

梯度材料的黏附接触封闭解*

陈少华 闫聪

(中国科学院力学研究所, 非线性力学国家重点实验室, 100190)

摘要 本文给出了半径为 R 的刚性球体与梯度材料弹性半空间黏附接触的封闭解。梯度材料的杨氏模量随深度呈幂次变化 $E = E_0(z/c_0)^k$, 考虑接触体表面力的作用, 最终得到了外加载荷与接触半径的显式关系, 及拉脱时的临界外力及临界半径的解析表达式。当 k 为 0 时, 结果则为著名的 JKR 理论解; 当 $k=1$ 时, 则得到 Gibson 材料的黏附接触封闭解。本文的解析结果为进一步分析梯度材料的黏附特性及工程实际应用提供了有效的理论工具。

关键词: 接触力学; 黏附; 弹性梯度材料; JKR 模型; 拉脱力

一、前言

接触力学自 1882 年 Hertz 提出 Hertz 理论[1]后, 广泛应用于很多工程。后来实验发现, 当外力很小或外力为零时, Hertz 理论与实验结果并不相符。1971 年, Johnson 等人考虑接触体表面力的相互作用, 利用弹性应变能与表面能的平衡准则提出了著名的 JKR 黏附接触理论[2]。随后相继出现了著名的 DMT 理论[3]及 MD 理论[4]。JKR、DMT 及 MD 理论的适用范围由 Tabor 参数确定, 当 Tabor 参数远小于 1 时, DMT 理论适用; 当 Tabor 参数远大于 1 时, JKR 理论适用; MD 理论则适用于中间情况。在三种黏附接触理论的基础上, 黏附接触力学得到了进一步的拓展和应用, 尤其是最近几年在解释生物黏附中的力学机制方面发挥了重要的作用[5,6]。至今, 梯度材料的接触理论仍然局限于 Hertz 接触[7,8], 梯度材料的黏附接触理论解还未给出。但一类生物黏附系统的宏观表现具有梯度特性, 为了解释梯度特性在生物黏附中的作用, 我们首先必须得到梯度材料的黏附接触理论解。本文的主要目的就是给出梯度材料的黏附接触理论解[9,10], 为进一步理解梯度材料的黏附提供理论工具。

二、理论模型及其封闭解

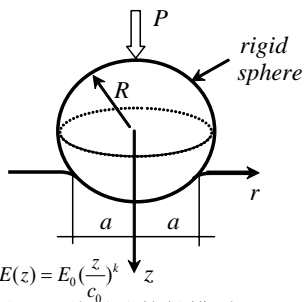


图 1 三维黏附接触模型

2.1 黏附接触理论模型

图 1 表示一个半径为 R 的刚性球体与梯度材料弹性半空间黏附接触。刚性球体受到外压力 P 的作用, 接触半径为 a 。

对于梯度材料弹性半空间, 我们假设其杨氏模量随深度呈幂次变化的规律

$$E(z) = E_0 \left(\frac{z}{c_0}\right)^k \quad 0 < k < 1 \quad (1)$$

其中 E_0 为参考杨氏模量, c_0 ($c_0 > 0$) 为特征深度, k 为梯度变

* 本文得到国家自然科学基金 (10672165, 10732050, 10972220) 的资助。

化指数，梯度材料的泊松比假设为常数 ν 。在法向外力的作用下，界面处剪切应力可以忽略^[11]。

当 $k=0$ ，梯度材料退化为各向同性材料； $k=1$ 对应经典 Gibson 材料。文献[7,8]已经通过压痕问题的有限元分析，讨论了公式（1）定义的梯度材料接触力学解的适用性：真实梯度材料 $E(z) = E_0[(z+L)/c_0]^k$ 的接触力学一阶近似解，可以由 $E = E_0(z/c_0)^k$ 梯度材料与 $E(z) = E_0(L/c_0)^k$ 均匀弹性材料的解叠加得到。

2.2 梯度材料的三维黏附接触理论解

文献[8]已经给出了刚性球体及刚性圆柱形压头与杨氏模量按公式(1)变化的梯度材料的 Hertz 接触解。应用文献[4]中的思想，刚性球体与弹性半空间黏附接触理论解可以由刚性球体与弹性半空间 Hertz 接触解及刚性圆柱压头与弹性半空间接触解叠加得到。通过大量的分析及复杂的求解，最终我们首次得到了三维刚性球体与梯度材料弹性半空间黏附接触的解析表达，具体过程可参见[10]。

实验研究人员最为关注的拉脱临界外力 P_{cr} 及临界接触半径 a_{cr} 为：

$$P_{cr} = -\frac{k+3}{2}\pi R\Delta\gamma, \quad a_{cr} = \left[\frac{\pi^2 \theta^* (1+k)^2 (3+k)^2 R^2 \Delta\gamma}{8 \cos \frac{\pi k}{2}} \right]^{\frac{1}{3+k}} \quad (2)$$

其中 $\Delta\gamma$ 为界面黏附能， θ^* 参见文献[10]。

由公式(2)可见，当梯度变化指数 $k=0$ 时，临界拉脱力及临界接触半径则退化为经典的 JKR 理论解；当 $k=1$ 时，则得到 Gibson 材料的黏附接触封闭解。Gibson 材料黏附接触的临界拉脱力及临界接触半径表示为：

$$P_{cr} = -2\pi R\Delta\gamma, \quad a_{cr} = \left(\frac{12R^2 c_0 \Delta\gamma}{E_0} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (3)$$

三、结论

本文主要研究了梯度材料黏附接触问题，建立了一系列简单的封闭解析解，包括拉脱临界外力、临界接触半径。最重要的发现则是拉脱力具有非常简单的解析表达式： $P_{cr} = -(k+3)\pi R\Delta\gamma/2$ ，其中 R 为刚性球体的半径， $\Delta\gamma$ 为界面黏附能。当 $k=0$ 时，梯度材料的解析解则退化为著名的 JKR 理论解；当 $k=1$ ， $\nu=0.5$ ，则能够给出 Gibson 材料的黏附封闭解。

参 考 文 献

- 1 Hertz H. J. Reine Angew. Math., 1882; 92: 156
- 2 Johnson K L, Kendall K, Roberts A D. Proc. R. Soc. Lond. A, 1971; 324: 301
- 3 Derjaguin B V, Muller V M, Toporov Y P. J. Coll. Interface Sci., 1975; 53: 314
- 4 Maugis D. J. Coll. Interface Sci., 1992; 150: 243.
- 5 Chen S, Gao H. J. Mech. Phys. Solids, 2006; 54: 1548.
- 6 Chen S, Gao H. J. Mech. Phys. Solids, 2007; 55: 1001.
- 7 Giannakopoulos A E, Suresh S. Int. J. Solids Structures, 1997; 34: 2393
- 8 Giannakopoulos A E, Pallot P. J. Mech. Phys. Solids, 2000; 48: 1597

- 9 Chen S, Yan C, Soh, A. *Int. J. Solids Struct.*, 2009; 46: 3398
- 10 Chen S, Yan C, Zhang P, Gao H. *J. Mech. Phys. Solids*, 2009; 57: 1437
- 11 Chen S, Gao H. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 2006; 462: 211