

DOI: 10.3969/j.issn.1000-4874.2010.03.005

# 对流扩散方程的三阶迎风格式的 数值摄动高精度重构\*

杨满叶<sup>1,2</sup>, 舒适<sup>1</sup>, 李明军<sup>1</sup>

(1 湘潭大学数学与计算科学学院, 湖南湘潭 411105,

Email: yangmanye@163.com;

2 中国科学院力学研究所, 北京 100080)

**摘要:** 利用高智提出的数值摄动算法, 把求解对流扩散方程常用三阶迎风格式(3-UDS)(粘性项和对流项分别用二阶中心格式和3-UDS离散)进行了高精度重构, 包括使用离散单元内所有节点的全域重构和分别使用上下游节点的上下游重构, 得到两类新的更高阶精度迎风差分格式, 称为高的迎风差分格式(记作GUDS)。讨论了GUDS的数学性质, GUDS比原来的3-UDS精度显著提高; 全域重构的GUDS和3-UDS均为条件稳定, 一些上下游重构GUDS为绝对稳定。本文通过稳定性分析和四个算例(一维常系数、变系数、非线性及二维变系数对流扩散方程)的计算证实了GUDS的优良性质。上下游重构GUDS为避免在3-UDS中使用人工粘性提供了一条有效途径, 适合于求解高Reynolds数线性和非线性问题。

**关键词:** 高迎风差分格式; 对流扩散方程; 三阶迎风格式; 数值摄动高精度重构

**中图分类号:** O357.1

**文献标识码:** A

## Numerical perturbation higher accurate reconstruction Scheme of 3-UDS for convective-diffusion equation

YANG Man-ye<sup>1,2</sup>, SHU-Shi<sup>1</sup>, LI Ming-jun<sup>1</sup>

(1. School of mathematics and computational science, Xiangtan university,  
Hunan, 411105, China.

2. Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

\*收稿日期: 2009-06-27 (2009-11-25 修改稿)

**基金项目:** 国家自然科学基金项目(10872204, 10771178), 国家自然科学基金委员会—中国工程物理研究院联合基金(10676031)和教育部博士点基金(20070530003)

**作者简介:** 杨满叶(1985—),男,湖南邵阳人,硕士研究生.

**Abstract:** The discrete scheme of the convective-diffusion equation, in which the viscous and convective terms are discrete as second-order central and third-order upwind difference scheme(3UDS) separately, was reconstructed by using the numerical perturbation algorithm presented by Gao Zhi. The reconstruct methods have two, one is global reconstruction using all node- information in discrete element, the other is upstream and downstream reconstruction using separately upstream and downstream node-information in a discrete element. The two kinds of higher-order schemes called Gao's upwind difference schemes (GUDS, for brevity) were developed by using two reconstruct methods stated above. GUDS is so simple as 3UDS, but GUDS have more high accurate than 3UDS. Both global GUDS and 3UDS are conditional stable schemes, while some GUDS of upstream and downstream reconstruction are absolute stable schemes. Excellent properties of GUDS for the convective-diffusion equation were proved by analysis and four numerical tests. The results show that GUDS of upstream and downstream reconstruction provide a new effective way for 3UDS needing no artificial viscosity and are suitable for solving linear and nonlinear high Reynolds number problems.

**Keywords:** computational fluid dynamics; convection-diffusion equation; third-order upwind difference scheme (3UDS); Gao's upwind difference scheme (GUDS)

## 1 引言

对流扩散方程是一类基本数学物理方程,它可以描述流体流动中质量、能量、热量等输运过程以及某些化学反应扩散过程等众多物理现象。因此,研究对流扩散方程的高效计算格式具有很大的实际应用价值。在对流扩散方程的离散近似中,扩散项一般采用二阶中心格式进行离散。对流项的离散会引起不稳定、假扩散等问题。从而,对流项的离散格式一直是人们关注的课题。

迎风格式、指数格式、混合格式及乘方格式等一阶格式应用于实际问题时都可能引起较严重的假扩散。为了有效地克服或减轻假扩散所带来的计算误差,对流导数应当采用二阶或更高阶的格式(如 3-UDS、QUICK 格式等)。高精度格式不仅广泛应用于空气动力学领域,在水动力学等其他领域也得到了广泛的应用<sup>[1-7]</sup>。现在通常采用增加基点数目的方法和引入高阶导数的紧致方法来提高相应格式的精度。但是增加基点数目和引入高阶导数都会使得计算格式变得十分繁琐,不容易掌握<sup>[8]</sup>。

