

圆夹杂内裂纹对 SH 波的动力响应¹⁾

陆建飞 蔡 兰

柳春图

(江苏大学理学院, 镇江 212013)

(中国科学院力学研究所, 北京 100080)

摘要 利用特殊函数的 Graf 加法公式和波函数展开方法得出了圆夹杂内作用集中力的格林函数. 根据 Bessel 函数的渐近性质, 对所得格林函数的奇异部分和有界部分进行了分离. 利用所得的格林函数和互易定理得出了圆夹杂内裂纹在 SH 波作用下的散射场. 根据裂纹的散射场建立了圆夹杂内裂纹的超奇异积分方程. 对超奇异积分方程的数值求解, 可得裂纹端点的动应力强度因子.

关键词 裂纹, 圆夹杂, SH 波, 超奇异积分方程, 动应力强度因子

引 言

近年来, 随着复合材料的广泛应用, 夹杂和裂纹在弹性波作用下的相互作用问题得到人们的重视^[1~5], 这些研究对复合材料的强度设计具有重要意义. 但不难看出以前的研究局限于界面上的裂纹或基体内的裂纹在弹性波作用下和夹杂的相互作用, 而对于在圆夹杂内的裂纹对弹性波的动力响应的研究则尚未见文献报道. 在外载作用下, 含夹杂的复合材料, 由于应力集中的影响, 在夹杂周围及夹杂中或夹杂界面上常常会萌生裂纹; 裂纹萌生的位置受到多种因素的影响, 例如: 基体材料和夹杂材料的断裂韧性、界面的断裂韧性、基体材料和夹杂材料的模量比以及外载等因素. 因此, 对弹性波作用下裂纹在各种位置和夹杂相互作用问题的研究, 无疑能够为复合材料的强度设计提供更完备的理论基础.

本文以格林函数和超奇异积分方程为工具, 讨论裂纹在圆夹杂内时对 SH 波的动力响应. 为了求解本文的问题, 首先利用特殊函数的 Graf 加法公式^[6]和波函数展开方法得出了圆夹杂内作用集中力时的格林函数. 利用 Bessel 函数的渐近性质^[7], 对所得的格林函数的奇异部分和有界部分进行了分离. 根据所得的格林函数和互易定理^[8]得出了圆夹杂内裂纹在 SH 波作用下的散射场, 利用所得的散射场建立了圆夹杂内裂纹的超奇异积分方程. 对超奇异积分方程的数值求解, 可得裂纹端点的动应力强度因子.

1 格林函数的建立

1.1 格林函数的得出

为了建立圆夹杂内裂纹的积分方程, 必须首先建立圆夹杂内作用集中力时的格林函数. 设圆夹杂的半径为 R , 剪切模量和密度分别为 μ_1, ρ_1 ; 基体的剪切模量和密度分别为 μ_2, ρ_2 . 设简谐单位集中力 $e^{-i\omega t}$ 作用在圆夹杂内的 z 点处, $z = \rho_z e^{i\theta_z}$, 其中 ρ_z 为 z 点的极半径, θ_z 为 z 点的极角, $i = \sqrt{-1}$.

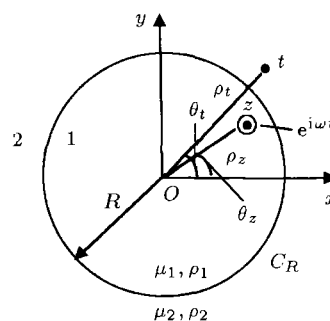


图 1 圆夹杂内作用简谐集中力

Fig.1 A harmonic point force inside circular inclusion

集中力作用在圆夹杂内时的格林函数, 可分为圆夹杂内部分和基体内部分. 显然, 圆夹杂内的格林函数和基体内的格林函数必须满足界面上位移和应力的连续性条件. 圆夹杂内的格林函数又可分为由集中力所引起的入射波, 及由于界面的反射而引起的反射波. 在本文中集中力所引起的入射波称为格林函数的主要部分 ($G_{1p}(t, z)$), 而界面的反射波

2002-09-15 收到第一稿, 2003-05-08 收到修改稿.

