

# 直井多级抽油杆柱系统纵向振动问题的频率和振型函数的超逆幂迭代求解

徐永君<sup>1</sup> 王晓博<sup>1</sup> 于俊波<sup>2</sup> 张传绪<sup>2</sup>

(1. 中国科学院力学研究所水动力学与海洋工程重点实验室, 北京 100190; 2. 大庆油田第九采油厂, 大庆, 163853)

**摘要** 利用振型叠加法进行直井抽油杆柱系统纵向振动分析是理想的方法, 但相应的主频率和振型函数求解比较困难, 这也是长期以来未能在多级抽油杆柱系统中得到推广应用的主要原因之一。本文从基本方程入手, 采用换元逆幂迭代法并利用特征函数(振型函数)解析表达形式已知及一些有效技巧研究了可以精确有效地求解具有任意级数、不同材料及不同边界条件的完备特征解(主频率)的求解方法。本文方法在精度、效率、可靠性和通用性等各方面的均有出色表现。  
**关键词:** 直井多级抽油杆柱系统, 振动, 主频率, 振型函数, 振型叠加法, 逆幂迭代法。

## COMPLETE EIGEN-SOLUTIONS FOR MULTILEVEL SUCKER ROD VIBRATION SYSTEM IN VERTICAL WELL BY SUPER-INVERSE-POWER ITERATION

Yongjun Xu<sup>1</sup>, Xiaobo Wang<sup>1</sup>, Junbo Yu<sup>2</sup>, Chuanxu Zhang<sup>2</sup>

(1. Key Laboratory for Hydrodynamics and Ocean Engineering, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing, 100190, CHINA; 2 The 9<sup>th</sup> Oil Production Plant of Daqing Oilfield, Daqing, 163853, CHINA)

**ABSTRACT:** Mode-superposition analysis is an ideal and effective method to solve the axial motion of any dynamic system such as multilevel sucker rod system in vertical well. In these problems of dynamics, the eigen-solutions including eigen-values (main frequencies) and eigen-functions (mode-shapes), play an important role in both theoretical study and numerical applications. Analytical eigen-solutions, however, are not always obtainable, especially for such a general case as arbitrary multilevel sucker rod system, and hence as an alternative approach, numerical solutions are frequently invoked. In this paper, the super-inverse-power iteration method is used to compute accurate and complete eigen-solutions of longitudinal vibrations for multilevel sucker rod system in vertical well. A number of numerical examples are given to show the excellent accuracy, efficiency and reliability of the proposed approach.

**KEYWORDS:** Mode-superposition analysis, multilevel sucker rod system in vertical well, eigen-value (main frequency), eigen-function (mode-shape), vibration, super-inverse-power iteration.

### 1 引言

游梁式抽油系统主要包括抽油机、抽油泵及连接两部分的抽油杆, 结构简单、运行可靠, 得到了普遍使用。疲劳断裂、偏磨是主要破坏形式, 严重时影响油井正常生产, 给油田带来较大的经济损失。抽油杆管柱动力学分析是解决疲劳断裂、偏磨破坏的基础。Gibbs 首次提出了有杆泵抽油系统悬点载荷的预测模型<sup>[1-3]</sup>, 该模型以抽油杆柱一维振动的有阻尼波动方程为基础, 用有限差分法对偏微分方程进行数值求解。该技术 1965 年被 API 采纳<sup>[4]</sup>, 得到广泛应用。基于有限差分法数值求解方法, 在一维模型的基础上又发展了同时考虑抽油杆柱和液柱振动的二维预测模型和同时考虑抽油杆柱、液柱以及油管柱振动的三维预测模型<sup>[5-7]</sup>, 文献[8]利用逆风格式对多级杆柱抽油井三维振动进行了研究, 文献[9]利用有限元法对单级杆柱抽油井二维振动进行了研究。文献[10-11]指出了 API 中给出的模型中强迫振动部分的给出位移边界条件的不合理性。文献[11-13]利用振型叠加法对单级抽油杆柱振动进行了分析, 但文献[11-13]对强迫振动部分采用自由振动的振型进行分析, 振型选取不太合理, 使得结果不能满足方程和边界条件。文献[14]利用一端固定一端带集中质量弹性杆振型<sup>[13]</sup>作为主振型进行分析。

对于直井多级抽油杆柱系统纵向振动问题, 主频率和振型函数的求解就是特征值问题, 对应的特征值问题的基本方程和边界条件与求解多材料反平面切口特征值问题<sup>[15-17]</sup>相似, 所以可以采用相应于多材料