1994 年,高智提出数值摄动高精度重构算法<sup>[9-10]</sup>,该算法在微分方程的差分近似中,离散微分项的同时,也对非微分项(对流系数和源项)进行重构,即把非微分项摄动重构为网格步长  $\Delta x$  的幂级数,并通过提高差分格式相应修正微分方程误差阶的方法求出幂级数系数,从而获得高精度差分格

式。该格式用于模型方程和流动计算获得成功<sup>[11-13]</sup>,是求解微分方程的一种新型摄动差分方法,被称为高算法<sup>[14]</sup>。近来,高智又把摄动法改进为分别利用离散单元内上游和下游节点进行重构的双重摄动重构方法<sup>[15]</sup>。改进方法的突出优点是在提高格式精度同时大大扩充了格式的稳定性范围。本文对 3-UDS 按全域和上下游进行数值摄动重构,得到两类新的高精度迎风差分格式(称为高的迎风差分格式 GUDS),分析了它们的精度和稳定性。最后,应用于一维常系数和变系数、非线性(Burgers 方程)及二维变系数对流扩散方程的计算。数值结果表明:本文构造的两类 GUDS 与 3-UDS 相比简单性相当,但精度显著提高,格式的稳定性范围明显扩大。

## 2 对流扩散模型方程 3-UDS

考察一维对流扩散方程

$$u \frac{\partial \phi}{\partial x} = \gamma \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad x \in (a, b) \quad (1)$$

及相应边界条件的离散。对区间  $(a, b)$  作  $N$  等分,记  $\Delta x = (b - a) / N$ ,若对流项采用 3-UDS,粘性项采用二阶中心格式,则(1)的差分方程为

$$u_j \left[ \frac{1 + \alpha}{2} \frac{2\phi_{j+1} + 3\phi_j - 6\phi_{j-1} + \phi_{j-2}}{6\Delta x} + \right.$$

$$\frac{1-\alpha}{2} \frac{-\phi_{j+2} + 6\phi_{j+1} - 3\phi_j - 2\phi_{j-1}}{6\Delta x} ] = \gamma \frac{\phi_{j+1} - 2\phi_j + \phi_{j-1}}{\Delta x^2}, \quad \alpha = \text{sign}(u_j) \quad (2)$$

稳定性分析的“符号不变”原则<sup>[1]</sup>分析表明: 三阶迎风格式为条件稳定格式, 其稳定条件为

$$-\frac{3}{2+\alpha} \leq P_\Delta = \frac{u_j \Delta x}{\gamma} \leq \frac{3}{2-\alpha} \quad (3)$$

### 3 3-UDS 的数值摄动重构格式

对格式(2)的通量数值的摄动重构, 当使用离散单元内所有计算结点时,  $u_j$  重构为

$$u_{jp} = u_j (A_0 + A_1 \Delta x + A_2 \Delta x^2 + A_3 \Delta x^3 + \dots + A_n \Delta x^n + \dots) \quad (4)$$

格式(2)重构后的修正微分方程为

$$u_{jp} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial x} \right]_j + \sum_{n=1}^{\infty} C_{n+1} \frac{\partial^{n+1} \phi}{\partial x^{n+1}} \Big|_j \Delta x^n = \gamma \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right]_j + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2(n+1))!} \frac{\partial^{2(n+1)} \phi}{\partial x^{2(n+1)}} \Big|_j \Delta x^{2n} \quad (5)$$

其中

$$C_n = \frac{1}{12 \cdot n!} [-(1-\alpha)2^n + 4(2-\alpha) - 4(2+\alpha)(-1)^n + (1+\alpha)(-2)^n] \quad (6)$$

在方程(5)中令  $\Delta x$  的系数为零, 可推出高阶导数到一阶导数的递推公式

$$\frac{\partial^n \phi}{\partial x^n} \Big|_j = \left( \frac{u_j}{\gamma} \right)^{n-1} \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_j \quad (7)$$

