

MHD 控制超声速边界层的理论研究和数值分析¹⁾

苏伟仪²⁾ 陈立红 张新宇

(中国科学院力学研究所高温气体动力学重点实验室, 北京 100190)

摘要 对 MHD(mechanisms of magnetohydrodynamics) 控制超声速平板湍流边界层的机理进行了理论研究和数值模拟. 理论上, 采用等离子体低频近似碰撞频率模型, 建立等离子体中电子和离子的力平衡方程, 得到等离子体速度、极化电场以及边界层速度. 数值上, 通过空间 HLLC 格式、LU-SGS 时间推进求解时均磁流体动力学湍流方程, 其中湍流模型采用 sst-k ω 双方程模型. 研究表明: (1) 边界层速度的理论结果和数值结果误差在 7% 范围内; (2) 只有磁场而电场为零时, 洛伦兹力起到减小摩擦的作用. 施加电场后, 洛伦兹力能够加速边界层低速区流体; (3) 在边界层外层, 越靠近壁面, 作用参数越小; 而在边界层近壁区黏性底层, 虽然惯性力减小, 但黏性力却迅速增加, 因此越靠近壁面, 作用参数反而越大, 加速低速流的代价增加.

关键词 MHD 流动控制, 边界层加速, 低频近似, 超声速边界层

中图分类号: V235.21 文献标识码: A 文章编号: 0459-1879(2010)04-0782-07

引 言

激波和边界层相互作用及其导致的边界层分离是超燃冲压发动机内流的基本物理现象, 对发动机的性能和工作特性有着重要影响, 大多数情况下这种分离是不希望发生的. 以超燃冲压发动机隔离段为例, 燃烧室释热形成的背压会通过边界层往隔离段传递, 背压大到一定程度时会把分离点推出隔离段而进入到进气道压缩段, 从而造成进气道不起动.

研究发现^[1]: 隔离段中分离点位置与进气道出口截面的边界层动量厚度和燃烧室内压强升高有关. 当燃烧室压强超过进气道所能承受的最大背压时, 分离点会在逆压梯度作用下向上游的进气道移动, 一旦分离点被推到进气道压缩段, 发动机推力会急剧下降^[2], 导致超燃冲压发动机很难获得净推力.

MHD (mechanisms of magnetohydrodynamics) 技术在高超声速进气道流动控制方面有着巨大的潜力, 近年来, 国内外提出了将 MHD 技术应用于控制高超声速激波-边界层相互作用的设想, 并开展了大量的研究. 在实验方面, 普林斯顿大学在马赫数为 2.8 的下吹式风洞中进行了 MHD 控制激波-平板边界层相互作用的研究^[3-5], 日本在激波管风洞上

进行了 MHD 减小前台阶分离流的原理性实验^[6-7], 通过实验证实了洛伦兹力加速边界层低速区流体^[5]和减小分离区的效应^[6]. 数值模拟方面, 文献^[8-9]从数值上证实了洛伦兹力能控制二维压缩拐角和激波入射平板边界层所导致的分离流动.

数值模拟和实验研究的开展, 为 MHD 控制边界层分离提供了细致的流场结构和大量的数据; 然而, 实验研究和数值模拟的大量开展, 迫切需要理论的指导和解释, 此外, 理论研究是验证数值模拟的重要手段之一, 因此, 发展相应的理论显得非常迫切.

Macheret^[10]对 MHD 加速超声速边界层进行了理论研究, 其模型如图 1 所示, 在 XY 平面的平板上布置两个电极, 气流沿着平板自右向左流动. 当阴阳极之间的电场强度超过空气的击穿场强时, 空气被击穿生成等离子体, 此时, 如果再施加沿着 Z

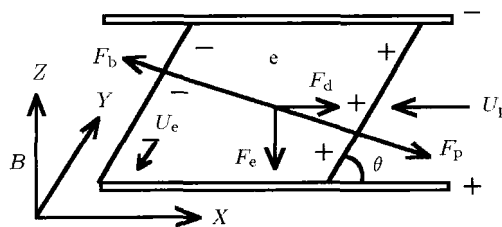


图 1 等离子体中自由电子的受力分析

Fig.1 Force balance analysis for electrons in the plasma

2008-12-26 收到第 1 稿, 2009-08-11 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金资助项目 (90305022, 10525212).

