

## 结构破坏的尺度律\*

Zdenek Bažant

Department of Civil Engineering and Material Science, Northwestern University,  
Evanston IL 60208-3109, U.S.A  
E-mail: z-bazant@nwu.edu

Er-Ping Chen

Material and Structural Mechanics Department, MS0437  
Sandia National Laboratories, Albuquerque NM 87185-0437, U.S.A

**摘 要** 文中综述了结构破坏的尺度律和尺寸效应的研究进展, 尤其将重点放在准脆性材料的分析上, 因为它们的尺寸效应是重要和复杂的. 在回顾了尺寸效应研究的悠远发展史以后, 着重讨论了三种主要类型的尺寸效应, 即由于强度随机性引起的统计尺寸效应、能量释放的尺寸效应和由于微裂纹或断裂的分形特性可能引起的尺寸效应. 得出了这些理论应用的明确结论. 之后讨论了如何运用已知的尺寸效应律来测量材料的断裂特性, 并采用内聚裂纹模型 (cohesive crack model)、非局域化有限元模型和离散元模型等对尺寸效应进行模化. 文中还进而分析了尺寸效应在压缩失效和率相关材料行为下的有关问题, 并讨论了在断裂扩展区描述含微裂纹材料所需的损伤本构关系. 最后也讨论了尺寸效应对准脆性材料的多种应用, 这些材料包括, 如混凝土、海冰、纤维复合材料、岩石和陶瓷等. 本文包含了参考文献 377 篇.

**关键词** 尺度律, 结构破坏, 准脆性, 断裂和损伤, 分形

### 1 引言

尺度律是一切物理理论中最重要的方面. 如果不清楚尺度律, 那么物理理论本身也是难以理解的. 因此在很多物理和工程问题中, 尺度律问题占据其中心位置就不足为奇了. 100 多年前, 尺度律问题在流体力学中就已经起了重要的作用, 推动了边界层理论 (1904 年由 Prandtl 首先建立) 的发展.

在固体力学中, 研究尺度律问题的主要兴趣在于了解结构对名义强度产生什么样的影响. 这是一个非常古老的问题, 甚至比材料力学和结构力学出现的时间早. 15 世纪的 Léonardo da Vinci 就讨论过尺寸效应问题, 他宣称: “在粗细相同的绳索中, 最长的就意味着最不结实” (图 1(a)). 他还写道: “绳索越短, 就会越结实.” 这意味着绳索的名义强度与其长度是成反比的, 当然这是尺寸效应的一种夸张的说法.

一个多世纪之后, 1638 年伽利略在他的那本创立材料力学的名著 (图 2) 中拒绝了 Léonardo 的具有夸张性的定律. 他解释道, 在一条长绳的不同点 (如图 1(b) 的  $F$ ,  $D$  和  $E$  点) 剪断该绳,

\* 本文的翻译得到国家自然科学基金委重大项目 (19891180) 的支持.

肯定不会使剩余的那部分变得更加结实。他指出，在比较大、小动物的时候，只有形状不同的骨头显示才显示有尺寸效应(图 1(c)).