将(7)代入(5)后, 比较(5)两边  $\Delta x$  的同次幂的系数则

可得以下关系式:

$$\Delta x^{2n-1}: \quad 0 = \frac{u_j}{\gamma} \sum_{i=0}^{2n-1} A_i \Delta x^i C_{2n-i} \frac{\partial^{2n-i} \phi}{\partial x^{2n-i}} \Big|_j \Delta x^{2n-1-i} \quad (8)$$

$$\Delta x^{2n}: \quad \frac{2}{(2(n+1))!} \frac{\partial^{2n+2} \phi}{\partial x^{2n+2}} \Big|_j \Delta x^{2n} = \frac{u_j}{\gamma} \sum_{i=0}^{2n} A_i \Delta x^i C_{2n-i+1} \frac{\partial^{2n-i+1} \phi}{\partial x^{2n-i+1}} \Big|_j \Delta x^{2n-i} \quad (9)$$

由此可求出系数  $\{A_i\}_0^n$ 。以下是求出的部分系数

$$A_0 = 1, A_1 = 0, A_2 = \frac{1}{2 \cdot 3!} \left( \frac{u_j}{\gamma} \right)^2$$

$$A_3 = -\frac{\alpha}{2 \cdot 3!} \left( \frac{u_j}{\gamma} \right)^3, A_4 = \frac{13}{3 \cdot 5!} \left( \frac{u_j}{\gamma} \right)^4$$

$$A_5 = -\frac{\alpha}{2 \cdot 4!} \left( \frac{u_j}{\gamma} \right)^5, A_6 = \frac{227}{4 \cdot 7!} \left( \frac{u_j}{\gamma} \right)^6$$

把系数  $\{A_i\}_0^n$  代入方程(5), 则  $\Delta x^n$  的系数左右两端相等。因此若截断到  $n = N$ , 则 GUDS 的精度达到  $(N+1)$  阶。同理我们用“符号不变”原则分析 3-UDS 的稳定性, 得到其稳定性条件为

$$-\frac{3}{2+\alpha} \leq \frac{u_j \Delta x}{\gamma} \sum_{i=0}^n A_i \Delta x^i \leq \frac{3}{2-\alpha} \quad (10)$$

其中:  $n$ -GUDS 中的  $n$  指格式精度阶,  $|P_\Delta|$  为格式稳定的临界网格 Peclet 数。由表 1 可知  $n$ -GUDS ( $n=3 \sim 7$ ) 比 3-UDS 精度明显提高, 但格式稳定的临界网格 Peclet 数  $|P_\Delta|$  略有减小。

按照高智<sup>[15]</sup>的建议, 若通量数值  $u_j$  分别使用单元内上游和下游节点进行摄动重构, 既可提高格式精度, 又可使临界网格  $|P_\Delta|$  数增大。为此将三阶迎风格式写成如下的等价形式:

表1 3-UDS及全域摄动重构的GUDS的稳定条件

3-UDS	3-GUDS	4-GUDS	5-GUDS	6-GUDS	7-GUDS
$ P_{\Delta}  \leq 3$	$ P_{\Delta}  \leq 2.16$	$ P_{\Delta}  \leq 2.91$	$ P_{\Delta}  \leq 2.2$	$ P_{\Delta}  \leq 2.5$	$ P_{\Delta}  \leq 2.02$

$$\begin{aligned} & \frac{u_j}{12\Delta x}[-(1-\alpha)\phi_{j+2} + 4(2-\alpha)\phi_{j+1} + \\ & (3\alpha-7)\phi_j] + \frac{u_j}{12\Delta x}[(3\alpha+7)\phi_j - \\ & 4(2+\alpha)\phi_{j-1} + (1+\alpha)\phi_{j-2}] = \\ & \frac{\gamma}{\Delta x^2}(\phi_{j+1} - 2\phi_j + \phi_{j-1}) \end{aligned} \quad (11)$$

对  $u_j > 0$ ，在上游  $(j-2, j-1, j)$  和下游  $(j, j+1, j+2)$  通量数值分别摄动重构为

$$u_{jup} = u_j \sum_{i=0}^{\infty} A_i \Delta x^i, \quad u_{jdp} = u_j \sum_{i=0}^{\infty} B_i \Delta x^i \quad (12)$$

