

文章编号: 1000-4750(2011)03-0205-04

# 固定边载流矩形板的磁弹性效应分析

\*边宇虹, 白象忠, 田振国

(1. 燕山大学建筑工程与力学学院, 秦皇岛 066004; 2. 中国科学院力学研究所非线性力学国家重点实验室, 北京 100080)

**摘 要:** 针对在电磁场和机械场耦合作用下的载流矩形板的二维磁弹性问题进行了研究。在给出矩形薄板的磁弹性非线性运动方程、几何方程、物理方程、电动力学方程和 Lorentz 力表达式的基础上, 建立了差分格式和线性化迭代方程, 给出了这些方程的数值解系统, 并以固定边矩形板为例, 计算了该板在电磁场和机械载荷耦合作用下的应力及变形, 研究了侧向电流和外磁场强度对该板的磁弹性效应。结果表明: 通过改变电磁场和通电电流的相关参数, 来达到控制薄板变形及应力-应变状态, 提高薄板构件的承载能力, 以达到工程结构优化设计的目的。

**关键词:** 耦合场; 矩形薄板; 二维问题; 非线性; 磁弹性

中图分类号: O441; O482.6 文献标识码: A

## MAGNETO-ELASTIC EFFECT ANALYSIS OF CURRENT-CARRYING RECTANGULAR PLATE WITH FOUR EDGES FIXED

\*BIAN Yu-hong, BAI Xiang-zhong, TIAN Zhen-guo

(1. College of Civil Engineering & Mechanics, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China;

2. State Key Laboratory of Nonlinear Mechanics, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

**Abstract:** The two-dimensional magnetic-elasticity problem of a current-carrying rectangular plate under the coupled actions of the electromagnetic field and the mechanical field is studied. Based on the nonlinear magneto-elastic kinetic equations, the geometric equations, the physical equations, the electrodynamics equations and the expressions of Lorentz force of thin rectangular plate, the corresponding difference form and linearized iteration equations are developed. And the numerical solutions for these equations are obtained. A rectangular plate with four edges fixed is used as an example to demonstrate the stresses and the deformations under the coupled actions of the electromagnetic field and mechanical load. The magneto-elastic effect on the plate by the side current and electromagnetic induction density is studied. The results show that the states of the deformation, the stress and the strain in thin plate can be controlled by changing relevant parameters of the magnetic field strength, and thus the current density and carrying capacity of thin plate components can be enhanced to accomplish an optimum design of engineering structures.

**Key words:** coupled field; thin rectangular plate; two-dimensional problem; nonlinear; magnetic-elasticity

由于航空、航天、化工、原子及核工业装置的防护系统、磁热加工、无损探伤、供电器械、仪器仪表、磁力加工等方面实际应用的需要, 尤其是薄

壁结构的强度、刚度、稳定性及可靠性设计、结构优化设计的需要, 使弹性体耦合场理论及其应用的研究在 20 世纪末有了飞速发展。磁弹性理论在许

收稿日期: 2009-08-18; 修改日期: 2010-01-26

基金项目: 国家自然科学基金项目(50275128); 河北省自然科学基金项目(A2006000190)

作者简介: \*边宇虹(1962—), 女, 河北人, 教授, 博士, 从事板壳磁弹性理论研究(E-mail: bianyuhong@163.com);

白象忠(1942—), 男, 辽宁人, 教授, 学士, 博导, 从事耦合场理论及其应用研究(E-mail: baixiangzhong@sina.com);

田振国(1975—), 男, 山东人, 副教授, 博士, 从事磁弹性理论研究(E-mail: tianzhenguo@163.com).