1) 中国博士后科学基金资助项目 (2001529).

则称为圆夹杂内格林函数的辅助部分 ($G_{1c}(t, z)$). 因此, 圆夹杂内的格林函数可表示为

$$G_1(t, z) = G_{1p}(t, z) + G_{1c}(t, z) \quad (1)$$

圆夹杂内格林函数的主要部分 $G_{1p}(t, z)$ 由无限平面中的反平面集中力的解所确定

$$G_{1p}(t, z) = \frac{i}{4\mu_1} H_0^{(1)}(k_1|t-z|) e^{-i\omega t} \quad (2)$$

式中: μ_1, k_1 分别为夹杂的剪切模量及波数; $H_0^{(1)}(\cdot)$ 为零阶第一类 Hankel 函数; $e^{-i\omega t}$ 为时间因子, 下文中所有共同时间因子 $e^{-i\omega t}$ 都将略去; $z = \rho_z e^{i\theta_z}$ 为集中力的作用点; $t = \rho_t e^{i\theta_t}$ 为观测点. 根据 Graf 加法公式 [6], 圆夹杂内格林函数的主要部分可表示为

$$G_{1p}(t, z) = \frac{i}{4\mu_1} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m J_m(k_1 \rho_t) H_m^{(1)}(k_1 \rho_z) \cos[m(\theta_t - \theta_z)], \quad \rho_t < \rho_z \quad (3a)$$

$$A_m = -\frac{i\varepsilon_m J_m(k_1 \rho_z) [\mu_1 k_1 H_m^{(1)'}(k_1 R) H_m^{(1)}(k_2 R) - \mu_2 k_2 H_m^{(1)'}(k_2 R) H_m^{(1)}(k_1 R)]}{4\mu_1 [\mu_1 k_1 J_m'(k_1 R) H_m^{(1)}(k_2 R) - \mu_2 k_2 H_m^{(1)'}(k_2 R) J_m(k_1 R)]} \quad (5a)$$

$$B_m = \frac{ik_1 \varepsilon_m J_m(k_1 \rho_z) [J_m'(k_1 R) H_m^{(1)}(k_1 R) - H_m^{(1)'}(k_1 R) J_m(k_1 R)]}{4 [\mu_1 k_1 J_m'(k_1 R) H_m^{(1)}(k_2 R) - \mu_2 k_2 H_m^{(1)'}(k_2 R) J_m(k_1 R)]} \quad (5b)$$

显然, 根据式 (1),(3),(4),(5) 所确定的位移场, 利用几何关系和本构关系可得格林函数所确定的应力.

1.2 格林函数的分解

由式 (2) 可知, 当 $t \rightarrow z$ 时, 格林函数所确定的位移趋于无穷大. 因此, 当利用式 (2) 直接计算格林函数的主要部分时, 则当 $t \rightarrow z$ 时, 便不能准确地计算格林函数. 此外, 为了建立裂纹的超奇异积分方程, 也必须把格林函数主要部分的奇异部分分离出来, 以单独进行处理.

下面考虑如何从式 (3) 所确定的应力分量中分离出奇异性部分. 分离奇异性部分的关键在于如何从级数形式的格林函数中提出发散部分, 并求出发散部分的封闭表达式. 为了说明问题, 以式 (3a) 所确定的 $\sigma_{zr}^{G_{1p}}(t, z)$ 为例来说明奇异性部分的分离. 考虑到第一类 Hankel 函数和 Bessel 函数有如下的渐近性质 [7]

$$H_m^{(1)}(z) \rightarrow -\frac{(m-1)!}{\pi} \left(\frac{2}{z}\right)^m i, \quad m \rightarrow \infty \quad (6a)$$

$$J_m(z) \rightarrow \frac{1}{m!} \left(\frac{z}{2}\right)^m, \quad m \rightarrow \infty \quad (6b)$$

$$G_{1p}(t, z) = \frac{i}{4\mu_1} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m J_m(k_1 \rho_z) H_m^{(1)}(k_1 \rho_t) \cdot$$