将(12)代入(11)，可得修正微分方程

$$\begin{aligned} & u_{jup} \left[ \frac{3-\alpha}{6} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \sum_{n=1}^{\infty} C_{n+1} \frac{\partial^{n+1} \phi}{\partial x^{n+1}} \Delta x^n \right] + \\ & u_{jdp} \left[ \frac{3+\alpha}{6} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \sum_{n=1}^{\infty} D_{n+1} \frac{\partial^{n+1} \phi}{\partial x^{n+1}} \Delta x^n \right] = \\ & \gamma \left[ \frac{3-\alpha}{6} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!} \frac{\partial^{n+2} \phi}{\partial x^{n+2}} \Delta x^n \right] + \\ & \gamma \left[ \frac{3+\alpha}{6} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+2}}{(n+2)!} \frac{\partial^{n+2} \phi}{\partial x^{n+2}} \Delta x^n \right] \end{aligned} \quad (13)$$

其中导数为在  $j$  点求导，

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{12 \cdot n!} [-(1-\alpha)2^n + 4(2-\alpha)], \\ D_n &= \frac{(-1)^n}{12 \cdot n!} [-4(2+\alpha) + (1+\alpha)2^n], \quad n = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

将(7)代入(13)后，比较(13)两边  $\Delta x$  的同次幂系数可得以下关系式：

$$\Delta x^n : \frac{1}{(n+2)!} \frac{\partial^{n+2} \phi}{\partial x^{n+2}} \Big|_j \Delta x^n = \frac{u_j}{\gamma} \sum_{i=0}^n A_i \Delta x^i C_{n-i+1} \frac{\partial^{n-i+1} \phi}{\partial x^{n-i+1}} \Big|_j \Delta x^{n-i} \quad (14)$$

$$\Delta x^n : \frac{1}{(n+2)!} \frac{\partial^{n+2} \phi}{\partial x^{n+2}} \Big|_j \Delta x^n = \frac{u_j}{\gamma} \sum_{i=0}^n B_i \Delta x^i D_{n-i+1} \frac{\partial^{n-i+1} \phi}{\partial x^{n-i+1}} \Big|_j \Delta x^{n-i} \quad (15)$$

由式(14)和(15)可求出系数  $\{A_i\}_0^n$  和  $\{B_i\}_0^n$ 。以下是求出的部分系数

$$\begin{aligned} A_0 &= 1, A_1 = 0, A_2 = \frac{5-9\alpha}{4 \cdot 4!} \left(\frac{u_j}{\gamma}\right)^2 \\ A_3 &= \frac{81-73\alpha}{16 \cdot 5!} \left(\frac{u_j}{\gamma}\right)^3, A_4 = \frac{565-549\alpha}{32 \cdot 6!} \left(\frac{u_j}{\gamma}\right)^4 \\ A_5 &= \frac{9717-9781\alpha}{128 \cdot 7!} \left(\frac{u_j}{\gamma}\right)^5 \\ A_6 &= \frac{72769-72897\alpha}{192 \cdot 8!} \left(\frac{u_j}{\gamma}\right)^6 \\ B_0 &= 1, B_1 = 0, B_2 = \frac{5+9\alpha}{4 \cdot 4!} \left(\frac{u_j}{\gamma}\right)^2 \\ B_3 &= \frac{-81-73\alpha}{16 \cdot 5!} \left(\frac{u_j}{\gamma}\right)^3, B_4 = \frac{565+549\alpha}{32 \cdot 6!} \left(\frac{u_j}{\gamma}\right)^4 \end{aligned}$$

表 2 3-UDS 及上下游数值摄动重构的(*n*-GUDS)的稳定条件

3-UDS	3-GUDS	4-GUDS	5-GUDS	6-GUDS	7-GUDS
$ P_{\Delta}  \leq 3$	$ P_{\Delta}  < \infty$	$ P_{\Delta}  \leq 3.3$	$ P_{\Delta}  \leq 3.88$	$ P_{\Delta}  \leq 2.5$	$ P_{\Delta}  < \infty$

$$B_5 = \frac{-9717 - 9781\alpha}{128 \cdot 7!} \left(\frac{u_j}{\gamma}\right)^5$$

$$B_6 = \frac{72769 + 72897\alpha}{192 \cdot 8!} \left(\frac{u_j}{\gamma}\right)^6$$

当求出系数  $\{A_i\}_0^n$  和  $\{B_i\}_0^n$  后, 方程(13)关于  $\Delta x^n$  的系数左右两端相等。因此若截断到  $n = N$ , 则格式精度达到  $(N + 1)$  阶。“符号不变”原则给出诸 GUDS 稳定性条件为

$$-\frac{3}{2 + \alpha} \leq \frac{u_{jdp} \Delta x}{\gamma} = \frac{u_j \Delta x}{\gamma} \sum_{i=0}^n B_i \Delta x^i$$

$$\frac{u_{jup} \Delta x}{\gamma} = \frac{u_j \Delta x}{\gamma} \sum_{i=0}^n A_i \Delta x^i \leq \frac{3}{2 - \alpha} \quad (16)$$