2) E-mail: suweiyi@sina.com

方向的磁场，电磁场产生的洛仑兹力会加速边界层低速区。

通过对电子和离子进行受力分析建立力平衡方程，Macheret 得到了等离子体中极化电场、等离子体速度等一系列参数。采用该理论，可以方便地进行理论分析，然而，Macheret 的理论中涉及到电子-分子碰撞频率 ν_{en} 和离子分离碰撞频率 ν_{in} ，在文献 [10] 中， $\nu_{en} = 1.4 \times 10^{11} \text{s}^{-1}$ ， $\nu_{in} = 1.15 \times 10^9 \text{s}^{-1}$ 。但根据等离子体理论， ν_{en} 和 ν_{in} 与压力、温度和分子数密度等宏观量有关，不同的压力和温度条件下碰撞频率显然不同。为此，本文把等离子体低频近似的碰撞频率模型 [11] 引入到文献 [10] 的理论中，以完善洛仑兹力加速高超声速边界层的物理模型。

采用低频近似假设等离子体碰撞频率模型，能得到施加 MHD 控制后边界层流场参数和等离子体参数的理论解，为了便于和理论解进行对照，本文在杨国伟等 [12] 工作的基础上，把雷诺时均双方程湍流模型的 CFD 程序发展成低磁雷诺数近似的磁流体动力学程序，利用该程序能求取相关问题的数值解。本文还将理论解和数值解进行对照，分析理论解和数值解的差别，并对 MHD 控制平板边界层的物理机制进行研究。

1 理论模型及改进

1.1 理论模型

对图 1 的平板模型，Macheret 求得极化电场和等离子体的速度为 [10]

$$E_p = (\Omega_e \sin \theta + \cos \theta) \frac{(E - uB) \left(1 + 2 \frac{\Omega_e \Omega_i}{\Omega_e + \Omega_i} \cot \theta\right)}{1 + \Omega_e \Omega_i + 2 \frac{\Omega_e \Omega_i}{\Omega_e + \Omega_i} \cot \theta}$$

$$(\sin \theta + \Omega_e \cos \theta) \frac{\Omega_i (E - uB)}{1 + \Omega_e \Omega_i + 2 \frac{\Omega_e \Omega_i}{\Omega_e + \Omega_i} \cot \theta} \quad (1)$$

$$u_p = \frac{\Omega_e \Omega_i \frac{E}{B} + u \left(1 + 2 \frac{\Omega_e \Omega_i}{\Omega_e + \Omega_i} \cot \theta\right)}{1 + \Omega_e \Omega_i + 2 \frac{\Omega_e \Omega_i}{\Omega_e + \Omega_i} \cot \theta} \quad (2)$$

式 (1) 和式 (2) 中， E_p 为极化电场， E 为电极形成的电场， B 为外加磁场， u 为流场速度在 X 方向的分量， u_p 为等离子体移动的速度， θ 是由霍尔效应等离子体和电极之间形成的夹角。 $\Omega_e = \frac{eB}{m\nu_{en}}$ 和 $\Omega_i = \frac{eB}{M'\nu_{in}}$ 分别为电子回旋频率和离子回旋频率， m 和 M' 为电子和离子质量， e 为自由电子的电量。

假设等离子体的高度是 $Z = h$ ，在边界层速度为 V_0 处施加了洛仑兹力加速后，速度的增加量为 [10]

$$V - V_0 = \frac{u_p}{\frac{1}{2}(V + V_0)} - 0.5k_{in}n_i h \quad (3)$$

由式 (3) 推得

$$V^2 - V_0^2 = u_p k_{in} n_i h \quad (4)$$

定义作用参数为 [10]

$$S = \frac{V^2 - V_0^2}{V_0^2} = \frac{u_p k_{in} n_i h}{V_0^2} \quad (5)$$

式 (3) 中 V 为施加 MHD 控制后边界层任一位置的速度， $k_{in} = 1.1 \times 10^{-15} \text{m}^3/\text{s}$ 为离子-分子的动量输运率常数。

1.2 模型改进

通常情况下，控制电场的频率不高，可以采用等离子体低频近似假设下的电子-分子碰撞频率和离子-分子碰撞频率 [11]

$$\nu_{en} = 1.5 \times 10^{11} \frac{N_m}{2.7 \times 10^{19}} \sqrt{\frac{T}{300}} \quad (6)$$

$$\nu_{in} = 4.0 \times 10^9 \frac{N_m}{2.7 \times 10^{19}} \sqrt{\frac{T}{300}} \quad (7)$$