多高技术领域中有着广泛的应用。电磁场与机械场的耦合效应会引起处在耦合作用下如梁、薄板和薄壳等构件的破坏。因此,对这些构件的磁弹性应力和变形分析是一个重要的理论和实际课题。

目前,关于板壳理论计算与数值分析的成果比较完善<sup>[1-8]</sup>,这些成果为磁弹性理论及其应用的研究打下了良好基础。但是非线性理论研究还不够完备,除梁、板、壳在电磁场中的振动和稳定性问题外,其应力-应变状态的分析非常少见,而且仅仅停留在解一维<sup>[9-11]</sup>(或轴对称)问题的数值解上。因此,对于载流板壳在电磁场中的应力-应变二维问题解的研究成为力学工作者近几年极度关注的研究课题之一。

本文针对在电磁场和机械场耦合作用下的载流矩形板的二维磁弹性问题进行了研究。通过具体算例,得到了固定边矩形板的磁弹性应力与变形的数值解。计算结果表明:通过电磁参量的变换能实现薄板的变形及其应力状态的控制。为改变在电磁场环境下工程结构中矩形薄板的工作状态提供理论分析和数值计算方法。

## 1 基本方程

### 1.1 矩形板的磁弹性运动方程

将 Lorentz 力<sup>[1]</sup>  $\rho f_x$ 、 $\rho f_y$  和  $\rho f_z$  作为质动力载荷加到板的运动方程中,得到板的磁弹性运动方程:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} + P_x + \rho f_x &= \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial S}{\partial x} + P_y + \rho f_y &= \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial(Q_x - N_x \theta_x - S \theta_y)}{\partial x} + \frac{\partial(Q_y - N_y \theta_y - S \theta_x)}{\partial y} + \\ P_z + \rho f_z &= \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x &= \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y &= \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (1)$$

式中:  $h$  为板的厚度;  $t$  为时间变量;  $\rho$  为板的质量密度;  $N_x$ 、 $N_y$ 、 $Q_x$ 、 $Q_y$ 、 $S$ 、 $M_x$ 、 $M_y$  和  $M_{xy}$  为内力分量;  $P_x$ 、 $P_y$ 、 $P_z$  为机械载荷分量;  $u$ 、 $v$ 、 $w$  为位移分量;  $\theta_x$ 、 $\theta_y$  为角位移分量。

### 1.2 矩形板的磁弹性非线性方程

选择  $u$ 、 $v$ 、 $w$ 、 $\theta_y$ 、 $N_y$ 、 $\hat{Q}_y$ 、 $S$ 、 $M_y$ 、 $E_x$  和  $B_z$  作为基本未知函数,根据二维电动力学方程、磁弹性运动方程和 Lorentz 力表达式,同时考虑薄板的几何方程和物理方程,可得如下偏微分方程组:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{2S}{D_N(1-\nu)} - \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \theta_y, \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{N_y}{D_N} - \frac{1}{2} \theta_y^2 - \frac{\nu}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \nu \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= -\theta_y, \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} &= \frac{1}{D_M} M_y + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial N_y}{\partial y} &= \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial S}{\partial x} - (P_y + \rho f_y), \\ \frac{\partial \hat{Q}_y}{\partial y} &= \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{12}{h^2} w - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \\ & (P_z + \rho f_z) - \nu \frac{\partial N_y}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} - \\ & \nu N_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial w}{\partial x} E h \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \\ & \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} E h \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + S \frac{\partial \theta_y}{\partial x} + \\ & \theta_y \frac{\partial S}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 M_y}{\partial x^2} + \frac{E h^3}{12} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}, \\ \frac{\partial S}{\partial y} &= \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - E h \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \\ & \nu \frac{\partial N_y}{\partial x} - (P_x + \rho f_x), \\ \frac{\partial M_y}{\partial y} &= \hat{Q}_y + N_y \theta_y + S \theta_x + \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial t^2} - \\ & 2 \frac{\partial}{\partial x} \left[ D_M (1-\nu) \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right], \\ \frac{\partial E_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\sigma \mu} \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} + B_z \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \\ & \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{(B_x^+ + B_x^-)}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial B_z}{\partial t}, \\ \frac{\partial B_z}{\partial y} &= \sigma \mu \left[ E_x + \frac{\partial v}{\partial t} B_z - \frac{\partial w}{\partial t} \frac{(B_y^+ + B_y^-)}{2} \right] + \frac{B_y^+ - B_y^-}{h}. \end{aligned} \quad (2)$$