表 2 说明 3-UDS 的上下游摄动重构得到了二个绝对稳定的 GUDS 即 3-GUDS、7-GUDS; 同理证明了 11-GUDS、15-GUDS 亦为绝对稳定格式。但更高阶精度的 GUDS-UD 与稍低精度格式相比, 增加了一些大小为  $O\left(\frac{1}{(N + 2)!} P_{\Delta}^N\right) (N > 11)$  的小项, 当  $P_{\Delta} \cong O(1)$  时, 这些小项对格式精度的贡献很小, 因此本文不去讨论它们。

## 4 数值算例

### 4.1 常系数对流扩散方程

$$u \frac{\partial \phi}{\partial x} = \gamma \frac{\partial^2 \phi}{\partial^2 x}, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (17)$$

方程(17)的精确解取为  $\phi(x) = (e^{xPe} - 1)/(e^{Pe} - 1)$ 。计算中取  $Pe = u/\gamma = 200, u > 0$ , 用均匀网格。表 3 和表 4 分别为全域和上下游摄动重构的结果, 给出诸格式的均方根误差 ( $L_2 error$ ) 及其精度阶

( $L_2 order$ )。本算例证实两类 GUDS 求解常系数方程均能达到理论精度且误差远小于 3-UDS 的误差。

在表 3 和表 4 中 GUDS-G 和 GUDS-UD 分别指全域和上下游摄动格式。图 1 是网格数为 40 时中点附近的解。可见 3-UDS 是振荡的, 3-GUDS-UD 不振荡, 3-GUS-UD 网格再粗也不会产生振荡解, 其绝对稳定性得到数值证实。

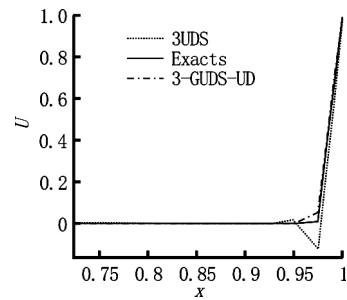


图 1 常系数对流扩散方程 (局部放大)

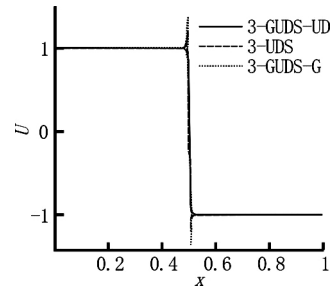


图 2 非线性 Burgers 方程

### 4.2 非线性 Burgers 方程

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (18)$$

取  $Re = 1000$ , 其精确解为

$$u(x) = \tanh[Re(1 - 2x)/4]$$

方程利用时间相关法求解, 对时间项的求解采用二阶 Runge-Kutta 方法<sup>[11]</sup>, 收敛准则为

表 3 3-UDS 及全域摄动重构的均方根误差及精度

N	3-UDS		3-GUDS-G		5-GUDS-G		7-GUDS-G	
	$L_2error$	order	$L_2error$	order	$L_2error$	order	$L_2error$	order
160	7.554E-04	—	3.355E-03	—	1.093E-03	—	7.336E-04	—
320	5.608E-04	0.4298	5.544E-04	2.597	4.699E-05	4.540	7.419E-06	6.628
640	2.056E-04	1.4477	7.181E-05	2.949	1.782E-06	4.721	6.842E-08	6.761

表 4 3-UDS 及上下游摄动重构的均方根误差及精度

N	3-UDS		3-GUDS-UD		5-GUDS-UD		7-GUDS-UD	
	$L_2error$	order	$L_2error$	order	$L_2error$	order	$L_2error$	order
160	7.554E-04	—	1.007E-02	—	7.018E-03	—	4.244E-03	—
320	5.608E-04	0.4298	2.477E-03	2.023	3.887E-04	4.174	5.856E-05	6.179
640	2.056E-04	1.4477	4.348E-04	2.510	1.664E-05	4.546	6.269E-07	6.545