作者简介: 徐永君(1964-), 男, 河北人, 副研究员, 主要从事疲劳断裂、海洋工程、计算力学及实验力学研究(E-mail: yjxu@imech.ac.cn)

反平面切口特征解的一系列方法进行求解<sup>[15-20]</sup>。本文采用文献[15-17]给出的高精度、高效、实用、通用的超逆幂迭代求解方法依序无漏地求得各阶特征值的完备数值解析解。

## 2 力学基本问题和数学模型基本方程

直井有杆泵抽油系统中，抽油杆柱的主要动力学响应就是纵向振动，如图1所示，API<sup>[4]</sup>抽油杆纵向振动问题分为两部分叠加。第I部分是杆柱顶部受正弦激励，底部自由；第II部分是杆柱顶部固定，底部承受正弦位移，该位移的幅度和相位使泵处的等效力和位移与简化前相等。

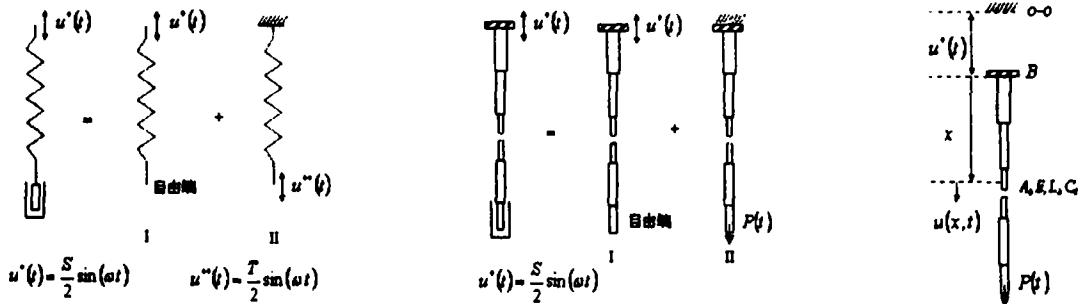


图1. API抽油杆柱运动的力学模型

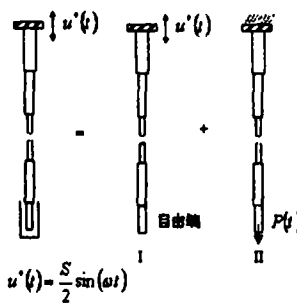


图2. 多级抽油杆柱运动的力学模型

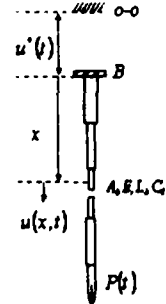


图3. 多级抽油杆柱动力学模型

对于直井多级抽油杆柱系统，如图2所示，同样按API抽油杆纵向振动问题分为两部分叠加。在第II部分受迫振动底部边界条件为泵受力 $P(t)$ ， $P(t)$ 可根据实际井况确定。

进一步，简化成如图3所示的动力学模型。图中o-o为抽油机悬点的上死点；B为抽油杆顶部无质量基础，随抽油机悬点在上、下死点间作往复运动 $u'(t)$ ，既 $u'(t)$ 为基础B在任意时刻 $t$ 相对于上死点的位移； $u(x,t)$ 为任意截面 $x$ 处相对于基础B在任意时刻 $t$ 的位移，这样抽油杆柱顶部相对于基础B就为固支边界； $E$ 为抽油杆柱材料的弹性模量； $A_i, L_i, C_i$ 分别为从上向下的第 $i$ 级杆柱任意截面 $x$ 处的截面面积、第 $i$ 级杆柱的长度、第 $i$ 级杆柱处的阻尼系数。 $P(t)$ 为作用于泵柱塞上的载荷时间函数。 $i=1,2,3,\dots,N,N+1$ ，其中 $N+1$ 为泵柱塞，其余为抽油杆。记 $x_i = \sum_{j=1}^i L_j$ 为第 $i$ 级杆与第 $i+1$ 级杆交界处位置。

不考虑抽油杆接箍的影响，取抽油杆柱微单元进行受力分析，可得抽油杆柱纵向振动微分基本方程为

$$\rho A_i \frac{\partial^2 u_i(x,t)}{\partial t^2} = EA_i \frac{\partial^2 u_i(x,t)}{\partial x^2} - C_i \frac{\partial u_i(x,t)}{\partial t} + f_i(t) \quad (1)$$

$$f_i(t) = (\rho - \rho_L) A_i g - \rho A_i \frac{d^2 u'(t)}{dt^2} - C_i \frac{du'(t)}{dt}, \quad i=1,2,3,\dots,N,N+1$$