式中， N_m 为空气的分子数密度。联立理想气体状态方程

$$p = N_m k T \quad (8)$$

将低频近似假设的等离子体碰撞频率式 (6)~式 (8)，代入到式 (1)~式 (5)，能得到 MHD 加速边界层时的相关的流场参数，如极化电场、等离子体速度、任一位置流体被洛仑兹力加速后速度的大小等。式 (8) 中，玻尔兹曼常数 $k = 1.381 \times 10^{-23} \text{J/K}$ 。

2 计算方法

2.1 控制方程

采用小磁雷诺数近似的 MHD 方程

$$\mathbf{Q}_t + \mathbf{F}_x + \mathbf{G}_y + \mathbf{H}_z = \mathbf{F}_{vx} + \mathbf{G}_{vy} + \mathbf{H}_{vz} + \mathbf{S} \quad (9)$$

在使用 sst-kw 湍流模型时

$$\mathbf{Q}_t = [\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho e, \rho k, \rho \omega]^T \quad (10)$$

$$S = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma[B_z(E_y + wB_x - uB_z) - B_y(E_z + uB_y - vB_x)] \\ \sigma[B_x(E_z + uB_y - vB_x) - B_z(E_x + vB_z - wB_y)] \\ \sigma[B_y(E_x + vB_z - wB_y) - B_x(E_y + wB_x - uB_z)] \\ \sigma[E_x(E_x + vB_z - wB_y) + E_y(E_y + wB_x - uB_z) + E_z(E_z + uB_y - vB_x)] \end{pmatrix} \quad (11)$$

式中， σ 为等离子体电导率， E_X, E_Y, E_Z 和 B_X, B_Y, B_Z 分别为 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 在 X, Y, Z 3 个方向的分量。

2.2 数值方法

文献 [12] 给出了程序的求解方法：空间离散采用 HLLC 格式，时间采用 LU-SGS 隐式推进，湍流模型采用 sst- $k\omega$ 模型。为了提高精度，求解界面上无黏通量时，原始变量由三阶 MUSCL 得到。

3 数值验证及计算结果

为了验证程序计算湍流和磁流体流动的能力，先对超声速平板湍流流动和超声速磁流体绕钝头体两个经典流动进行了计算。

3.1 超声速平板湍流流动

计算条件为 $M_\infty = 2.244, \rho_\infty = 1.0 \text{ kg/m}^3, T_\infty = 287 \text{ K}$ ，平板长 1 m。

计算网格：计算区域高度取为 0.3 m，网格数为 $264 \times 3 \times 151$ ，为了保证第 1 层网格 $y^+ < 1$ ，第 1 层网格到壁面的距离为 $Y = 0.001 \text{ mm}$ 。其中 $y^+ = \frac{\rho u_\tau Y}{\mu_w}$ ， u_τ 为壁面摩擦速度， μ_w 为壁面处气体黏性系数。

边界条件：入口取超声速来流条件，出口采用外推，壁面采用绝热无滑移条件。

图 2 是 $u^+ - y^+$ 的关系图，图中数值计算的 $u^+ - y^+$ 与理论壁面律 $u^+ = \frac{1}{0.41} \ln y^+ + 5.2$ 符合较好，表明程序能准确计算湍流流动。

3.2 超声速来流绕钝头体流动

对于小磁雷诺数磁流体流动，最常见的是验证算例是高超声速圆柱钝头体绕流 [11,13]。

计算条件为 $M_\infty = 2.97, \rho_\infty = 3.035 \times 10^{-5} \text{ kg/m}^3, T_\infty = 3708 \text{ K}, u_\infty = 3625 \text{ m/s}$ 。圆柱钝头体

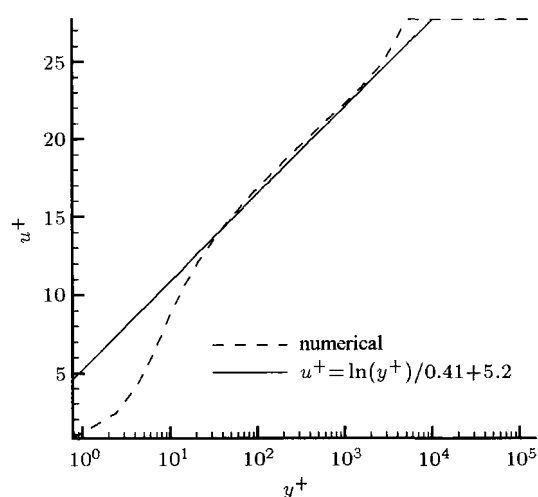


图 2 u^+ 与 y^+ 的关系
Fig.2 The dependence of u^+ to y^+

半径为 $r_b = 0.025 \text{ m}$ ，电导率 $\sigma = 800 \text{ S/m}$ ，磁场分别为 0, 0.02 T, 0.025 T, 0.030 T, 0.035 T。

