蓄冷器进口端的水冷器、脉冲管的热端换热器、惯性管和气库的固壁等温边界条件  $T_w = 300$  K; 蓄冷器、冷端换热器和脉冲管的固壁为绝热边界条件 (冷端换热器取为绝热边界条件是为了获得最低温度).

#### 4.1.2.2 蓄冷器的多孔介质模型

在多孔介质模型中, 最重要的参数是孔隙率、黏性阻力系数和惯性阻力系数. 为了能够得到孔隙率、黏性阻力系数和惯性阻力系数的表达式, 根据前人的工作成果, 得到了稳定流动条件下的经验阻力公式

$$\frac{\Delta p}{L} = f_h \frac{\rho u^2}{2D_h} \quad (18)$$

其中  $\Delta p$  为蓄冷器进出口两端的压差,  $L$  为蓄冷器的特征长度,  $f_h$  为蓄冷器的阻力系数,  $f_h = A/Re + B$ ,  $D_h$  为特征尺度,  $D_h = D_w \varepsilon / (1 - \varepsilon)$ ,  $D_w$  为丝网的丝径,  $\varepsilon$  为孔隙率. 所以阻力公式可以化为

$$\frac{\Delta p}{L} = \frac{\mu u}{\beta} + \frac{C}{2} \rho u^2 \quad (19)$$

式中, 右边第 1 项为黏性阻力项, 第 2 项为惯性阻力项; 黏性阻力系数为  $\beta = 2D_h^2/A$ , 惯性阻力系数为  $C = B/D_h$ . 取  $u$  为蓄冷器内部的平均速度, 可以根据两端的压力变化及两端的速度变化求得黏性阻力系数和惯性阻力系数, 即可得出  $\beta, C$  的数据, 将其作为输入参数. 本算例中丝网数目为 400 目, 丝径  $D_w$  为 30  $\mu\text{m}$ , 孔隙率为 0.7.

#### 4.1.2.3 敏感性分析的基本参数设置

对于相似参数的数值敏感性分析, 需要将得到的计算结果无量纲化, 并对相应的无量纲参数取 1% 的基本变化量, 需要对运行频率、活塞时均运动速度进行 1% 的变化, 这样就可以根据得到的无量纲目标函数进行敏感性分析.

## 4.2 计算结果及讨论

### 4.2.1 计算结果与实验结果对比

根据陈厚磊<sup>[12]</sup>的实验数据, 将数值模拟结果与实验结果进行了比较, 以不同运行频率下的冷端换热器最低温度作为对象, 如图 10 所示, 从图中可以看出, 数值模拟结果的趋势与实验结果一致, 定

量上还有 2 K~5 K 的误差, 两者的结果基本吻合, 这为下面进行的敏感性分析奠定了基础.

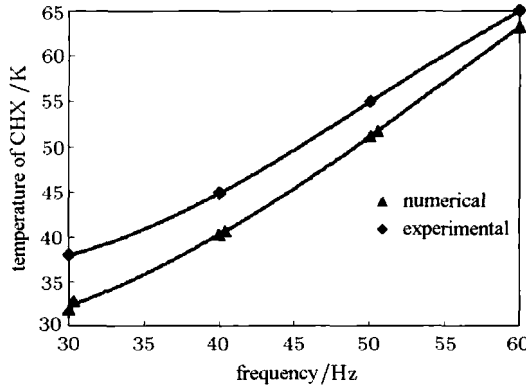


图 10 实验结果与数值模拟结果比较

Fig.10 Comparison of the experimental results and the numerical results

4.2.2 无量纲参数对冷端换热器最低温度的敏感性

以 Fluent6.3 为计算平台, 分别计算了不同频率及进气速度条件下, 冷端换热器最低温度的变化情况, 并以计算结果为基础, 对所有参数无量纲化, 并进行敏感性分析.

4.2.2.1  $Sr$  数的敏感性

在不同的运行频率下, 冷端换热器的最低温度会呈现出较大的变化, 图 11 为冷端换热器最低温度随着运行频率变化的情况.