其中， $\rho$ 为抽油杆柱材料密度；

$\rho_L$ 为油井液体密度。

直接对式(1)的联立偏微分方程组进行求解是非常复杂且难以实现，将各方程两边除以 $\rho A_i$ 。近似地取各级杆柱的阻尼系数与线质量比值为统一常数 $C = C_i / \rho A_i$ ，定义为等效阻尼系数。式(1)的联立偏微分方程组可简化为统一方程

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - C \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + f(t), \quad f(t) = \frac{(\rho - \rho_L)}{\rho} g - \frac{d^2 u'(t)}{dt^2} - C \frac{du'(t)}{dt} \quad (2)$$

其中 $a = \sqrt{E/\rho}$ 为声波在抽油杆中的传播速度。

### 第I部分：顶部固支，底部自由

对于第I部分，考虑顶部随悬点运动，并受外力 $f(t)$ 作用，所对应偏微分方程和边界条件(Boundary Conditions, BCs)、各级杆间交界条件(位移连续和力平衡条件，Connect Conditions, CCs)分别为

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - C \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + f(t), \quad f(t) = \frac{(\rho - \rho_i)}{\rho} g - \frac{d^2 u^*(t)}{dt^2} - C \frac{du^*(t)}{dt}$$

$$BCs: u(x,t)|_{x=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right|_{x=x_{v,i}} = 0 \quad (3)$$

$$CCs: (u_i(x,t) - u_{i+1}(x,t))|_{x=x_i}; \quad \left( A_i \frac{\partial u_i(x,t)}{\partial x} - A_{i+1} \frac{\partial u_{i+1}(x,t)}{\partial x} \right) \Big|_{x=x_i}; \quad i = 1, 2, 3, \dots, N$$

利用分离变量法, 不难得到偏微分方程(2)的解形式为

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

其中  $X(x)$  为振型函数, 满足常微分方程

$$\frac{d^2 X(x)}{dx^2} + \lambda^2 X(x) = 0; \quad \lambda = \frac{\omega}{a} \quad (4)$$

边界条件为

$$X_1(x)|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{dX_{N+1}(x)}{dx} \right|_{x=x_{v,i}} = 0 \quad (5)$$

交界条件为

$$X_i(x)|_{x=x_i} = X_{i+1}(x)|_{x=x_i}; \quad A_i \left. \frac{dX_i(x)}{dx} \right|_{x=x_i} = A_{i+1} \left. \frac{dX_{i+1}(x)}{dx} \right|_{x=x_i}; \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (6)$$

## 第 II 部分: 顶部固支, 底部受迫

对于第 II 部分, 考虑顶部固定, 抽油杆不受其他外力作用, 泵柱塞受强迫力  $P(t)$ 。不考虑泵柱塞本身轴向变形对抽油杆部分动力效应的影响, 仅将泵柱塞看成一个质量块, 这里暂时用  $P(t)$  作用于抽油杆底部表示受迫端边界条件。所对应偏微分方程和边界条件(Boundary Conditions, BCs)、各级杆间交界条件(Connect Conditions, CCs)分别为

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - C \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$$

$$BCs: u(x,t)|_{x=0} = 0; \quad A_N \left. \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right|_{x=x_v} = P(t) \quad (7)$$

$$CCs: (u_i(x,t) - u_{i+1}(x,t))|_{x=x_i}; \quad \left( A_i \frac{\partial u_i(x,t)}{\partial x} - A_{i+1} \frac{\partial u_{i+1}(x,t)}{\partial x} \right) \Big|_{x=x_i}; \quad i = 1, 2, 3, \dots, N-1$$

这里受迫端边界条件不能用于计算振型和方程求解。

对应于偏微分方程式(7), 经分离变量法(3)变换后, 其中  $X(x)$  为振型函数, 满足常微分方程(4), 对应于常微分方程式(4)的关于  $T(t)$  部分的常微分方程为

$$\ddot{T}(t) + CT(t) + \omega^2 T(t) = 0 \quad (8)$$

式(8)相当于振子、弹簧、阻尼系统的自由振动, 上点表示对时间的导数。单独考虑该常微分方程的解为

$$T(t) = \alpha e^{-\xi\omega t} \cos(\omega_d t + \phi) \quad (9)$$

其中  $\xi = C/2\omega$  为等效阻尼比,  $\omega_d = \sqrt{1 - \xi^2} \omega$  等效阻尼振动频率。 $\alpha$  和  $\phi$  为由初始条件决定的常数。