计算网格：取四分之一圆柱，网格数目为 $101 \times 11 \times 117$ 。

边界条件：入口为来流条件，出口为外推边界，圆柱表面为无滑移绝热壁，对称面用对称边界条件。

激波的脱体距离定义为 $\Delta s = \frac{r_s - r_b}{r_s}$ ，无磁场时的脱体距离定义为 Δs_0 ，则 $\frac{\Delta s}{\Delta s_0}$ 与磁作用参数 $S = \frac{\sigma B^2 r_b}{\rho_\infty u_\infty}$ 的关系有解析解 [14]，在推导该解的过程中假设激波是圆形的。因而数值解 $\Delta s = \frac{r_s - r_b}{r_s}$ 中激波的曲率半径有两个值，一个为和钝体同圆心，另一个为激波的最大曲率半径 [14]。图 3 给出了数值

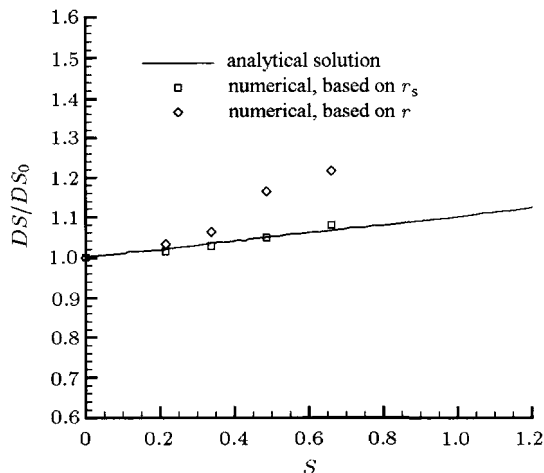


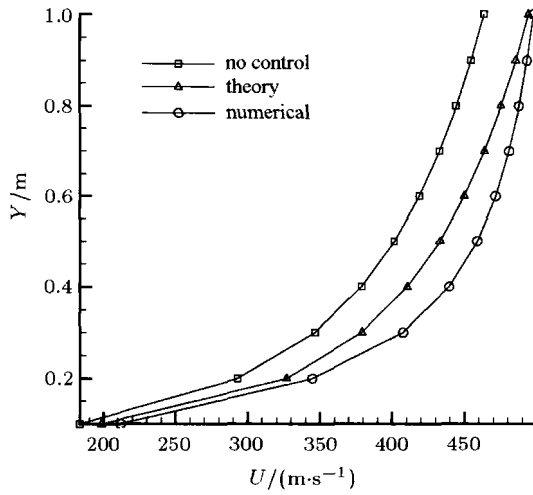
图 3 激波脱体距离理论解和数值解的对比
Fig.3 Comparisons of shock stand of distances in theory and numerically