$$\cos[m(\theta_t - \theta_z)], \quad \rho_z < \rho_t,$$

$$(下文中 \varepsilon_m \text{ 涵义相同}) \quad (3b)$$

式中: $m=0$ 时, $\varepsilon_m=1$; $m \geq 1$ 时, $\varepsilon_m=2$, $J_m(\cdot)$ 为 Bessel 函数, 设圆夹杂内格林函数的辅助部分及基体内的格林函数可表示为

$$G_{1c}(t, z) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m J_m(k_1 \rho_t) \cos[m(\theta_t - \theta_z)] \quad (4a)$$

$$G_{2c}(t, z) = \sum_{m=0}^{\infty} B_m H_m^{(1)}(k_2 \rho_t) \cos[m(\theta_t - \theta_z)] \quad (4b)$$

则根据式 (1),(3),(4) 及圆夹杂与基体的连续性条件可得

则式 (3a) 所确定的应力 $\sigma_{zr}^{G_{1p}}(t, z)$ 可表示为

$$\begin{aligned} \sigma_{zr}^{G_{1p}}(t, z) = & \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{ik_1}{2} J_m'(k_1 \rho_t) H_m^{(1)}(k_1 \rho_z) - \right. \\ & \left. \frac{1}{2\pi \rho_t} \left(\frac{\rho_t}{\rho_z}\right)^m \right] \cos[m(\theta_t - \theta_z)] + \\ & \frac{ik_1}{4} J_0'(k_1 \rho_t) H_0^{(1)}(k_1 \rho_z) + \\ & \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi \rho_t} \left(\frac{\rho_t}{\rho_z}\right)^m \cos[m(\theta_t - \theta_z)], \quad \rho_t < \rho_z \end{aligned} \quad (7)$$

由于上式中的第 1 项已减去发散部分, 所以当 $t \rightarrow z$ 时, 该级数收敛; 上式中的第 2 项显然有界; 当 $t \rightarrow z$ 时, 上式中的第 3 项趋于无界, 但该部分有如下的封闭表达式

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi \rho_t} \left(\frac{\rho_t}{\rho_z}\right)^m \cos[m(\theta_t - \theta_z)] = \\ & \frac{1}{4\pi \rho_t} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \left[\frac{\rho_t}{\rho_z} e^{i(\theta_t - \theta_z)} \right]^m + \left[\frac{\rho_t}{\rho_z} e^{-i(\theta_t - \theta_z)} \right]^m \right\} = \\ & \frac{1}{4\pi} \left(\frac{e^{i\theta_t}}{z-t} + \frac{e^{-i\theta_t}}{\bar{z}-\bar{t}} \right), \quad \rho_t < \rho_z \end{aligned} \quad (8)$$

式中： $\bar{z} = \rho_z e^{-i\theta_z}$ ， $\bar{t} = \rho_t e^{-i\theta_t}$ 。因此，式 (3a) 所确定的 $\sigma_{zr}^{G_{1p}}(t, z)$ 可分解为 $\sigma_{zrR}^{G_{1p}}(t, z)$ 与 $\sigma_{zrS}^{G_{1p}}(t, z)$ 的和，即

$$\sigma_{zrR}^{G_{1p}}(t, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{ik_l}{2} J'_m(k_l \rho_t) H_m^{(1)}(k_l \rho_z) - \frac{1}{2\pi \rho_t} \left(\frac{\rho_t}{\rho_z} \right)^m \right] \cos[m(\theta_t - \theta_z)] + \frac{ik_l}{4} J'_0(k_l \rho_t) H_0^{(1)}(k_l \rho_z), \quad \rho_t < \rho_z \quad (9a)$$

$$\sigma_{zrS}^{G_{1p}}(t, z) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{e^{i\theta_t}}{z-t} + \frac{e^{-i\theta_t}}{\bar{z}-\bar{t}} \right), \quad \rho_t < \rho_z \quad (9b)$$