表 5 诸格式最大误差和均方根误差

N	3-UDS		3-GUDS-G		3-GUDS-UD	
	$L_\infty error$	$L_2error$	$L_\infty error$	$L_2error$	$L_\infty error$	$L_2error$
80	0.3015	0.04893	0.3742	0.06300	0.09515	0.01502
160	0.2152	0.02430	0.3778	0.04406	0.05787	0.006465
320	0.1002	0.007917	0.3350	0.02656	0.02707	0.0021377

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{|u_i^{n+1} - u_i^n|}{\Delta t} \leq 2.0 \times 10^{-5}$$

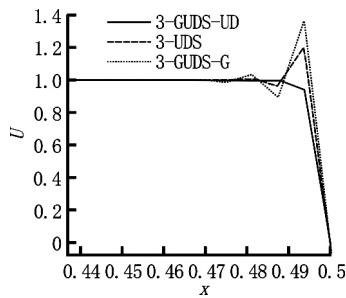


图 3 非线性 Burgers 方程 (局部放大)

表 5 给出了在均匀网格 (N = 80, 160, 320) 下相应格式的误差, 图 2、3 (N = 160) 分别给出了

整体和中点附近相应格式的解。本算例表明对非线性和间断解问题, 上下游摄动重构的 3-GUDS-UD 比 3-UDS 具有更高的分辨率, 且网格再粗也不会产生振荡解。7GUDS-UD 的情况与 3GUDS-UD 类似, 它们的绝对稳定性得到数值证实。

### 4.3 变系数方程<sup>[16]</sup>

$$\begin{cases} \varepsilon u_{xx} - \frac{1}{1+x} u_x - \frac{1}{2+x} u = \\ (\varepsilon - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2+x}) e^x - \\ \frac{1}{2+x} 2^{-1/\varepsilon} (1+x)^{1+1/\varepsilon}, \quad 0 \leq x \leq 1 \\ u(0) = 1 + 2^{-1/\varepsilon}, \quad u(1) = e + 2 \end{cases} \quad (19)$$

该问题的精确解为

表 6 3-UDS 和 3-GUDS-G 的最大误差和均方根误差及相应的精度

N	3-UDS				3-GUDS-G			
	$L_\infty error$	order	$L_2 error$	Order	$L_\infty error$	order	$L_2 error$	order
160	1.111E-02	—	1.537E-03	—	1.226E-02	—	1.787E-03	—
320	4.194E-03	1.405	5.676E-04	1.437	1.914E-03	2.679	2.981E-04	2.584
640	1.248E-03	1.749	1.689E-04	1.749	2.954E-04	2.696	5.302E-05	2.491

表 7 3-UDS 和 3-GUDS-UD 的最大误差和均方根误差及相应的精度

N	3-UDS				3-GUDS-UD			
	$L_\infty error$	order	$L_2 error$	order	$L_\infty error$	order	$L_2 error$	order
160	1.111E-02	—	1.537E-03	—	5.915E-03	—	9.191E-04	—
320	4.194E-03	1.405	5.676E-04	1.437	1.137E-03	2.379	1.978E-04	2.216
640	1.248E-03	1.749	1.689E-04	1.749	2.014E-04	2.497	4.195E-05	2.237

表 8 3-UDS 和全域摄动格式的最大误差和均方根误差

Error	3-UDS	3-GUDS-G	5-GUDS-G	7-GUDS-G
$L_\infty$	5.9009	1.2118	1.003E-02	1.36E-03
$L_2$	0.59314	0.11714	9.071E-04	1.229E-05

表 9 3-UDS 和上下游摄动格式的最大误差和均方根误差

Error	3-UDS	3-GUDS-UD	5-GUDS-UD	7-GUDS-UD
$L_\infty$	5.9009	0.6965	9.312E-3	1.253E-4
$L_2$	0.59314	0.06719	8.434E-4	1.14E-5

注: GUDS 比 UDS 增加了摄动系数的计算, 但由于 GUDS 比 UDS 精度高, 在达到相同的计算精度的前提下, GUDS 的计算时间要比 UDS 少, 计算量小于 UDS, 计算效率高于 UDS。算例一、二和四的离散代数方程组的求解均用 Gauss-Seidel 迭代法<sup>[17]</sup>, 收敛准则为  $\max_i |\varphi_i^{n+1} - \varphi_i^n| < 1.0 \times 10^{-8}$  和  $\max_{i,j} |\varphi_{ij}^{n+1} - \varphi_{ij}^n| < 1.0 \times 10^{-8}$

$$0 \leq x, y \leq 1 \tag{20}$$

$$u(x) = e^x + 2^{-1/\varepsilon} (1+x)^{1+1/\varepsilon}$$

当  $\varepsilon$  很小时在  $x=1$  的边界附近存在梯度很大的薄边界层型结构。计算中取  $\varepsilon = 0.005$ 。图 4 给出了 3-UDS、3-GUDS-G 和 3-GUDS-UD 的误差分布, 表 6、7 给出了某些网格条件下诸格式的误差及精度阶数据。本算例表明两类 GUDS 求解变系数方程也均能到达理论精度。