解和理论解的验证结果，可见， r_s 取最大的曲率半径时数值解和理论解符合较好。本算例表明程序能准确计算小磁雷诺数高超声速流动。

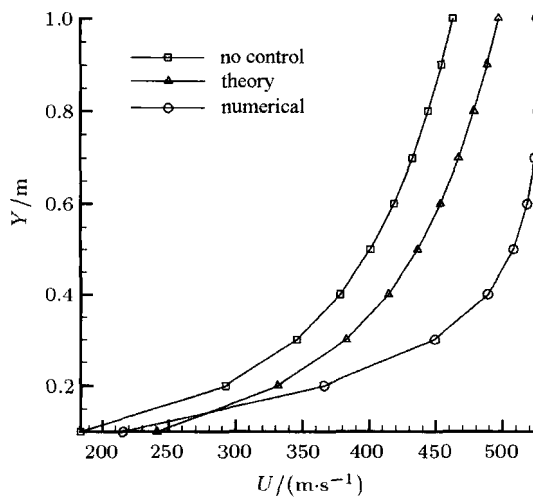
3.3 数值解与理论解的比较

选取 3.1 节的平板来进行分析，来流条件为 $M_\infty = 2.244$, $\rho_\infty = 0.04 \text{ kg/m}^3$, $T_\infty = 287 \text{ K}$. MHD 作用区域的范围是 $0.798 \text{ m} \leq X \leq 0.819 \text{ m}$, $0 \leq Y \leq 1.167 \times 10^{-3} \text{ m}$. 磁场 $B = 5 \text{ T}$, $\sigma = 10 \text{ S/m}$, 电场 $E = ku_\infty B$ 沿着 y 方向, $k = 0$ 时电场强度大小为 0, $k = 1.0$ 时电场强度大小为 3750 V/m , $k = 1.5$ 时电场强度大小为 5625 V/m .

图 4 分别给出了 $k = 1.0$ 和 $k = 1.5$ 时 $X = 0.806 \text{ m}$, $0.1 \times 10^{-3} \text{ mm} \leq Y \leq 1 \times 10^{-3} \text{ m}$ 内边界



(a) $k = 1.0, X = 0.806 \text{ m}$



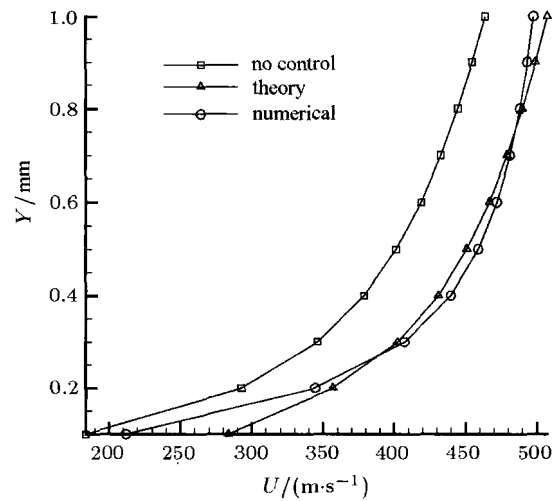
(b) $k = 1.5, X = 0.806 \text{ m}$

图 4 边界层速度理论解和数值解的对比

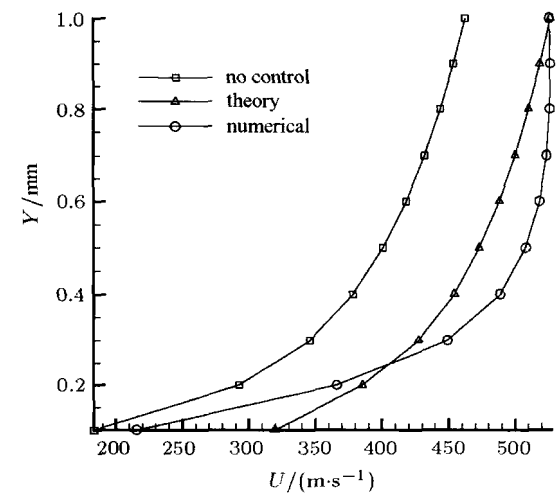
Fig.4 Comparison of boundary layer

层速度的理论解和数值解分布，其中，碰撞频率取文献 [10] 中给定的常数。由图可见，理论值和数值解变化趋势一致，与无 MHD 控制时相比，不同 y 处的流体被不同程度地加速，但理论解明显比数值解小。

数值解和理论解有较大差别的原因是 ν_{en} 和 ν_{in} 取文献 [10] 中的常数值，事实上它们是压强、温度的函数。采用等离子体低频近似的碰撞频率模型 (6)~(8)，并运用电子和离子的力平衡方程，能求出修正后的理论解，图 5 给出了 $k = 1.0$ 和 $k = 1.5$ 两



(a) $k = 1.0, X = 0.806 \text{ m}$



(b) $k = 1.5, X = 0.806 \text{ m}$

图 5 采用低频近似碰撞频率模型的边界层速度理论解和数值解的对比

Fig.5 Comparison of numerical velocity value and theoretical velocity values by taking low frequency collision frequency model

种情况下, $X = 0.806\text{ m}$ 处, 距壁面不同高度处的速度值. 可以看出, 受洛仑兹力加速后, 采用式 (6)~式 (8) 的 ν_{en} 和 ν_{in} 得到的边界层速度的理论与数值解更加符合.