式中： $D_N = Eh/(1-\nu^2)$ 和 $D_M = Eh^3/[12(1-\nu^2)]$ 分别为板的抗拉刚度和抗弯刚度； $E$ 和 $\nu$ 分别为弹性模量和泊松比； $\sigma$ 为板的电导率； $\mu$ 为板的磁导率； $E_x$ 为 $x$ 方向的电场强度； $B_z$ 为 $z$ 方向的磁感应强度； $B_i^\pm (i=x,y)$ 为相应量在板上表面、下表面的量值。且：

$$\hat{Q}_y = Q_y - N_y \theta_y - S \theta_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \quad (3)$$

## 2 计算方法

方程组式(2)可表示为如下边值问题：

$$\frac{\partial N}{\partial y} = F(x,y,N), \quad D_1 N|_{y=d_1} = d_1, \quad D_2 N|_{y=d_2} = d_2 \quad (4)$$

式中： $N = \{u, v, w, \theta_y, N_y, \hat{Q}_y, S, M_y, E_x, B_z\}^T$ ； $D_1$ 、 $D_2$ 为给定的直角矩阵； $d_1$ 、 $d_2$ 为给定的矢量。

### 2.1 差分格式的建立

对于式(4)表述的问题，沿着 $x$ 方向建立差分格式，在第 $i$ 节点处，将关于 $x$ 的偏导数 $\frac{\partial N}{\partial x}$ 、 $\frac{\partial^2 N}{\partial x^2}$ 、 $\frac{\partial^3 N}{\partial x^3}$ 、 $\frac{\partial^4 N}{\partial x^4}$ 写成差分式，同时采用 Newmark N M 稳定有限等差式<sup>[11]</sup>，将方程组式(2)中关于时间的导数按照时间步长进行差分。

$$\begin{aligned} \ddot{N}^{t+\Delta t} &= \frac{N^{t+\Delta t} - N^t}{\beta(\Delta t)^2} - \left[ \frac{\dot{N}^t}{\Delta t} + \ddot{N}^t \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \right] \frac{1}{\beta}, \\ \dot{N}^{t+\Delta t} &= \dot{N}^t + \frac{\Delta t}{2} (\ddot{N}^t + \ddot{N}^{t+\Delta t}). \end{aligned} \quad (5)$$

则方程组式(2)具有如下形式：

$$\frac{dN}{dy} = F(y,N), \quad D_1 N|_{y=d_1} = d_1, \quad D_2 N|_{y=d_2} = d_2 \quad (6)$$

### 2.2 线性化处理

经过差分格式的建立，式(6)所描述的是一个非线性常微分方程组。若想求解此方程组，首先将其作线性化处理。所采用的迭代方程为：

$$\begin{aligned} \frac{dN^{(k+1)}}{dy} &= F(y, N^{(k)}) + \Gamma(y, N^{(k)})(N^{(k+1)} - N^{(k)}), \\ D_1 N^{(k+1)}(d_1) &= d_1, \\ D_2 N^{(k+1)}(d_2) &= d_2, \quad k=0,1,2,\dots \end{aligned} \quad (7)$$