式中：下标 R 表示有界部分，而下标 S 则表示奇异部分。式 (3a) 所确定的应力 $\sigma_{z\theta}^{G_{1p}}(t, z)$ 也可进行类似的分解，另外，由式 (3b) 确定的格林函数的应力分量也可进行类似的分解，限于篇幅这里不再列出。此外，式 (3a), (3b) 所确定的应力分量的奇异部分，在直角坐标系 Oxy 中可统一表示为

$$\sigma_{zxS}^{G_{1p}}(t, z) - i\sigma_{zyS}^{G_{1p}}(t, z) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{z-t} \quad (10)$$

下面讨论格林函数辅助部分的分解。式 (4a), (5a) 所确定的格林函数辅助部分的应力，当 z 和 t 都远离夹杂界面时，格林函数的应力有界；但当 $t \rightarrow z$, $z \rightarrow C_R$ 时，则无界。当分析终止于圆夹杂和基体界面的裂纹时，必须分析裂纹和界面接触点处的奇异性。因此，必须把奇异性应力从格林函数辅助部分中分离出来。限于篇幅这里只给出辅助部分应力分量 $\sigma_{zr}^{G_{1c}}(t, z)$ 的分解，按上述类似的方法可得

$$\sigma_{zrR}^{G_{1c}}(t, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \left[\mu_1 k_1 A_m J'_m(k_1 \rho_t) - \frac{\mu_1 - \mu_2}{2\pi(\mu_1 + \mu_2)} \frac{1}{\rho_t} \left(\frac{\rho_t \rho_z}{R^2} \right)^m \right] \cos[m(\theta_t - \theta_z)] + \mu_1 k_1 A_0 J'_0(k_1 \rho_t) \quad (11a)$$

$$\sigma_{zrS}^{G_{1c}}(t, z) = \frac{1}{4\pi} \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \left(\frac{e^{i\theta_t} \bar{z}}{R^2 - t\bar{z}} + \frac{e^{-i\theta_t} z}{R^2 - \bar{t}z} \right) \quad (11b)$$

式中下标 R 和 S 和式 (9) 中有相同的含义。式 (4a), 式 (5a) 所确定的应力分量 $\sigma_{z\theta}^{G_{1c}}(t, z)$ 及由式 (4b), 式 (5b) 所确定的基体内格林函数的应力分量可完全类似地进行分解，这里不再列出。由式 (4a), 式 (5a) 所确定的应力分量的奇异部分 $\sigma_{zrS}^{G_{1c}}(t, z)$, $\sigma_{z\theta S}^{G_{1c}}(t, z)$ 在直角坐标系 Oxy 中可表示为

$$\sigma_{zxS}^{G_{1c}}(t, z) - i\sigma_{zyS}^{G_{1c}}(t, z) = \frac{1}{2\pi} \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \frac{\bar{z}}{R^2 - t\bar{z}} \quad (12)$$

上式所示的奇异应力除了时间因子 $e^{-i\omega t}$ 外，和圆夹杂内作用静态集中力解的奇异部分完全一致 [9]。

2 圆夹杂内裂纹超奇异积分方程的建立

本文所研究的圆夹杂内裂纹对 SH 波的散射问题，总波场可分解为两部分，一为假设裂纹不存在时的自由波场，二为由于裂纹的存在所引起的波场改变，即散射波场。带有圆夹杂的无限平面在平面 SH 波作用下的自由波场，可通过波函数展开方法得到；而散射波场则可利用上面建立的格林函数及互易定理 [8]，通过裂纹面撕开位移的积分来表示。得出自由波场和散射波场后，根据自由波场和散射波场的叠加满足裂纹表面自由的条件即可得圆夹杂内裂纹的超奇异积分方程。

2.1 裂纹散射场的确定

设裂纹 L 的半长为 a ；端点为 A, B ；裂纹和 x 轴的夹角为 $\alpha + \beta$ ； A 点的极角和极径分别为 α, ρ_A ；裂纹 L 和通过 A 点的坐标轴 x_1 的夹角为 β (图 2)。