定义误差估计为 $\frac{V_t - V_n}{V_t}$, 其中 V_t 和 V_n 分别为边界层速度的理论解和数值解. 图 6 给出了 $k = 1.5$ 时采用不同碰撞频率模型时边界层速度的数值解和理论解的误差分布. 由图可见, 在 0.2 mm 处, 采用文献 [10] 中的碰撞频率常数最大误差高达 18%, 而采用文献 [11] 低频近似假设时, 最大误差不超过 7%. 可见低频近似碰撞频率模型更加准确.

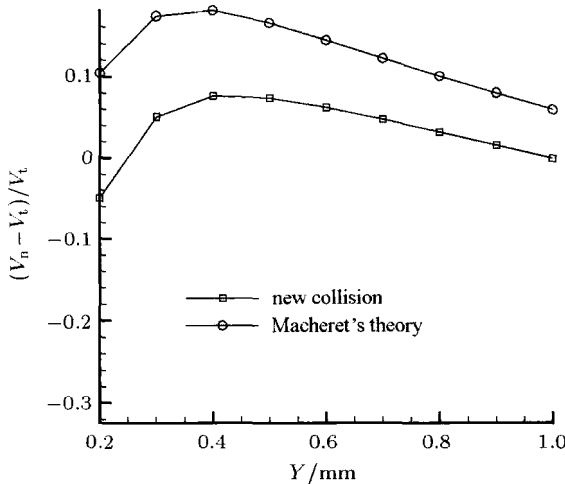


图 6 采用不同碰撞频率的误差分析

Fig.6 Error analysis for different collision models

3.4 MHD 对边界层的影响

图 7 给出了壁面摩擦系数的分布. 在没有施加电场时 ($k = 0$), 洛仑兹力的方向和流动方向相反,

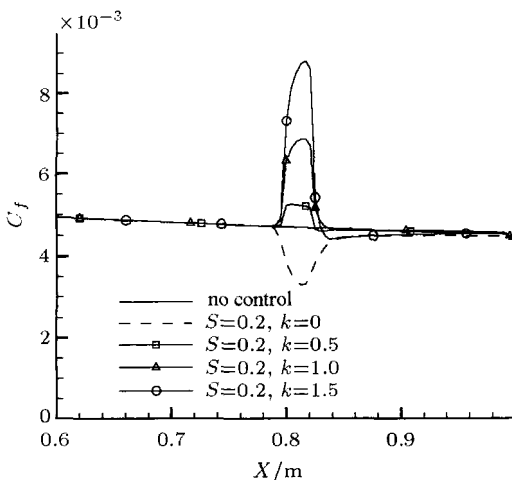
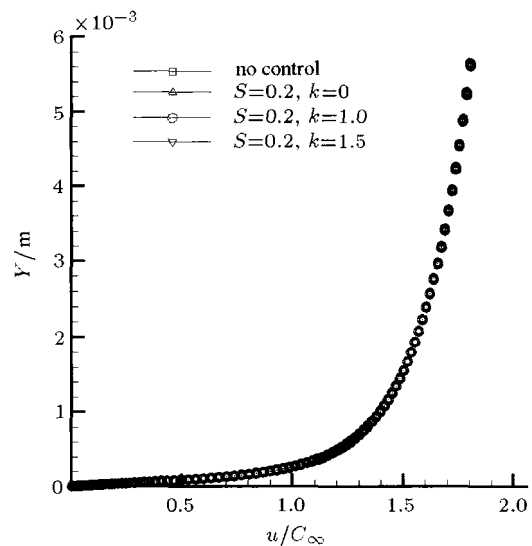


图 7 摩擦系数分布

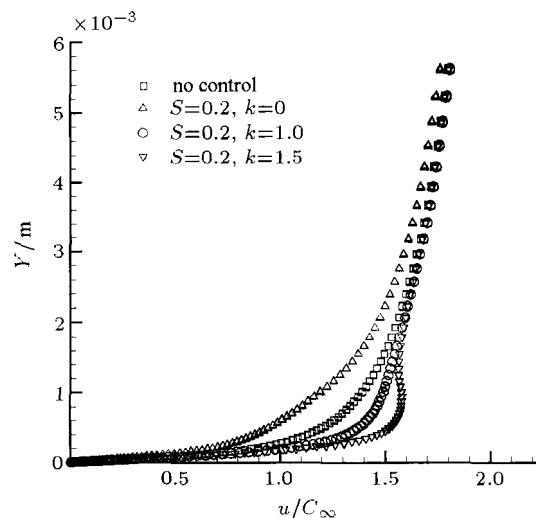
Fig.7 Distributions of skin friction coefficient

此时洛仑兹力起到减阻的作用; 而在施加外加电场后, 可以产生沿着流动方向的洛仑兹力, 从而起到加速边界层, 增强流体抗分离的能力. 图 7 中, 随着载荷系数 k 的增加, 电场强度随之增大, 摩擦系数增加.