式中 $\Gamma(y, N^{(k)})$ 为系统 Jacobi 矩阵，这样就得到了一个线性常微分方程组。至此通过编制程序就可以

得到所有变量的解。

## 3 算例分析

本文以固定边矩形板为例，给出其磁弹性应力与变形的数值解。如图 1 所示，一柔性铜金属矩形板置于  $B = \{0, B_y, 0\}$  的恒定磁场中，承受法向机械载荷  $P = \{0, 0, P_z\}$ ，从外部向该板引入密度为  $J_{xcl} = \{J_{xcl}, 0, 0\}$  的交变电流。已知：板长  $a = 1\text{m}$ ，板宽  $b = 0.5\text{m}$ ， $h = 1 \times 10^{-3}\text{m}$ ， $P_z = 100\text{N/m}^2$ ， $E = 1.0 \times 10^{11}\text{N/m}^2$ ， $\nu = 0.31$ ， $\rho = 8960\text{kg/m}^3$ ， $\sigma = 5.88 \times 10^7 (\Omega \cdot \text{m})^{-1}$ ， $\mu = 1.25 \times 10^{-6}\text{H/m}$ ， $J_{xcl} = J_x \sin \omega t \text{ A/m}^2$ ， $\omega = \pi \times 10^2 \text{ s}^{-1}$ 。

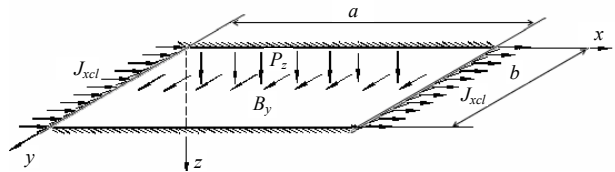


图 1 固定边矩形板的电流磁场分布图

Fig.1 Distribution diagram of current density and magnetic field strength on rectangular plate with four edges fixed

边界条件：

$$x=0 \text{ 处, } u=v=w=0, \theta_x=0$$

$$x=1\text{m 处, } u=v=w=0, \theta_x=0$$

$$y=0 \text{ 处, } B_z=0.1\text{sin}\omega t\text{T, } u=v=w=0, \theta_y=0$$

$$y=0.5\text{m 处, } B_z=0, u=v=w=0, \theta_y=0$$

初始条件：

$$N(x,y,t)|_{t=0} = 0,$$

$$\dot{u}(x,y,t)|_{t=0} = \dot{v}(x,y,t)|_{t=0} =$$

$$\dot{w}(x,y,t)|_{t=0} = \dot{\theta}_y(x,y,t)|_{t=0} = 0$$

对上述线性常微分方程组编程，并代入已知数据、初始条件和边界条件在计算机上运算，求出 10 个基本未知函数  $u$ 、 $v$ 、 $w$ 、 $\theta_y$ 、 $N_y$ 、 $\hat{Q}_y$ 、 $S$ 、 $M_y$ 、 $E_x$  和  $B_z$ 。变换有关参数，可确定机械量与电磁量之间的关系及变化规律。图 2—图 5 给出了依据计算结果绘出的有关曲线：

1) 图 2 给出了在外加侧向电流幅值  $J_x = 5 \times 10^6 \text{ A/m}^2$ 、磁感应强度  $B_y = 0.1\text{T}$  时，板内  $x = 0.5\text{m}$  线上的挠度分布情况。曲线 1—曲线 3 分别为  $t = 4\text{ms}$ 、 $t = 7\text{ms}$ 、 $t = 10\text{ms}$  时的挠度沿  $y$  方向的分布。由图 2 可见，在机械载荷和电磁载荷共同作用下，电磁载荷对结构变形的影响很显著，不可以忽略。

2) 图 3 给出了在外加侧向电流幅值  $J_x =$

$5 \times 10^6 \text{ A/m}^2$ 、 $t = 10\text{ms}$  时，板内  $x = 0.5\text{m}$  线上的挠度分布情况。曲线 1—曲线 4 分别为外加磁感应强度  $B_y = 0.01\text{T}$ 、 $B_y = 0.05\text{T}$ 、 $B_y = 0.1\text{T}$ 、 $B_y = 0.2\text{T}$  时的挠度沿  $y$  方向的分布。由图 3 可见，随着磁感应强度的增大，挠度值随之增大。