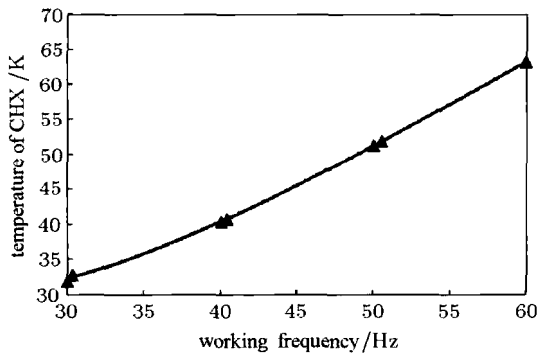


图 11 运行频率与冷端换热器最低温度的关系

Fig.11 Relationship between the operation frequency and the lowest temperature of CHX

以冷端换热器的最低温度  $T_c$  为目标函数, 以表征流动非定常特性的  $Sr$  数为分母, 可以得到敏感因子  $S_1$ , 如下式所示

$$S_1 = \left| \frac{\partial T_c}{\partial Sr} \right| \quad (20)$$

其中,  $\dot{U}$  为线性压缩机的进口速度,  $\dot{U} = 100 \text{ m/s}$ , 由此可以得到  $Sr$  数的敏感区间, 如图 12 所示.

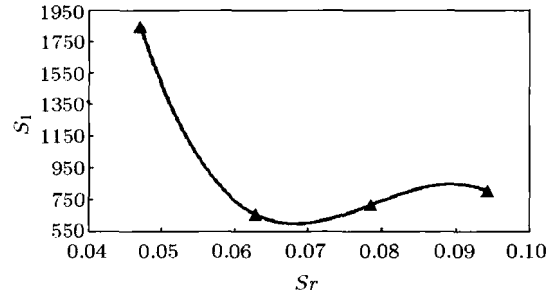


图 12  $Sr$  数对冷端换热器最低温度的敏感性

Fig.12 Sensitivity of the lowest temperature of CHX to  $Sr$

图 12 表明  $Sr$  数的敏感因子很大, 在脉冲管制冷剂的所有运行频率中, 其敏感因子  $S_1$  的值都在 500 以上, 这说明  $Sr$  数对冷端换热器的最低温度的敏感性很强, 因此在做模型实验以及脉冲管制冷剂的工业化和小型化中, 需要严格保证相似.

4.2.2.2  $Re$  数的敏感性

不同的压缩机的扫气体积, 即不同的进气速度, 会导致冷端换热器的最低温度出现变化, 图 13 为冷端换热器最低温度随着进气速度变化的情况.

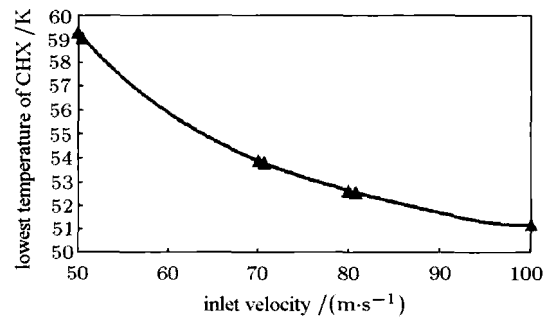


图 13 进气速度与冷端换热器最低温度的关系

Fig.13 Relationship between the inlet velocity and the lowest temperature of CHX

以冷端换热器的最低温度为目标函数, 以表征流动流态的  $Re$  数为分母, 可以得到敏感因子  $S_2$ , 如下式所示

$$S_2 = \left| \frac{\partial T_c}{\partial Re} \right| \quad (21)$$

其中  $\dot{U}$  定义为线性压缩机的进气速度, 由此可以得到  $Re$  数的敏感区间, 如图 14 所示.

图 14 说明在进气速度小于  $100 \text{ m/s}$  的情况下,  $Re$  数小于 1600, 因此脉冲管制冷机的内部流动状态基本处于层流状态, 这也与计算前采用的层流模型假设相符合. 另外, 在  $Re$  数的整个变化区间, 敏感