摩擦系数变化的原因是速度型面发生改变, 图 8 给出了不同 k 时速度型面的分布, 其中图 8(a) 为 $X = 0.776\text{ m}$ 处, 图 8(b) 为 $X = 0.806\text{ m}$ 处. 由于图 8(a) 中位置处于控制区域上游, 流体不受洛仑兹力的影响, 故其速度型面都相同. 图 8(b) 位于控制区域内, 只有磁场而不施加电场时, 洛仑兹力起到减速作用, 速度型面 $\frac{\partial u}{\partial Z}$ 变小, 故壁面摩擦减小.



(a) $X = 0.779\text{ m}$



(b) $X = 0.806\text{ m}$

图 8 不同载荷系数下速度型面分布

Fig.8 Velocity profiles for different load factors

施加 $k = 1.0$ 和 $k = 1.5$ 的电场后, 洛仑兹力起到加速作用, $\frac{\partial u}{\partial Z}$ 变大, 速度型面变得饱满。

在相同的电场和磁场作用下, 边界层流体与壁面的距离不同, 则流体受影响的程度也不同. 由边界层速度型面可知, 距离壁面越远流体速度越大, 惯性力也越大, 作用参数应该越小. 图 9 中验证了这个物理现象: $k = 1.0$ 时, 在 0.3mm 处的边界层中, 随着壁面距离的增加, 作用参数减小. 这说明控制边界层比控制外部的核心流体要容易, 这就从数值上证实了 MHD 控制边界层会更经济的结论^[14]. 但同时从图 9 中发现了另一个现象: 在 0.3mm 范围内, 随着壁面距离减小, 作用参数也随之减小. 这是因为, 虽然靠近壁面处流体速度减小, 惯性力在减小, 但黏性力却迅速增大, 因此加速流体的代价增加。

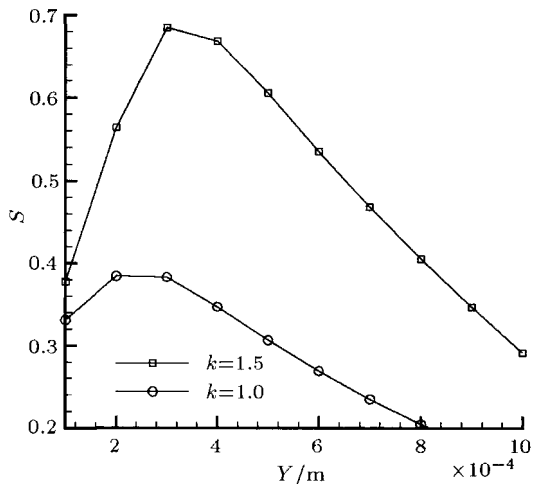


图 9 作用参数与壁面距离的关系

Fig.9 Dependence of interaction parameters to the distances to the wall

4 结 论

对 MHD 控制超声速平板湍流边界层进行了理论研究, 获得了等离子体低频近似假设下边界层速度的理论值. 建立了磁流体动力学湍流计算程序, 并通过超声速平板湍流和超声速钝头体绕流算例验证了程序计算湍流和磁流体流动的正确性. 结合理论研究和数值模拟, 对 MHD 控制超声速平板湍流边界层的机理进行了如下研究:

(1) 比较了施加 MHD 控制后边界层速度的理论解和数值解, 分析了理论模型和数值解的误差. 发现理论结果和数值结果符合得非常好, 采用等离子体

低频近似碰撞频率模型获得的理论值与数值解的相对误差在 7% 以内, 而原模型的最大误差可达 18%.

(2) 数值结果发现, MHD 能减小摩擦、或者加速边界层、改变边界层速度型面.

(3) 从数值上验证了文献 [14]“控制边界层比控制核心流更经济”的结论, 即在边界层外层, 离壁面越近, 惯性力越小, 因此, 作用参数越大, 控制边界层的代价越小.

(4) 数值结果还发现, MHD 加速边界层时, 在近壁区的边界层内层, 离壁面越近, 虽然惯性越来越小, 但黏性力却迅速增长, 因此, 作用参数减小, 加速边界层的代价增加.