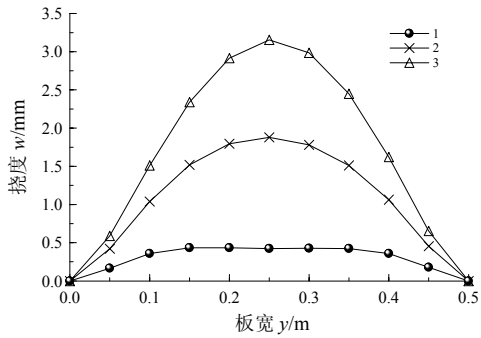


图 2 不同时刻挠度分布曲线

Fig.2 Curves of deflection distribution at different moment

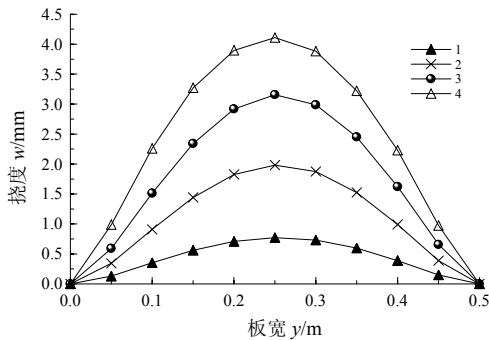


图 3 不同磁场作用下挠度分布曲线

Fig.3 Curves of deflection distribution under different  $B_y$

3) 图 4 给出了在外加磁感应强度  $B_y = 0.1\text{T}$ 、 $t = 10\text{ms}$  时，板内  $x = 0.5\text{m}$  线上的挠度分布情况。曲线 1—曲线 4 分别为外加侧向电流幅值  $J_x = 5 \times 10^5 \text{ A/m}^2$ 、 $J_x = 1 \times 10^6 \text{ A/m}^2$ 、 $J_x = 3 \times 10^6 \text{ A/m}^2$ 、 $J_x = 5 \times 10^6 \text{ A/m}^2$  时的挠度沿  $y$  方向的分布。由图 4 可见，随着电流密度的增大，挠度值随之增大。

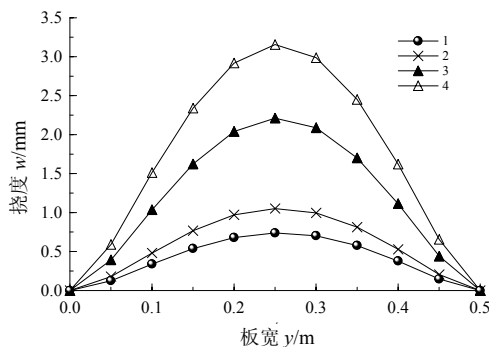


图 4 不同电流作用下挠度分布曲线

Fig.4 Curves of deflection distribution under different  $J_x$

4) 图 5 给出了在外加侧向电流幅值  $J_x =$

$3 \times 10^6 \text{ A/m}^2$ 、磁感应强度  $B_y = 0.1\text{T}$ 、 $t = 10\text{ms}$  时，应力沿着板宽方向( $y$  方向)的分布情况。曲线 1、曲线 2 分别为板上表面、下表面处沿  $x$  方向的正应力值  $\sigma_x^\pm$ ；曲线 3、曲线 4 分别为板上表面、下表面处沿  $y$  方向的正应力值  $\sigma_y^\pm$ 。

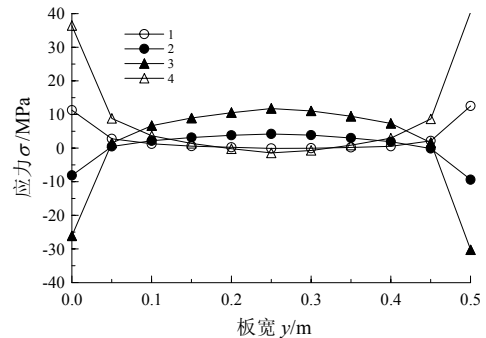


图 5 应力分布曲线

Fig.5 Curves of stress distribution

### 4 结论

(1) 图 2—图 5 说明了：改变外加磁感应强度的大小或者通电电流强度的大小，可以控制薄板的变形及受力状况。因此，利用这一点，可以改变在电磁场环境下的工程结构的工作状态；可以通过对薄板加适当强度的电流，来实现对薄板的某些部位应力的控制。