可以证明  $\xi \ll 1.0$ , 所以在讨论边界条件时近似取  $T(t) = \alpha \cos(\omega t + \phi)$ 。假设不考虑泵柱塞本身轴向变形对抽油杆部分动力效应的影响, 仅将泵柱塞看成一个质量块  $m_{N+1} = \rho A_{N+1} L_{N+1}$ , 一个单位冲量作用于泵柱塞上, 相当于单位冲量驱动泵柱塞质量块以速度  $v_0 = 1/m_{N+1}$  带动抽油杆柱开始运动。质量块运动加速度

为  $\ddot{u}_N(x, t)|_{x=x_N}$ , 质量块对抽油杆作用力为  $-m_{N+1}\ddot{u}_N(x, t)|_{x=x_N}$ , 引起的交界处的应变为  $\partial u_N(x, t)/\partial x|_{x=x_N}$ 。将抽油杆柱与泵柱塞交接处的力平衡条件作为抽油杆柱的杆端边界条件, 这样顶部和底部的边界条件分别为

$$X_1(x)|_{x=0} = 0, \quad EA_N \frac{dX_N(x)}{dx} \Big|_{x=x_N} = m_{N+1}\omega^2 X_N(x) \Big|_{x=x_N} \quad (10)$$

交界条件为

$$X_i(x) \Big|_{x=x_i} = X_{i+1}(x) \Big|_{x=x_i}; \quad A_i \frac{dX_i(x)}{dx} \Big|_{x=x_i} = A_{i+1} \frac{dX_{i+1}(x)}{dx} \Big|_{x=x_i}; \quad i = 1, 2, 3, \dots, N-1 \quad (11)$$

### 3 超逆幂换元迭代算法与实施

统一记第 I 部分和第 II 部分常微分方程特征值问题为

$$f_n'' + \lambda^2 f_n = 0, \quad \begin{cases} \text{I: } n = 1, 2, \dots, N, N+1 \\ \text{II: } n = 1, 2, \dots, N \end{cases} \quad (12)$$

该问题的一个主要特性是其特征函数的形式可以显式写出

$$f_n(x) = \alpha_n \cos \lambda x + \beta_n \sin \lambda x, \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (13)$$

各常系数  $\alpha_n$ 、 $\beta_n$  和特征值  $\lambda$  待定。由边界条件和交接条件可知,  $\alpha_n$  和  $\beta_n$  中仅有一个待定系数, 若知某一级系数, 则其它级的系数均可由交界条件解得。对于多级问题 ( $N > 1$ ), 解析地导出特征方程并求解也是十分困难的。相应的边界条件可表示为

$$x = 0: \quad f_1(0) = 0; \quad \begin{cases} \text{I: } f_{N+1}'(x) \Big|_{x=x_{N+1}} = 0 \\ \text{II: } A_N f_N'(x) \Big|_{x=x_N} = A_{N+1} L_{N+1} \lambda^2 f_N(x) \Big|_{x=x_N} \end{cases} \quad (14a)$$

相应的交界条件为

$$f_n(x_n) = f_{n+1}(x_n), \quad A_n f_n'(x_n) = A_{n+1} f_{n+1}'(x_n), \quad \begin{cases} \text{I: } n = 1, 2, \dots, N \\ \text{II: } n = 1, 2, \dots, N-1 \end{cases} \quad (14b)$$

为表达方便, 定义  $x_0 = 0$ , 记

$$f(x) = \begin{cases} f_n(x) & x_{n-1} \leq x \leq x_n, \quad \begin{cases} \text{I: } n = 1, 2, \dots, N, N+1 \\ \text{II: } n = 1, 2, \dots, N \end{cases} \end{cases} \quad (15)$$