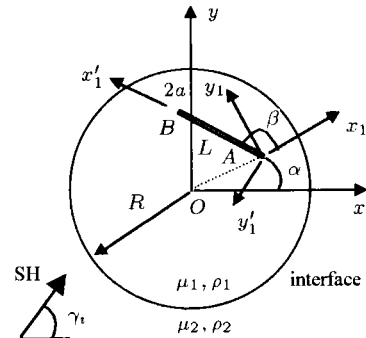


图 2 圆夹杂内的裂纹

Fig.2 A crack inside a circular inclusion

由于格林函数分解为奇异部分和有界部分，类似地，裂纹 L 的散射场也分解为奇异部分和有界部分。首先讨论 L 引起的散射场的奇异部分。设沿 L 裂纹面的撕开位移为 $\Psi(u)$, $0 \leq u \leq 2a$ ，则根据格林函数的奇异部分，式 (10) 和式 (12) 及互易定理 [8] 可得裂纹 L 散射波场奇异部分的应力在坐标系 Oxy 中的表达式为

$$\sigma_{zxS}^{(s_1)}(z) - i\sigma_{zyS}^{(s_1)}(z) = \frac{\mu_1}{2\pi i} \int_0^{2a} \Psi(u) \frac{e^{i(\alpha+\beta)}}{(t-z)^2} du + \frac{\mu_1}{2\pi i} \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \int_0^{2a} \Psi(u) \frac{R^2 e^{-i(\alpha+\beta)}}{(R^2 - \bar{t}z)^2} du \quad (13)$$

式中上标 s_1 表示裂纹 L 所产生的圆夹杂内散射场，下标 S 代表散射场的奇异部分，其中 $z = \rho_z e^{i\theta_z} =$

$x + iy$ 为观测点, 而 $t = \rho_t e^{i\theta_t} = \rho_A e^{i\alpha} + u e^{i(\alpha+\beta)}$ 为积分点. 类似地, 裂纹 L 散射场的有界部分可通过格林函数的有界部分及互易定理 [8] 得到, 其应力在极坐标系下的表达式为

$$\sigma_{zrR}^{(s_1)}(z) = \mu_1 \int_0^{2a} \Psi(u) \left\{ \left[\frac{\partial \sigma_{z\theta R}^{G_{1p}}(t, z)}{\partial \rho_z} + \frac{\partial \sigma_{z\theta R}^{G_{1c}}(t, z)}{\partial \rho_z} \right] \cos(\alpha + \beta - \theta_t) - \left[\frac{\partial \sigma_{zrR}^{G_{1p}}(t, z)}{\partial \rho_z} + \frac{\partial \sigma_{zrR}^{G_{1c}}(t, z)}{\partial \rho_z} \right] \sin(\alpha + \beta - \theta_t) \right\} du \quad (14a)$$

$$\sigma_{z\theta R}^{(s_1)}(z) = \frac{\mu_1}{\rho_z} \int_0^{2a} \Psi(u) \left\{ \left[\frac{\partial \sigma_{z\theta R}^{G_{1p}}(t, z)}{\partial \theta_z} + \frac{\partial \sigma_{z\theta R}^{G_{1c}}(t, z)}{\partial \theta_z} \right] \cos(\alpha + \beta - \theta_t) - \left[\frac{\partial \sigma_{zrR}^{G_{1p}}(t, z)}{\partial \theta_z} + \frac{\partial \sigma_{zrR}^{G_{1c}}(t, z)}{\partial \theta_z} \right] \sin(\alpha + \beta - \theta_t) \right\} du \quad (14b)$$

式中下标 R 表示散射场的有界部分, $\sigma_{zrR}^{G_{1p}}(t, z)$, $\sigma_{zrR}^{G_{1c}}(t, z)$, $\sigma_{z\theta R}^{G_{1p}}(t, z)$, $\sigma_{z\theta R}^{G_{1c}}(t, z)$ 为圆夹杂内格林函数的主要部分和辅助部分的有界应力分量.