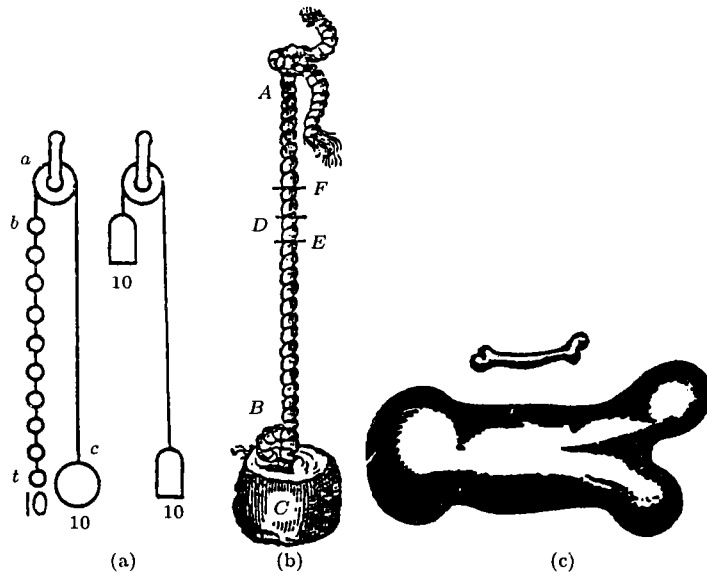


图 1 (a) 15 世纪初期 Léonardo da Vinci 讨论尺寸效应时的图例 (b) 和 (c) 1638 年伽利略讨论尺寸效应时的图例

半个世纪之后，1686 年，Mariotte 取得了一个大的进展。他对绳子、纸张和锡进行了实验观察。从现在的观点看，那时他的论点很富有革命性。因为他认为：“一条长的绳和一条短的绳所承载重量总是一样的，除非长绳子碰巧存在着某个不结实的地方，那么它就好比短绳子断得更快。”他认为，他的结论起源于“物质的非均匀性，即该物质的绝对阻力在某一个地方会比另一个地方小。”就定性而言，他创建了尺寸效应的统计理论，比 Weibull 早了两个半世纪。然而在那时概率理论刚刚诞生，尚未用来处理这种问题。

后来 Mariotte 的那些结论在 1807 年被 Thomas Young 给否定了。从严格的决定论观点分析，Thomas Young 认为“直径为 50.8mm 的金属丝的承重强度恰好是直径为 25.4mm 金属丝的 4 倍”；而且“在增大或减小金属丝内聚强度方面，长度是不起作用的。”这是一种倒退，Thomas Young 显然没有考虑到材料强度的随机分散。后来越来越多的实验清楚地揭示了许多材料存在着尺寸效应。

下一个重大进展属于 Griffith 1921 年的那篇著名的论文。文中，他不但创建了断裂力学，而且还把断裂力学引入到尺寸效应的研究中。他的结论是，“各向同性固体材料的薄弱……

DISCORSI  
E  
DIMOSTRAZIONI  
MATEMATICHE,  
intorno à due nuove scienze  
Attenenti alla  
MECANICA & i MOVIMENTI LOCALI;  
del Signor  
GALILEO GALILEI LINCEO,  
Filosofo e Matematico primario del Serenissimo  
Grand Duca di Toscana.  
Con una Appendice del centro di gravità d'alcuni Solidi.



IN LEIDA.  
Appresso gli Elsevirii. M. D. C. xxxviii.

图 2 伽利略 1638 年的那本著名的材料力学奠基性著作的扉页

是由于本身的不连续或疵点引起的。……如果能消除这些缺陷，那么工程材料的有效强度将至少增加 10 到 20 倍。”Griffith 在他的实验中阐明了这些结论，实验表明当玻璃纤维的直径从 0.107 mm 变化到 0.003 mm，其名义强度将从 291.45 MPa 变化到 3382.99 MPa。在 Griffith 看来，决定材料失效的裂纹或疵点只是细观上的，这对于准脆性材料是不适用的。它们的随机分布决定着材料的局部的宏观强度。Griffith 的工作与其说是发现了一种新型的尺寸效应，倒不如说是表达了 Mariotte 统计概念的物理基础。

除了 Griffith 的工作，其他的材料力学理论家很少考虑到材料的尺度律和尺寸效应问题，这种倾向一直持续到 20 世纪 80 年代。毫无疑问，这是由于在考虑分布损伤和准脆材料的（非线性）的断裂力学出现以前，那时的所有理论无一例外地采用了用应力与应变表达的失效准则，其中包括许用应力下的弹性理论、塑性理论和以微裂纹或微裂缝主导的断裂力学，它们丝毫没有考虑到材料的尺寸效应 (Bažant, (1984))。因此大约直到 1980 年还普遍认为，如果能观察到尺寸效应的话，那一定具有统计性，因此尺寸效应的研究应属于统计学家或实验工作者的任务，而不是力学家研究的范围。例如，1953 年铁摩辛柯 (Timoshenko) 在他的综述性论文“材料强度史”中也没有提到材料的尺寸效应。