并定义函数内积及其导数内积及相应的导出模分别为

$$\begin{cases} \text{I: } (f, g) = \frac{1}{\sum_{n=1}^{N+1} A_n L_n} \sum_{n=1}^{N+1} \int_{x_{n-1}}^{x_n} A_n f_n(x) g_n(x) dx \\ \text{II: } (f, g) = \frac{1}{\sum_{n=1}^N A_n L_n} \sum_{n=1}^N \int_{x_{n-1}}^{x_n} A_n f_n(x) g_n(x) dx + A_{N+1} L_{N+1} f(x_N) g(x_N). \quad \|f\|_M^2 = (f, f) \\ (f', g') = \frac{1}{\sum_{n=1}^K A_n L_n} \sum_{n=1}^K \int_{x_{n-1}}^{x_n} A_n f_n'(x) g_n'(x) dx, \quad \begin{cases} \text{I: } K = N+1 \\ \text{II: } K = N \end{cases} \end{cases} \quad (16)$$

再引入常微分方程算子  $D^2 = d^2(\cdot)/dx^2$ , 则方程(12)可统一地写为

$$-D^2 f = \lambda^2 f, \quad \begin{cases} \text{I: } 0 \leq x \leq x_{N+1} \\ \text{II: } 0 \leq x \leq x_N \end{cases} \quad (17)$$

上式连同边界条件和交界条件式(14)构成标准的常微分方程特征值问题, 其相应的特征值的Rayleigh商表达式为

$$\lambda^2 = \frac{(f', f')}{(f, f)} \quad (18)$$

而不同阶的特征函数间有如下正交性质

$$(f'_i, f'_j) = (f_i, f_j) = 0, \quad i \neq j \quad (19)$$

其中  $f_i$  为第  $i$  阶特征函数, 当两边界均为应力自由时, 算子  $(-D^2)$  奇异, 而其它情况下均为正定的。为了克服奇异性, 使用特征值移位技巧, 对特征值作一适当的移位  $\mu^2$ , 则方程(17)等价地变换为

$$Lf = \lambda^* f, \quad \text{其中 } L = -(D^2 + \mu^2), \quad \lambda^* = (\lambda^2 - \mu^2) \quad (20)$$

这里算子  $L$  为正定算子, 而边界条件、特征值  $\lambda$  和特征函数  $f$  的性质均不变。

为了唯一地确定相应的特征函数  $f$ , 定义如下的导出模归一化条件

$$\|f\|_M^2 = (f, f) = 1 \quad (21)$$

### 3.1 直接积分迭代和逐次移位迭代

对于式(20), 常规的逆幂迭代法可归结为如下算法

$$\tilde{f}^{(k)} = L^{-1} f^{(k-1)}, \quad \lambda^{(k)} = \frac{1}{\|\tilde{f}^{(k)}\|_M}, \quad \lambda^{2(k)} = \lambda^{2(k-1)} + \mu^2, \quad f^{(k)} = \lambda^{(k)} \tilde{f}^{(k)} \quad (22)$$

$k = 1, 2, 3, \dots$

其中  $L^{-1}$  表示  $L$  的逆算子, 未归一化的解  $\tilde{f}^{(k)}$  是满足条件(14)的如下方程的解

$$L\tilde{f}^{(k)} = f^{(k-1)}, \quad \begin{cases} \text{I: } 0 < x < x_{N+1} \\ \text{II: } 0 < x < x_N \end{cases} \quad (23)$$

记  $\bar{f}$  为人为给定的初始解, 并以  $f^0 = \bar{f}$  开始上述迭代过程。由逆幂迭代法的性质<sup>[21-22]</sup>可知: 若  $\bar{f}$  与首阶特征函数  $f_1$  不正交, 即  $(\bar{f}, f_1) \neq 0$ ,  $\lambda^{(k)}$  和  $f^{(k)}$  将收敛于首阶(最小阶)特征对; 若  $\bar{f}$  与前  $i-1$  阶特征函数正交而与  $f_i$  不正交, 即  $(\bar{f}, f_j) = 0, j = 1, 2, \dots, i-1$ , 而  $(\bar{f}, f_i) \neq 0$ , 则  $\lambda^{(k)}$  和  $f^{(k)}$  将收敛于第  $i$  个特征对。对于本文问题, 我们取

$$\bar{f} = a \cos \bar{\lambda}_0 x + b \sin \bar{\lambda}_0 x \quad (24)$$

其中  $\bar{\lambda}_0$  在数值上应不与任一特征值  $\lambda_i$  相同, 且  $\bar{\lambda}_0 \neq \mu$ 。对于第一种材料域取  $a = b = 1$ , 其它材料域的系数  $a$  和  $b$  由交界条件确定。因此,  $\bar{f}$  非任一特征函数, 保证了迭代将收敛于最小阶特征函数。