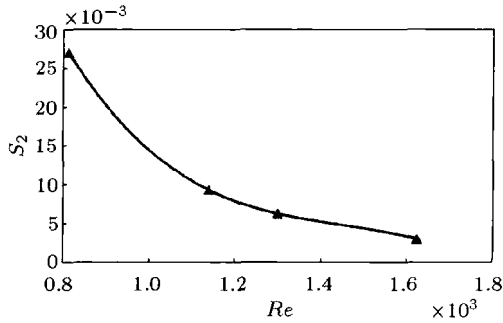


图 14  $Re$  数对冷端换热器最低温度的敏感性

Fig.14 Sensitivity of the lowest temperature of CHX to  $Re$

因子  $S_2$  的值很小, 远远小于  $Sr$  数敏感因子  $S_1$  的值, 因此  $Re$  数的敏感因子很小, 说明黏性的影响不大, 可以放松相似要求。

4.2.2.3  $Ma$  数的敏感性

取线性压缩机的进气速度为变化量, 以冷端换热器的最低温度为目标函数, 可以得到  $Ma$  数的敏感因子  $S_3$

$$S_3 = \left| \frac{\partial t}{\partial Ma} \right| \quad (22)$$

其中定义系统初始温度  $\bar{T} = 300\text{ K}$ , 由此可以得到  $Ma$  数的敏感区间, 如图 15 所示。

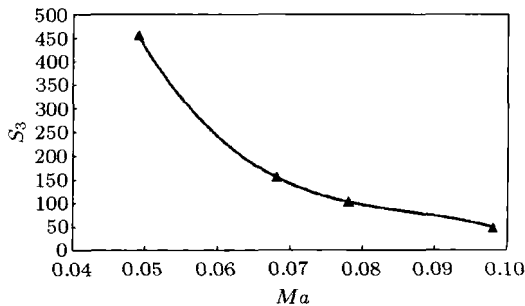


图 15  $Ma$  数对冷端换热器最低温度的敏感性

Fig.15 Sensitivity of the lowest temperature of CHX to  $Ma$

图 15 阐明了脉冲管制冷机内部的交变流动的  $Ma$  数低于 0.1, 属于微可压缩流动, 正是这一特殊的流动, 才导致交变流动与传热的复杂性。另外,  $Ma$  数的敏感因子处于比较大的量级, 远远大于  $Re$  数的敏感因子, 因此在整个流动过程中, 需要严格保证  $Ma$  数的相似。

4.2.3 无量纲参数对冷端换热器 80 K 温区制冷量的敏感性

在冷端换热器最低温度计算结果的基础上, 对处于最低温度情况下的冷端换热器壁面输入热流, 使得冷端换热器稳定在 80K 温区, 从而获得 80K 温区的制冷量。

以 Fluent6.3 为计算平台, 分别计算了不同频率及进气速度条件下, 脉冲管制冷机制冷量的变化情况, 并以计算结果为基础, 对所有参数进行无量纲化, 进行敏感性分析。