#### 4.4 二维变系数方程

$$(y - \frac{1}{2}) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + (x - \frac{1}{2}) \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \gamma (\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}),$$

取其精确解为

$$\varphi(x, y) = e^{\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2})(y-\frac{1}{2})}$$

计算区域  $[0,1] \times [0,1]$  取  $100 \times 100$  均匀剖分, 取  $\gamma = 0.025$ 。表 8、9 给出了诸格式的  $L_\infty$  和  $L_2$  误差, 由表易知两类 GUDS 求解二维变系数方程的误差均比 3-UDS 小很多。本算例表明两类 GUDS 均适合于求解高维问题。

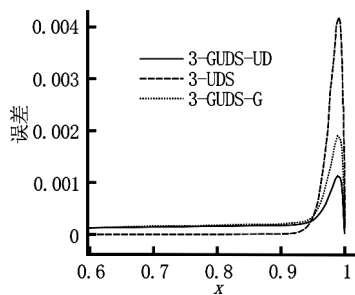


图4 变系数方程相应格式的误差(局部放大)

## 5 结论

本文基于对流扩散方程的三阶迎风差分格式(3-UDS)按全域和上下游的数值摄动重构得到两类新的高精度迎风差分格式,称为高的迎风差分格式(GUDS)。高算法先对三节点格式进行摄动重构,获得数值摄动高精度格式。本文证实高算法对于多节点像3-UDS这样的迎风格式同样有效。本文构造的两类GUDS与3-UDS相比简单性相当,但精度显著提高。特别是得到了绝对稳定迎风格式如3-GUDS-UD和7-GUDS-UD,它们对非线性、间断解有更好的适应能力和更高的分辨率。3-UDS是构建MUSCL等常用算法的基本格式,广泛应用于计算流体力学软件,如Fluent、Hoam-OpenCFD<sup>[18]</sup>等。多节点高精度迎风格式和中心格式在湍流精细计算中得到广泛的应用<sup>[19]</sup>。和3-UDS比较发现,本文所构造的两类新型高迎风差分格式(GUDS)具有更高的精度、更大的稳定范围;为避免在3-UDS中使用人工粘性提供一条有效途径。

该课题是在高算法提出者高智教授建议下开展研究,特此致谢!