(2) 通过对固定矩形板的磁弹性效应的分析结果表明：设计在强电磁场环境下工作的工程结构时，考虑电磁效应是必要的。

(3) 本文为电磁场作用下的构件设计提供了理论分析和数值计算方法。

### 参考文献：

[1] 白象忠. 板壳磁弹性理论基础[M]. 北京：机械工业出版社, 1996.  
Bai Xiangzhong. Fundamental theory of magnetic-elasticity of plates and shells [M]. Beijing: China Machine Press, 1996. (in Chinese)

[2] Zhou Y H, Gao Y W, Zheng X J. Buckling and post-buckling analysis for magneto-elastic-plastic ferromagnetic beam-plates with unmovable simple supports [J]. International Journal of Solids and Structures, 2003(40): 2875—2887.

[3] Zhou Y H, Gao Y W, Zheng X J. Buckling and post-buckling of a ferromagnetic beam-plate induced by magneto-elastic interactions [J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2000, 35(6): 1059—1065.

(参考文献[4]—[11]转第 223 页)

- 试验研究[J]. 机械工程学报, 2002, 38(7): 54—57.
- Xie Haibo, Fu Xin, Yang Huayong. Simulation and experimental research on micro valveless pump [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2002, 38(7): 54—57. (in Chinese)
- [10] Zengerle R, Richter M. Simulation of microfluid system [J]. Journal of Micromechanics and Microengineering, 1994, 4(4): 192—204.
- [11] 白兰. 基于 MEMS 的无阀泵数值仿真与实验研究[D]. 长春: 中国科学院长春光学精密机械与物理研究所, 2005.
- Bai Lan. Simulations and experimental studies of valve-less micropumps based on MEMS [D]. Changchun: Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics, Chinese Academy of Sciences, 2005. (in Chinese)
- [12] Olsson A, Stemme G, Stemme E. Numerical and experimental studies of flat-walled diffuser elements for valve-less micropumps [J]. Sensors and Actuators A, 2000, 84(1): 165—175.

(上接第 208 页)

- [4] Hasanyan D J, Khachatryan G M, Piliposyan G T. Mathematical modeling and investigation of nonlinear vibration of perfectly conductive plates in an inclined magnetic field [J]. Thin-Walled Structures, 2001, 39(1): 111—123.
- [5] Hany H S, Kamal A H. A two-dimensional problem for a half-space in magneto thermoelasticity with thermal relaxation [J]. International Journal of Engineering Science, 2002(40): 587—604.
- [6] Magdy A E, Ahmed S E. Magneto thermoelasticity with two relaxation times in conducting medium with variable electrical and thermal conductivity [J]. Applied Mathematics and Computation, 2003(142): 449—467.
- [7] Bian Yuhong, Tian Zhenguo, Bai Xiangzhong. Nonlinear stress and deformation analysis of thin current-carrying strip-shells [J]. International Applied Mechanics, 2007, 43(9): 1057—1068.
- [8] 边宇虹, 田振国, 白象忠. 载流悬臂柱壳的非线性数值分析[J]. 工程力学, 2007, 24(4): 59—65.
- Bian Yuhong, Tian Zhenguo, Bai Xiangzhong. Nonlinear numerical analysis of current-carrying cantilever columnar shells [J]. Engineering Mechanics, 2007, 24(4): 59—65. (in Chinese)
- [9] Molchenko L V, Loos I I. Nonlinear deformation of conical shells in magnetic fields [J]. International Applied Mechanics, 1997, 33(3): 221—226.
- [10] Molchenko L V. Influence of an external electric current on the stress state of an annular plate of variable stiffness [J]. Prikladnaya Mekhanika, 2001, 37(12): 108—112.
- [11] Мольченко Л В. Магнитоупругость нелинейных токонесящих облочек [М]. Киев: Виша школа, 1989.