4.2.3.1  $Sr$  数的敏感性

在不同的运行频率下, 冷端换热器的最低温度会呈现出较大的变化, 图 16 为脉冲管制冷机制冷量随着运行频率变化的情况。

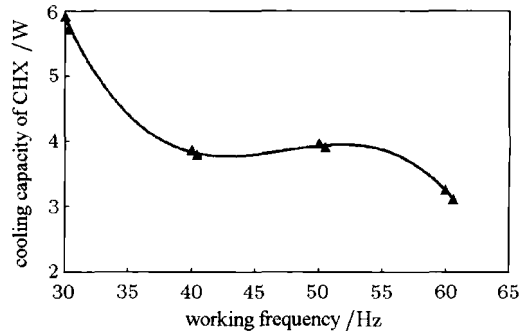


图 16 运行频率与制冷量的关系

Fig.16 Relationship between the operation frequency and the cooling capacity

以脉冲管制冷机的制冷量为目标函数, 以表征流动非定常特性的  $Sr$  数为分母, 可以得到敏感因子  $S'_1$ , 如下式所示

$$S'_1 = \left| \frac{\partial w}{\partial Sr} \right| \quad (23)$$

其中定义  $\dot{U} = 100\text{ m/s}$ , 由此可以得到  $Sr$  数的敏感区间, 如图 17 所示。

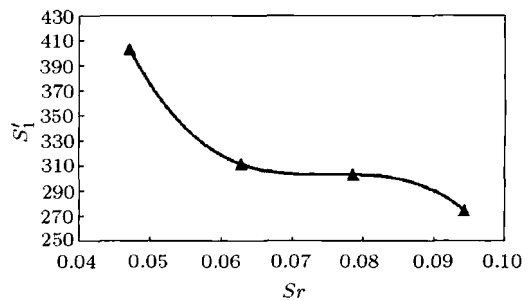


图 17  $Sr$  数对制冷量的敏感性

Fig.17 Sensitivity of the cooling capacity to  $Sr$

在以 80 K 温区的制冷量为目标函数的情况下, 图 17 表明  $Sr$  数的敏感因子很大, 因此需要在实验过程及脉冲管制冷机的小型化和工业化的过程中严格保证相似; 另外, 图 17 呈现出与以冷端换热器最低温度为目标函数的曲线不同的变化趋势, 即随着频率的增加, 敏感因子  $S'_1$  在逐渐变小。

此外，由于脉冲管制冷机的相位差对于整机的制冷效果有着重要的影响，尤其是惯性管对于调节相位起着决定性的作用，因此本文计算了惯性管冷端压力波与质量流量之间的相位差对频率的变化关系。从图 18 中可以看出，在频率高于 35 Hz 后，频率越高，脉冲管冷端的压力波与质量流量之间的相位差越小，说明脉冲管制冷机的制冷效果越好。

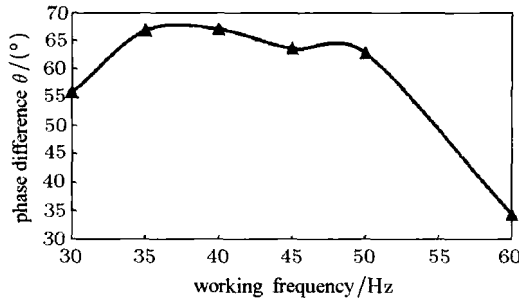


图 18 不同频率对冷端压力波与质量流量之间的相位差影响  
Fig.18 Effects of phase difference between the pressures wave and the mass flow wave

对上述计算结果做敏感性分析，定义敏感因子  $S''_1 = \left| \frac{\partial \cos \theta_c}{\partial Sr} \right|$ ，可以得到如图 19 所示的敏感因子  $S''_1$ 。

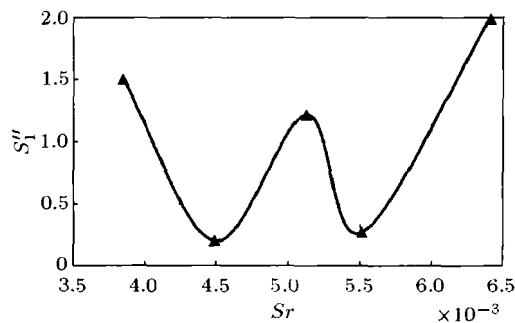


图 19  $Sr$  数对惯性管冷端压力波与质量流量的相位差的敏感性  
Fig.19 Sensitivity of phase difference between the pressures wave and the mass flow wave to  $Sr$

图 19 说明当  $12 < Sr < 17.5$  时， $S''_1 < 1$ ，在这个范围内，惯性管冷端压力波与质量流量之间的相位差对  $Sr$  数的敏感性不是很高，在模拟实验的时候可以适当放松要求；而当  $Sr < 12$ ， $Sr > 17.5$ ，随着工作频率的增加，相位差对  $Sr$  数的敏感性是呈现增加趋势的， $S_1 > 1$ ，在这个范围内，相位差对  $Sr$  数的敏感性很高，因此需要严格保证  $Sr$  数相似。

4.2.3.2  $Re$  数的敏感性

不同的压缩机的扫气体积，即不同的进气速度，会导致脉冲管制冷机制冷量出现变化，图 20 为制冷量随着进气速度变化的情况。

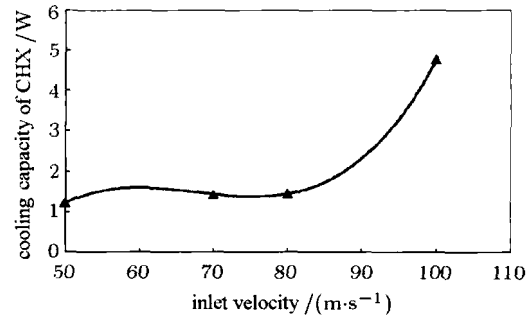


图 20 进气速度与冷端换热器最低温度的关系  
Fig.20 Relationship between the inlet velocity and the cooling capacity