参 考 文 献

- Waltrup PJ, Billig FS. Structure of shock wave in cylindrical ducts. *AIAA J*, 1973, 11(10): 1404-1408
- Masatoshi Kodera, Sadatake Tomioka, Takeshi Kanda, et al. Mach 6 test of a SCRAM-jet Engine with boundary layer bleeding and two-staged fuel injection. *AIAA 2003-7049*
- Zaidi SH, Smith T, Macheret SO, et al. Snowplow surface discharge in magnetic field for high speed boundary layer control. *AIAA 2006-1006*
- Kalra C, Zaidi SH, Alderman BJ, et al. Non-thermal control of shock-wave induced boundary layer separation using Magneto-hydrodynamics. *AIAA 2007-4138*
- Kalra C, Zaidi SH, Alderman BJ, et al. Magnetically driven surface discharges for shock-wave induced boundary-layer separation control. *AIAA 2007-222*
- Udagawa K, Kaminaga S, Asano H. MHD boundary layer flow acceleration experiments. *AIAA 2006-3233*
- Saito S, Udagawa K, Kawaguchi K, et al. Boundary layer separation control by MHD interaction. *AIAA 2008-1091*
- Udike GA, Shang JS, Gaitonde DV. Hypersonic separated flow control using Magneto-aerodynamic interaction. *AIAA 2005-164*
- 苏伟仪, 陈立红, 张新宇. MHD 控制激波诱导边界层分离的机理研究. *推进技术*, 2009, 30(2): 229-233(Su Weiyi, Chen Lihong, Zhang Xinyu. Investigation of magnetohydrodynamic control on boundary layer separation induced by shock wave. *Journal of Propulsion Technology*, 2009, 30(2): 229-233(in Chinese))
- Macheret SO. Physics of magnetically accelerated non-equilibrium surface discharges in high-speed flow. *AIAA 2006-1005*
- 金兹堡 B П. 电磁波在等离子体中的传播. 钱善璋译. 北京: 科学出版社, 1978 (Ginzburg VL. *The Propagation of Electromagnetic Waves in Plasmas*. Qian Shanjie, trans. Beijing: Science Press, 1978 (in Chinese))
- 陈大伟, 马小亮, 杨国伟. 超声速大攻角旋成体迎风激波数值模拟. *力学学报*, 2006, 38(6): 721-733(Chen Dawei, Ma Xiaoliang, Yang Guowei. Numerical simulation of windward

- vortex shocks about supersonic slender bodies at high angle of attack. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2006, 38(6): 721–733(in Chinese))
- 13 Jean-Francois Dietiker. Numerical simulation of turbulent magnetohydrodynamic flows. [PhD Thesis]. Kansas: Wichita State University, 2001. 221–223
- 14 Macheret SO, Shneider MN, Miles RB. Magnetohydrodynamic and electrohydrodynamic control of hypersonic flows of weakly ionized plasmas. *AIAA J*, 2004, 42(7): 1378–1387

(责任编辑: 何漫丽)

PHYSICS AND NUMERICAL SIMULATIONS OF MHD ACCELERATED SUPERSONIC BOUNDARY LAYER¹⁾

Su Weiyi²⁾ Chen Lihong Zhang Xinyu

(Key Laboratory of High-Temperature Gas Dynamics, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

Abstract The mechanism of magnetohydrodynamics (MHD) controlling on supersonic flat-plate turbulent boundary layer was explored in theory and numerical simulation. The collision frequencies between the electron-molecules and ion-molecules at the boundary layer were obtained by low frequency approximation in the plasma, and the force balances for electrons and ions were set up to solve the plasma velocities, polarization electric field and the boundary layer velocities. HLLC schemes and LU-SGS method were used to numerically solve the sst- $k\omega$ turbulent model. The results show that, (1) the relative error between numerical results and theoretic results are in the range of 7%; (2) in the absence of electric field, the Lorentz force can decrease the skin friction. With an external electric field applied, the low velocity fluid in the boundary layer can be accelerated; (3) in the outer layer of boundary layer, the interaction parameter decreases with the distance to the wall, but in the inner layer as the viscous force dominates the flow, the interaction parameter increases with the distance to the wall.

Key words MHD flow control, boundary layer acceleration, low frequency approximation, supersonic boundary layer

Received 26 December 2008, revised 11 August 2009.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (90305022,10525212).

2) E-mail: suweiyi@sina.com