在实施时, 须反复对式(23)求解, 其解答为齐次方程的通解加上对应于右端项  $f^{(k-1)}$  的特解  $F_p(f^{(k-1)})$ , 即

$$\tilde{f}^{(k)} = a^{(k)} \cos \mu x + b^{(k)} \sin \mu x + F_p(f^{(k-1)}) \quad (25)$$

其中系数  $a^{(k)}$  和  $b^{(k)}$  可由条件(3)确定, 而特解可由如下的积分求得:

$$F_p(f^{(k-1)}(x)) = \frac{\cos \mu x}{\mu} \int f^{(k-1)}(x) \sin \mu x dx - \frac{\sin \mu x}{\mu} \int f^{(k-1)}(x) \cos \mu x dx \quad (26)$$

记式(14)中齐次方程的通解为  $q(\mu x)$ , 则不难得到前几步的解答:

$$\begin{aligned} k=1: \quad \tilde{f}^{(1)} &= q^{(1)}(\mu x) + \frac{\bar{f}}{\bar{\lambda}_0^2 - \mu^2} \\ k=2: \quad \tilde{f}^{(2)} &= q^{(2)}(\mu x) + F_p(q^{(1)}(\mu x)) + \frac{\bar{f}}{(\bar{\lambda}_0^2 - \mu^2)^2} \\ k=3: \quad \tilde{f}^{(3)} &= q^{(3)}(\mu x) + F_p(q^{(2)}(\mu x)) + F_p^2(q^{(1)}(\mu x)) + \frac{\bar{f}}{(\bar{\lambda}_0^2 - \mu^2)^3} \\ k=4: \quad &\dots \end{aligned} \quad (27)$$

其中

$$F_p(q^{(i)}(x)) = -\left(\frac{a^{(i)}x \sin \mu x - b^{(i)}x \cos \mu x}{2\mu}\right)$$

$$F_p^2(q^{(i)}(x)) = F_p(F_p(q^{(i)}(x)))$$

$$= \frac{a^{(i)}\mu x \sin \mu x - b^{(i)}\mu x \cos \mu x - a^{(i)}(\mu x)^2 \cos \mu x - b^{(i)}(\mu x)^2 \sin \mu x}{8\mu^4}$$
(28)

往后的求解步骤中的特解积分可归结为如下几项积分的组合

$$(1) \int t^n \cos t dt, \quad (2) \int t^n \sin t dt, \quad (t = 2\mu x)$$
(29)

依次进行下去可得式(25)所需特解为

$$F_p(f^{(k-1)}) = \sum_{i=1}^{k-1} F_p^{k-i}(q^{(i)}(x)) + \frac{\bar{f}}{(\bar{\lambda}_0^2 - \mu^2)^k}$$
(30)

若仅采用上述直接积分法求特解, 由于每一步的解答项的不断累加, 使积分出的特解项数越来越多, 显式表达越来越困难。为克服这一困难, 作二至三步特解积分后, 将特征值作一新的适当移位  $\mu_k^2$ , 即在式(22)和(23)所指定的算法中, 将算子  $L$  换为  $L_k = -(D + \mu_k^2)$ , 且  $\lambda^{2(k)} = \lambda^2 + \mu_k^2$ 。这样第  $k$  次迭代时齐次方程的通解为

$$q^{(k-1)}(x) = a^{(k-1)} \cos \mu_{k-1} x + b^{(k-1)} \sin \mu_{k-1} x$$
(31)

而对应于右端项为  $f^{(k-1)}$  的特解易显式地表示为

$$F_p(f^{(k-1)}) = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{q^{(i)}(x)}{\prod_{j=i+1}^k (\mu_j^2 - \mu_i^2)} + \frac{\bar{f}}{(\bar{\lambda}_0^2 - \mu^2) \prod_{i=1}^{k-1} (\bar{\lambda}_0^2 - \mu_i^2)}$$
(32)

### 3.2 换元迭代法和多重移位技巧及已知特征函数过滤

由于每个特征值所对应的特征函数的形式已知并易于显式给出, 所以每进行几次直接积分迭代和移位迭代后就由Rayleigh商估算出新的近似特征值  $\bar{\lambda}_{\text{new}}$  代替原来的初始特征值, 利用边界和交界条件确定新的特征函数重复迭代, 可大大加速收敛速度和提高结果精度。