以冷端换热器的最低温度为目标函数，以表征流动流态的  $Re$  数为分母，可以得到敏感因子  $S'_2$ ，如下式所示

$$S'_2 = \left| \frac{\partial w}{\partial Re} \right| \tag{24}$$

由此可以得到  $Re$  数的敏感区间，如图 21 所示。

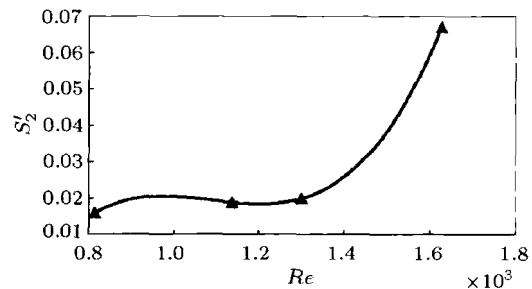


图 21  $Re$  数对制冷量的敏感性  
Fig.21 Sensitivity of the cooling capacity to  $Re$

以 80 K 温区制冷量为目标函数的敏感性表征中，图 22 中表述的敏感因子的值很小，因此  $Re$  数的敏感因子  $S'_2$  很小，说明黏性的影响不大，可以放松相似要求，这与图 14 的变化趋势是相同的。

4.2.3.3  $Ma$  数的敏感性

这里同样取进气速度为变化量，以制冷量为目标函数，可以得到  $Ma$  数的敏感因子  $S'_3$

$$S'_3 = \left| \frac{\partial w}{\partial Ma} \right| \tag{25}$$

由此可得  $Ma$  数的敏感区间，如图 22 所示。

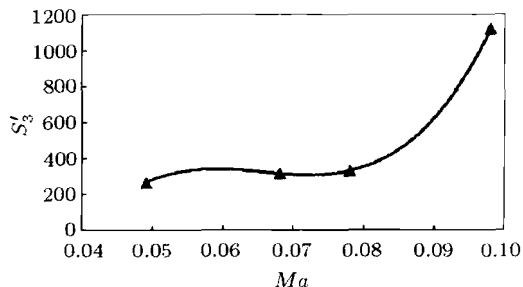
图 22  $Ma$  数对制冷量的敏感性Fig.22 Sensitivity of the cooling capacity to  $Ma$ 

图 22 表明  $Ma$  数的敏感因子处于比较大的量级, 远远大于  $Re$  数的敏感因子, 因此在整个流动过程中, 需要严格保证  $Ma$  数的相似。

### 4.3 小结

对高频惯性管型脉冲管制冷机进行数值模拟, 分别给出了不同的  $Sr$ ,  $Re$ ,  $Ma$  对冷端换热器最低温度及 80 K 温区的制冷量的影响, 同时采用敏感性分析方法, 定量地得到了相似参数的主次关系, 并得到如下结论:

(1) 以冷端换热器最低温度及 80 K 温区的制冷量为目标函数, 得到  $Sr$  及  $Ma$  的敏感因子很大, 也就是说,  $Sr$  及  $Ma$  对于冷端换热器最低温度及 80 K 温区的制冷量的敏感性很高, 需要严格保证相似。

(2) 对于  $Re$  数的敏感性分析, 得到的结果是, 无论对于以冷端换热器最低温度为目标函数, 还是以 80 K 温区的制冷量为目标函数, 其敏感因子都处于很小的量级, 说明  $Re$  数对于冷端的最低温度及 80 K 温区制冷量不敏感, 说明黏性的影响不大, 可以放松相似要求。

(3) 惯性管冷端压力波与质量流量之间的相位差对于脉冲管制冷机的制冷效果有着重要影响, 经敏感性分析可得, 当  $Sr < 12$  及  $Sr > 17.5$ ,  $Sr$  数对惯性管冷端压力波与质量流量之间的相位差的敏感性很高, 因此需要严格保证  $Sr$  数相似。

## 5 结 论

本文首先论述了相似参数敏感性分析的具体方法, 定义了对每个相似参数的绝对或相对敏感性因子, 通过敏感因子的大小来定量地确定对应于具体无量纲参数的敏感区间。同时, 本文给出了通过理论公式或数值计算两种途径进行分析的实例, 得到了如下结论:

(1) 对于 Wigley 船模阻力的分析, 关注的  $Re$  数区间为  $Re > 10^5$ ,  $Fr$  数区间为  $0 < Fr < 0.4$ 。通过相似参数敏感性分析可知, Wigley 船模的阻力实验可以忽略总阻力系数  $C_D$  对  $Re$  数的敏感性, 而当  $Fr > 0.32$  时, 在船模实验或者工程应用中, 必须保证  $Fr$  数相似, 因此, 在船模速度处于高速状态时, 保证波阻相似就可以满足工程实际问题的要求。

(2) 对于剪切流中对称 Joukowsky 翼型升力系数的分析, 综合考虑实际情况, 关注无量纲速度剪切  $K$  的影响。考虑到地表附近的风切变、飞机降落时的速度以及机翼的长度, 无量纲速度梯度  $K$  的取值范围为  $0 < K < 0.1$ 。通过对这一范围内  $K$  的敏感性分析可以得到结论, 攻角  $\alpha$  越小、无量纲翼型厚度  $\varepsilon$  越大,  $C_L$  对  $K$  的敏感性越强; 力矩系数  $C_{M_0}$  对无量纲速度梯度  $K$  的敏感性较弱。

(3) 本文考察了高频惯性管型脉冲管制冷机内部交变流动与换热的分析, 着重探讨了惯性管型脉冲管制冷机中交变流动与换热的无量纲参数  $Sr$ ,  $Re$ ,  $Ma$ , 分别定量地得到了这 3 个参数对冷端最低温度以及冷端制冷量为目标函数的敏感性区间, 结论是  $Sr$ ,  $Ma$  数在模型实验中必须严格保证相似, 而  $Re$  数则可以适当放松要求, 同时当  $Sr < 12$  及  $Sr > 17.5$ ,  $Sr$  数对惯性管冷端压力波与质量流量之间的相位差的敏感性很高, 上述分析结论与实验结果吻合良好, 为实际工程应用提供了一定依据。

## 参 考 文 献

- Zhou JF, Li JC. An optimization approach to the similarity criteria of flows and its application. *Progress in Nature Science*, 2006, 16(3): 241-247
- 郑哲敏, 谈庆明. 相似理论与模化. 郑哲敏文集. 北京: 科学出版社, 2004. 777-808 (Zheng Zhemin, Tan Qingming. Scaling criteria and its modeling. Zheng Zhemin Collected Works. Beijing: Science Press, 2004. 777-808 (in Chinese))
- Mackinnon RJ, Schimmel KA, Loehr CA, et al. Scaling in situ bioremediation by application of multiphase, multi-component transport theory. *Chemical Engineering Communication*, 1997, 158: 123-156
- Bai YH, Zhou JF, Li JC. Numerical sensitivity analysis and partial similarity of porous media flows. In: *Proceeding of the Fourth International Conference on Fluid Mechanics*, Dalian, 2004. 397-402
- 潘伦胜, 庄业高. 低速船舶兴波阻力的分析及计算. 水动力学研究与进展 A 辑, 1984, 5: 66-75 (Pan Lunsheng, Zhuang Yegao. Analysis and calculation of wave making resistance of low-speed ship. *Journal of Hydrodynamics A*. 1984, 5: 66-75 (in Chinese))

- 6 Eiichi B, Katsuyoshi T. A study on free-surface flow around bow of slowly moving full forms. *J Soc Naval Arch*, 1975, 137: 139-145
- 7 Tsien HS. Symmetrical Joukowski airfoils in shear flow. *Q Appl Math*, 1943, 1: 130-148
- 8 Ravex A. Recent development in cryocooler. In: 20th International Congress of Refrigeration, IIR/IIF, 1999. 617-620
- 9 Radebaugh R. Advances in cryogenics. In: Proc. ICEC16/ICMC, Elsevier Science, 1996. 33-35
- 10 金涛, 陈国邦, 应哲强等. 热声制冷中的工质选择. 低温工程, 1999, 4: 37-43 (Jin Tao, Chen Guobang, Ying Zheqiang. The selection of the refrigerant in thermoacoustic refrigeration. *Cryogenics*, 1999, 4: 37-43 (in Chinese))
- 11 赵密广. 高频脉冲管制冷机惯性管的数值模拟及整机实验研究. [博士论文]. 北京: 中国科学院理化技术研究所, 2006. 39-42 (Zhao Miguang. Numerical simulation of inertance tube and experimental of high frequency pulse tube cryocoolers. [PhD Thesis]. Beijing: Institute of Physics and Chemistry, CAS. 2006. 39-42 (in Chinese))
- 12 侯小锋. 大冷量高频脉冲管制冷机理论与实验研究. [博士论文]. 北京: 中国科学院理化技术研究所, 2007. 63-82 (Hou Xiaofeng. Theoretical and experimental study of large cooling capacity high frequency pulse tube cryocoolers. [PhD Thesis]. Beijing: Institute of Physics and Chemistry, CAS. 2007. 63-82 (in Chinese))