## 参 考 文 献:

- [1] 郭建红, 鲁传敬, 陈瑛, 等. 基于高阶和高分辨率格式的自然空泡流数值模拟[J]. 水动力学研究与进展, A辑, 2009, 24(2): 224-232.  
GUO Jia-hong, LU Chuan-jing, CHEN Ying, et al. Numerical simulation of natural cavitation flow based on high-order and high-resolution schemes[J]. Chinese Journal of Hydrodynamics, 2009, 24(2): 224-232.
- [2] 田芳, 田振夫. 二维对流扩散方程非均匀网格上的高阶紧致差分方法[J]. 水动力学研究与进展, A辑, 2008, 23(5): 475-484.  
TIAN Fang, TIAN Zhen-fu. A high-order compact difference method for 2D convection-diffusion equation on non-uniform grid[J]. Chinese Journal of Hydrodynamics, 2008, 23(5): 475-484.
- [3] 向波蓝, 霄峰, 纪昌明, 等. 基于二阶差分法和非结构网格的有限体积法的溃坝模拟[J]. 水动力学研究与进展, A辑, 2007, 22(6): 737-744.  
XIANG Bo, LAN Xiao-feng, JI Chang-ming, et al. Simulation of dam break wave using 2-D difference and unstructured meshes based finite volume method[J]. Journal of Hydrodynamics. Ser. A, 2007, 22(6): 737-744.
- [4] GAO Wei-duan, YA-li LIU, Ru-xun. The Finite Volume Projection Method with Hybrid Unstructured Triangular Collocated Grids for Incompressible Flows[J]. Journal of Hydrodynamics, 2009, 21(2): 201-211.
- [5] LIN Li-ming, LING Guo-can, WU Ying-xiang, et al. Nonlinear fluid damping in structure-wake oscillators in modeling vortex-induced vibrations[J]. Journal of Hydrodynamics, 2009, 21(1): 1-11.
- [6] VITALIY G, KONSTANTIN L. High-order mimetic finite difference method for diffusion problems on polygonal meshes[J]. Journal of Computational Physics, 2008, 227(20): 8841-8854.
- [7] MICHAEL D, CEDRIC E, ELEUTERIO F T. Finite volume schemes of very high order of accuracy for stiff hyperbolic balance laws[J]. Journal of Computational Physics. 2008, 227(8): 3971-4001.
- [8] 陶文铨. 数值传热学[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1988.  
TAO Wen-quan. Numerical Heat Transfer. [M]. Xi'an: Xi'an Jiaotong University Press, 1998.
- [9] GAO Z. An infinite-order accurate upwind compact difference scheme for the convective diffusion equation[C]. Proc. of Asia Workshop on Computational Fluid Dynamics. Sichuan, China, 1994. 18-24.
- [10] 高智. 摄动有限差分方法研究进展[J]. 力学进展, 2000, 30(2): 200-215.  
GAO Zhi. Advances in perturbation finite difference (PFD) method [J]. Advances in Mechanics. 2000, 30(2): 200-215.
- [11] GAO Zhi, HU Li-min. Perturbational finite difference scheme of convection-diffusion equation[J]. Journal of Hydrodynamics, Ser. B, 2002, 14 (1): 51-57.
- [12] 代民果, 高智. 同位网格摄动有限体积格式求解驱动方腔流[J]. 力学学报, 2006, 38(6): 733-740.  
DAI Min-guo, GAO Zhi. Solving 2-D buoyancy driven cavity flow on collocated meshes by perturbational finite



- volume scheme[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2006, 38(6): 733-740.
- [13] 申义庆, 高智, 杨国伟. NS 方程激波计算的摄动有限差分方法[J]. 空气动力学学报, 2006, 24 (3) :335-339. SHEN Yi-qing, GAO Zhi, YANG Guo-wei. Perturbational finite difference scheme for shock-wave computing of Navier-Stokes equations[J]. Acta Aerodynamica sinica. 2006, 24(3): 335-339.
- [14] 徐文灿, 胡军. 计算流体力学[M]. 北京:北京理工大学出版社, 2009. XU Wen-can, HU Jun. Computational fluid dynamics[M]. BeiJing.: Beijing University of Technology Press, 2009.
- [15] 高智. 摄动算法的改进和对流扩散方程的绝对稳定中心格式[C]. 第 14 届全国计算流体力学会议论文集, 贵阳, 2009, 176-180. GAO Zhi. The Improvement of Perturbational algorithm and absolute stable center scheme for convection-diffusion equation[C]. Proceedings of the 14th National Conference on Computational Fluid Dynamics, Gui Yang, 2009. 176-180.
- [16] 李桂波, 李明军, 高智. 对流扩散方程的变步长摄动有限差分格式[J]. 水动力学研究与进展, A 辑, 2005, 20(3):293-299. LI Gui-bo, LI Ming-jun, GAO Zhi. The perturbational finite difference(PFD)scheme of variational step of convection-diffusion equation[J]. Journal of Hydrodynamics. Ser. A, 2005, 20(3):293-299.
- [17] 付凯新, 黄云清, 舒适. 数值计算方法[M]. 长沙: 湖南科学技术出版, 2002. FU Ka-Xin, HUANG Yun-Qing, SHU Shi. Numerical Calculation Methods[M]. ChangSha: HuNan Science and Technology Press, 2002.
- [18] 李新亮, 傅德薰, 马延文, 等. 高精度复杂流动数值模拟软件 Hoam-OpenCFD 的开发及应用[J]. 高性能计算发展与应用, 2007, 20(3):52-58. LI Xin-liang, FU De-xun, MA Yan-wen, et al. Development and applications of software "Hoam-OpenCFD" for complex flow simulations[J]. Development and Application of High-performance Computing. 2007, 20(3): 52-58.
- [19] RAJAT M, PARVIZ M. Suitability of upwind-biased finite difference schemes for large-eddy simulation of turbulent flows[J]. AIAA Journal, 1997, 35(8): 1415-1417.