在逆幂迭代过程中, 计算第  $i$  个特征值及特征函数的收敛速度主要由  $\lambda_i / \lambda_{i+1}$  的大小控制,  $\lambda_i / \lambda_{i+1}$  越接近 1, 收敛速度越慢。当特征值阶数越高, 两相邻特征值比  $\lambda_i / \lambda_{i+1}$  有可能越接近 1。克服这一矛盾的有效手段是多重移位技巧<sup>[21-22]</sup>, 即求下一特征值  $\lambda_i$  前进行适当移位, 使  $\lambda_i^* / \lambda_{i+1}^*$  足够小。对于式(30)每次移位  $\mu^2$  都必须保证不移到某个特征值上而使  $\lambda_i^* / \lambda_{i+1}^*$  尽可能小, 所以按文[21-22]的建议取为

$$\mu = 0.99\lambda_{i-1}$$
(33)

如果已经知道或求出前  $i-1$  个特征值及其特征函数  $f_j$  ( $j=1, 2, \dots, i-1$ ), 迭代求解第  $i$  阶特征值时的初始特征函数可取为

$$f_i^0 = \bar{f} - \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_j f_j, \quad \alpha_j = (\bar{f}, f_j)$$
(34)

使  $f_i^0$  与前  $i-1$  阶特征函数正交而与  $f_i$  不正交, 即  $(f_i^0, f_j) = 0$ ,  $j=1, 2, \dots, i-1$ , 而  $(\bar{f}, f_i) \neq 0$ , 保证了滤掉已知的前  $i-1$  阶特征对而收敛于第  $i$  阶特征对。进行达到一定精度的上述迭代过程后, 采用纯迭代则大大加速了特征根的收敛。

主频率为

$$\omega = \lambda a$$
(35)

## 4 数值算例

对于本文所讨论的问题, 采用两次直接积分迭代和两次移位迭代后换元并且每次移位至第  $i-2$  阶和第  $i-1$  阶之间 (即  $\bar{\lambda}_0 - \mu_i^2 \in (\lambda_{i-2}^2, \lambda_{i-1}^2)$ ,  $k=1, 2$ ) 或移至前几个特征值之间的不同值上 (即

$\lambda_k^2 - \mu_k^2 \in \bigcup_{j=1}^k (\lambda_{j-2}^2, \lambda_{j-1}^2)$ ,  $k=1,2$ )即可。大量单级和多级杆柱系统的特征值数值计算结果表明本法具有高精度、高效、实用、通用性好等优点。

### 例1 多级杆柱系统

以某一油井为例进行分析，杆柱直径组合为[25mm,22mm,19mm,38mm]，长度分别为[496m,595m,1307m,8m]，其中38mm为泵直径。表1给出了两部分前50阶特征根计算结果。

表1 前50阶特征根计算结果

$i$	Part I ( $\lambda_i$ )	Part II ( $\lambda_i$ )
1	7.363273299681710E-04	7.363275258987930E-04
2	1.940978551085930E-03	1.940980587272780E-03
3	3.268225863428790E-03	3.268236264922450E-03
4	4.440046115798430E-03	4.440067720194410E-03
5	5.806357611749050E-03	5.806420398675910E-03
6	7.164376401255790E-03	7.164466459280860E-03
7	8.419244432335790E-03	8.419415392642900E-03
8	9.729590414196610E-03	9.729793042506960E-03
9	1.089161852941270E-02	1.089196680512240E-02
10	1.233356299413640E-02	1.233403552619980E-02
21	2.666663322032930E-02	2.666995370554630E-02
22	2.784388876028970E-02	2.784695154189700E-02
23	2.917068649380040E-02	2.917465358934090E-02
24	3.037674965541200E-02	3.038052356716120E-02
25	3.177710100367820E-02	3.178241813219420E-02
26	3.312931199607860E-02	3.313365881506670E-02
27	3.436372396739050E-02	3.436937653478150E-02
28	3.565950580670430E-02	3.566436629705250E-02
29	3.687748502745670E-02	3.688419375047590E-02
30	3.834668571958520E-02	3.835330680045150E-02
41	5.272637755097440E-02	5.273727042357750E-02
42	5.385969044346190E-02	5.387033513918330E-02
43	5.523119279146390E-02	5.524357507850930E-02
44	5.645979676358380E-02	5.647168156269540E-02
45	5.790091216415740E-02	5.791566539063620E-02
46	5.918302411404770E-02	5.919417247835350E-02
47	6.043353529056390E-02	6.044826176983840E-02
48	6.171474386174760E-02	6.172703924945090E-02
49	6.301324348716060E-02	6.303000822616720E-02
50	6.446534791468770E-02	6.447971680648400E-02