## 附 录

剪切流中的 Joukowski 对称翼型的敏感性分析中的相关公式

$$l_0 = \frac{1}{h}, \quad l_1 = \frac{\lambda(\lambda + 2/a)}{8h^2(1 + \lambda)}, \quad l_2 = \frac{\lambda^2(2 + 1/a)}{8h^2(1 + \lambda)}$$

$$l_3 = -\frac{\lambda}{64h^3a(1 + \lambda)} \left[ \frac{1}{a^2(1 + \lambda)} - 2\lambda + \lambda^2 \right]$$

$$l_4 = \frac{\lambda}{64a^2h^3} \left[ 1 - \frac{\lambda}{(1 + \lambda)^2} \right]$$

$$m_0 = \frac{1}{ah^2} \left[ \frac{1}{a} + \frac{\lambda}{1 + \lambda} \right]$$

$$m_1 = \frac{1}{8ah^3} \left[ \frac{1}{a} + \frac{\lambda}{2(1 + \lambda)} \left( 1 + \lambda + \frac{\lambda}{a(1 + \lambda)} \right) \right]$$

$$m_2 = -\frac{1}{8ah^3} \left[ \frac{1}{a} \left( 1 - \frac{3}{2}\lambda \right) + \frac{\lambda}{2(1 + \lambda)} \cdot \left( \frac{2}{a^2} - \lambda^2 \frac{2 + 1/a}{1 + \lambda} \right) \right]$$

$$m_3 = -\frac{1}{64ah^4} \left[ \frac{1}{1 + \lambda} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{\lambda^2}{2a^2(1 + \lambda)^2} \right) - \frac{\lambda^2}{2a(1 + \lambda)^2} \right]$$

$$m_4 = \frac{1}{64ah^4} \left\{ 1 + \lambda - \frac{\lambda}{a^2(1 + \lambda)} \left( 1 + \frac{\lambda}{a(1 + \lambda)} \right) + \frac{\lambda^2(1 + \lambda^2)}{2a(1 + \lambda)(1 - \lambda^2)} - \frac{1}{4a^2} \left[ \frac{1}{a} + \frac{1}{1 + \lambda} \right] + \frac{9\lambda^2}{4a^2(1 + \lambda)} \right\}$$

$$a = 1 + \varepsilon, \quad \lambda = \frac{\varepsilon}{a} = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}, \quad h = \frac{1}{a} + \frac{\lambda^2}{1 + \lambda}$$

(责任编辑: 刘 丽)

## SENSITIVITY ANALYSIS OF SIMILARITY CRITERION NUMBER AND ITS APPLICATIONS<sup>1)</sup>

Xu Ben Li Jiachun

(Key Laboratory of Environmental Mechanics, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

**Abstract** Based on the theoretical formula and numerical simulation, the sensitivity analysis of scaling law are performed in complex flows, such as the resistance of Wigley ship, the lift of symmetrical Joukowski airfoil in shear flow, and the oscillating flow and heat transfer in Pulse-Tube Cryocooler (PTC). The computational results are well compared with those of experiments. The sensitivity analysis facilitates us to identify which factors in terms of dimensionless form are more important and should be paid more attention to. These conclusions can be referred to in engineering applications.

**Key words** scaling law, sensitivity factor, Wigley ship, Joukowski airfoil, pulse tube cryocooler

Received 5 May 2010, revised 15 February 2011.

1) The project supported by the Major Program of National Natural Science Foundation of China (50890182).