2.2 夹杂内裂纹超奇异积分方程的建立

通过上面的分析已得出了和圆夹杂相互作用的裂纹的散射波场. 平面 SH 波作用下, 圆夹杂内的自由波场可通过波函数展开方法得到 [10]. 设入射波为

$$w^{(i)}(z) = A_i e^{ik_2[\cos \gamma_i x + \sin \gamma_i y]} = A_i \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m i^m J_m(k_2 \rho_z) \cos[m(\theta_z - \gamma_i)] \quad (15)$$

根据波函数展开方法, 即可得基体内和圆夹杂内的散射波场 [10], 限于篇幅这里不再列出. 在本文中自由波场上标 f 表示.

自由波场和散射波场的叠加满足裂纹表面的自由条件, 则对裂纹上的任意配置点 z (图 2) 有

$$\sigma_{zy_1}^{(f)}(z) + \sigma_{zy_1}^{(s_1)}(z) = 0, \quad z \in L \quad (16)$$

式中: 上标 s_1 则表示裂纹在圆夹杂内的散射场, 应力分量下标 zy_1 表示该应力为坐标系 $Ax_1'y_1'$ 中的分量. 把式 (13), (14) 代入上式, 则得圆夹杂内裂纹的

超奇异积分方程为

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\mu_1}{2\pi} \text{f.p.} \int_0^{2a} \frac{\Psi(u)}{(u-v)^2} du + \frac{\mu_1 \mu_1 - \mu_2}{2\pi \mu_1 + \mu_2} \int_0^{2a} \Psi(u) \text{Re} \left[\frac{R^2}{(R^2 - tz)^2} \right] du + \\ & \int_0^{2a} \Psi(u) k_R(t, z) du = -\sigma_{zy_1}^{(f)}(z) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

$$0 \leq v \leq 2a, \quad z \in L$$

式中的 f.p. 表示该超奇异积分按照有限部积分的定义来理解 [11], 其中 $z = \rho_z e^{i\theta_z} = \rho_A e^{i\alpha} + v e^{i(\alpha+\beta)}$ 为配置点, $t = \rho_t e^{i\theta_t} = \rho_A e^{i\alpha} + u e^{i(\alpha+\beta)}$ 为积分点, $k_R(t, z)$ 为积分方程的有界核, 可利用式 (14) 来确定. 值得指出的是由于积分方程 (17) 所用格林函数的辅助部分已实现奇异部分和有界部分的分离, 故该积分方程适用于圆夹杂内任意位置的裂纹问题, 包括裂纹终止于界面的情形.

3 数值结果

式 (17) 所示的超奇异积分方程已经有比较标准的求解方法 [12], 这里不再讨论. 设超奇异积分方程的未知函数 $\Psi(u)$ 在裂纹端点 A, B 有如下的渐近表达式

$$\Psi(u) = u^{1/2} \Psi_A^*(u) \quad (18a)$$

$$\Psi(u) = (2a - u)^{1/2} \Psi_B^*(u) \quad (18b)$$

利用 Cauchy 积分的端点性质 [13], 根据坐标系 $Ax_1'y_1'$ 中端点 A, B 领域内的奇性应力可得端点 A, B 的动应力强度因子为

$$K_{3A} = -\frac{\sqrt{2\pi}}{4} \mu_1 \Psi_A^*(0) \quad (19a)$$

$$K_{3B} = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} \mu_1 \Psi_B^*(2a) \quad (19b)$$

算例: 设圆夹杂内的裂纹沿径向, 且在 x 轴上, 关于 y 轴对称 (图 2), 裂纹长度为 $2a$, $\mu_1/\mu_2 = 5.0$, $\rho_1/\rho_2 = 1.0$, a/R 为 0.1, 0.3, 0.5, 0.7. 平面 SH 波 90° 入射, 裂纹端点的动应力强度因子可表示为

$$K_{3A} = K_{3B} = \mu_2 A_i k_2 \sqrt{\pi R} k_{3A} = \mu_2 A_i k_2 \sqrt{\pi R} k_{3B} \quad (20)$$

式中 A_i, k_2 分别为入射波的振幅和基体的波数. 由于 k_{3A}, k_{3B} 均为复数, 所以图 3 给出了裂纹端点动应力强度因子的绝对值随无量纲波数 $k_2 R$ 的变化.