## 5 小结

本文从直井多级抽油杆柱系统纵向振动的特征值和特征函数表示的平衡方程入手，采用换元逆幂迭代法及一些有效技巧研制了直井多级抽油杆柱系统纵向振动特征值问题的通用超逆幂迭代算法并实现了程序实施，从大量的数值算例可以看出本算法具有高精度、高效、实用、通用等优点，并可给出完备的特征值数值解析解。本文从根本上解决了直井多级抽油杆柱系统纵向振动问题的特征值求解。

### 参考文献:

- [1] S. G. Gibbs, predicting the behavior of sucker rod pumping systems. JPT. July. 1963. pp. 769-778.
- [2] S. G. Gibbs, general method for predicting rod pumping system performance. SPE 6850, 1977. pp. 1-8.
- [3] S. G. Gibbs, a review of methods for design and analysis of rod pumping installations. SPT. December, 1982, pp. 2931-2940.
- [4] API RP 11L, Design calculation of sucker rod pumping systems. American petroleum institute. 1967. (API 标准 RP 11L (第3版), 有杆抽油系统设计计算推荐作法。北京: 石油工业出版社, 1972.)
- [5] Dale Russel Doty, Zelimir Schmidt, an improved model for sucker and pumping, SPE 10249, 1982, pp. 1-7.
- [6] Lea J. F., modeling force on a beam pump system when pumping highly viscous crude. SPE 20672, 1990, pp. 553-564.
- [7] 余国安, 有杆泵抽油井的三维振动, 石油学报, 1989, 10(2), pp. 76-83.

- [8] 余国安, 郭亦炯, 王国源等, 多级杆柱抽油机井的三维振动, 石油机械, 1989, 17(6), pp. 16-21, 50.
- [9] 王凤山, 朱君, 王素玲等, 抽油机井杆柱振动载荷有限元分析, 大庆石油地质开发, 2006, 25(1), pp. 85-87.
- [10] 董世民, 马德坤, 黄秀华, 抽油杆柱的纵向振动特性与共振条件, 石油机械, 2001, 29(5), pp. 22-24.
- [11] 朱炳坤, 用振型叠加法对抽油杆柱纵向振动进行分析, 石油矿场机械, 2005, 34(2), pp. 41-43.
- [12] 董世民, 金仁贤, 崔振华, 预测有杆泵抽油系统参数的新方法, 石油机械, 1996, 24(2), pp. 35-39.
- [13] S. Timoshenko, D. H. Young, W. Weaver, Jr., vibration problems in engineering, 4th ed. John Wiley and Sons, Inc., 1974. (铁摩铎柯等著, 胡人礼译, 工程中的振动问题, 人民铁道出版社, 1978.)
- [14] 李桂喜, 马汝建, 准匀速悬点运动下抽油杆柱的振动分析, 石油矿场机械, 2000, 29(6), pp. 33-36.
- [15] 徐永君, 袁驷, 多材料反平面断裂问题特征根的超逆幂迭代求解, 固体力学学报, 1997, 18(4): 290-294.
- [16] Xu Yongjun, Yuan Si, Complete eigen-solutions for anti-plane notches with multi-materials by super-inverse iteration, ACAT mechanica solida Sinica, 1997, 10(2): 157-166.
- [17] 徐永君, 断裂问题特征根的完备求解和基于有限元线法的应力强度因子计算, 清华大学博士学位论文, 1996年12月.
- [18] Xu Yongjun, Yuan Si, Complete Eigen-solutions for Plane Notches with Multi-materials by the Imbedding Method, International Journal of Fracture, 1996, 81: 373-381.
- [19] 徐永君, 袁驷, 断裂问题的特征根区间及其二分迭代求解, 工程力学, 1996, 13(4): 28-40.
- [20] 袁驷, 徐永君, 嵌入法和Muller法联合求解断裂问题特征根的完备解, 计算力学学报, 1997, 第14卷增刊: 639-642.
- [21] Si Yuan, Finite Element Method of Lines; Theory and Applications, Science Press, Beijing-New York, 1993.
- [22] 袁驷、张亿果, 常微分方程特征值问题的求解器解法, 地震工程与工程震动, Vol. 13, No. 2, 1993, pp. 94-102.