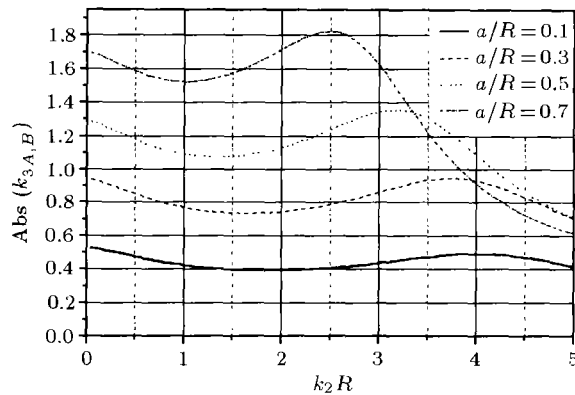


图 3 算例的数值结果

Fig.3 Numerical results of the example

参 考 文 献

- 1 Coussy O. Scattering of elastic waves by an inclusion with an interface crack. *Wave Motion*, 1984, 6(3): 223~236
- 2 Wang YS, Wang D. Scattering of elastic waves by a rigid cylindrical inclusion partially debonded from its surrounding matrix—I SH case. *International Journal of Solids and Structures*, 1996, 33(19): 2789~2815
- 3 Karim MR, Awal MA, Kundu T. Elastic wave scattering by cracks and inclusions in plates: In-plane case. *International Journal of Solids and Structures*, 1992, 29(19): 2355~2367
- 4 Liu GR. A combined finite element/strip element method for analyzing elastic wave scattering by cracks and inclusions in laminates. *Computational Mechanics*, 2001, 28(1): 76~81
- 5 Sung JC, Wong DC. Effect of an inclusion on the interaction of elastic waves with a crack. *Engineering Fracture Mechanics*, 1995, 51(4): 679~695
- 6 Watson GN. A Treatise on the Theory of Bessel Function. Cambridge: Cambridge University Press, 1962
- 7 Abramowitz M, Stegun IA. Handbook of Mathematical Function. New York: Dover, 1965
- 8 Kupradze VD. Progress in Solid Mechanics (Vol.III), Sneddon IN, Hill R eds., Amsterdam: North-Holland, 1965
- 9 陆建飞. 饱和土中的桩土共同作用问题研究. [博士论文]. 上海: 上海交通大学, 2000. 10 (Lu Jianfei. The interaction between piles and saturated soil. [Ph D thesis]. Shanghai: Shanghai Jiaotong University, 2000. 10 (in Chinese))
- 10 Pao YH, Mow CC. Diffraction of Elastic Wave and Dynamic Stress Concentrations. New York: Grane and Rusak, 1973
- 11 Hadamard J. Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Equations. Yale University Press, 1923
- 12 Kaya AC, Erdogan F. On the solution of integral equations with a generalized Cauchy kernel. *Quarterly of Applied Mathematics*, 1987, 15(3): 455~469
- 13 Muskhelishvili NI. Singular Integral Equations. Netherlands: Noordhoff, 1953

SCATTERING OF SH WAVE BY A CRACK INSIDE
A CIRCULAR INCLUSION¹⁾

Lu Jianfei* Cai Lan* Liu Chuntu**

*(Physics and Mathematics Institute of Jiangsu University, Zhenjiang 212013, China)

**(Institute of Mechanics, CAS, Beijing 100080, China)

Abstract Using the Graf formula of Bessel function and wave function expansion method, the Green function of a point force applied inside of a circular inclusion is established. In terms of the asymptotic property of Bessel function, the obtained Green function is separated into a singular part and a regular part. Using the obtained Green function and the reciprocity principle, the scattered field of the crack is available. The hypersingular integral equation of the crack can be constructed through the scattered field of the crack. Numerical solution of the hypersingular integral equation yields the dynamic stress intensity factor at the crack tips.

Key words crack, circular inclusion, SH wave, hypersingular integral equation, dynamic stress intensity factor

Received 15 September 2002, revised 8 May 2003.

1) The project supported by the Postdoctoral Science Foundation of China (2001529).