然而在概率分析和实验研究中，尺寸效应取得了一定的进展。Peirce (1926) 用公式表达了链的最弱连接模型，并介绍了 Tippett (1925) 首创的极值统计理论，这个理论由 Fréchet (1927), Fisher 和 Tippett (1928), von Mises (1936) 以及其他学者 (见 1968 年 Freudenthal 的文章) 加以修改和完善。最终，这方面的进展由于 Weibull 1939 年在瑞典的工作而达到高峰 (见 Weibull (1949, 1956))。

Weibull (1939) 得出了一个至关重要的结论：具有极小概率的极小强度的尾分布 (tail distribution) 不能用现有的任何分布加以描述。他建议用一个具有门槛值的幂函数律来描述强度极值分布律。其他人 (如 Freudenthal 的文章 (1968) 以及论文选集 (1981)) 通过材料微裂纹的分布的概率模化在理论上证实了他的这种分布。这种分布后来在统计学中被叫做 Weibull 分布。

由于 Weibull 的工作，尺寸效应统计理论的基本框架已基本完成。直到 80 年代，随后的大部分工作都主要是完善、应用和证实 Weibull 的理论 (如 Zaitsev 和 Wittmann (1974), Mihashi 和 Zaitsev (1981), Zech 和 Wittmann (1977), Mihashi (1983), Mihashi 和 Izumi (1977), Carpinteri (1968, 1989), Kittl 和 Diaz (1988, 1989, 1990) 等人的工作)。似乎可以认为，只要能观察到的尺寸效应就一定属于 Weibull 类型。现在我们知道，情况不是这样

Weibull 的尺寸效应统计理论可用于下面几种结构：(1) 失效的开始恰发生在宏观断裂点处，详见第 7 节；(2) 失效仅造成可忽略应力重新分布的一小块断裂扩展区，而疲劳变脆的金属结构正属于这种情况。

但是准脆性材料不属于这种情况。这些材料的特征是存在着具有分布形式的开裂损伤的大的断裂扩展区域。它们包括由不同水泥及添加物作成的水泥砂浆、聚合物和沥青 (尤其是高强混凝土)，不同类型的岩石，冰 (尤其是海冰)，众多的复合材料 (纤维或颗粒增强的)，纤维增强的混凝土，切化的陶瓷，骨头，生物类贝壳，硬粘土，胶结化的沙子，灌浆的土壤，煤炭，纸张，木头，木屑压合的木板，不同类型的耐火材料，一些特殊的硬合金和填充式的人造橡胶等。这些材料的尺寸效应，主要是由于在到达峰值载荷以前，一个长裂纹或者一个具有微裂纹的大的断裂扩展区发生稳定的增长，尤其是由于应力的重新分布和由于长裂纹和大的微裂纹区域的存在而引起的储存能的逐渐释放。

最广泛使用的准脆性材料就是混凝土了。Kaplan (1961) 首先研究混凝土断裂力学，它为发现另外一种类型的尺寸效应打下了基础。Kesler, Naus 和 Lott (1971) 认为用于尖裂纹的经典的线弹性断裂力学不适用于混凝土。这个结论由 Walsh (1972, 1976) 加以证实。Walsh 对不

同大小且具有几何相似的带切槽的梁做了试验, 并且画出了名义强度和试样尺寸的双对数图, 如图 3 所示. Walsh 认为, 不作任何数学描述, 从图中可以发现试验点偏离斜率为  $-1/2$  的直线, 这种偏离标志着与线弹性断裂力学理论 (LEFM) 的不符.

Hillerborg (1976) 等人又向前迈进了一大步. Hillerborg 等人受到已有的软化和塑性断裂区模型的启发, 提出了虚拟 (fictitious) 裂纹模型, 又叫做内聚裂纹 (cohesive crack) 模型. 上述软化和塑性断裂区模型是 Barenblatt (1959, 1962) 和 Dugdale (1960) 提出的, 并经过 Knauss (1973, 1974), Wnuk (1974), Kfoury 和 Rice (1977) 加以发展. 在经过有限元分析之后, Hillerborg 等人进一步认为, 不带有切口的平面混凝土梁弯曲破坏时存在尺寸效应, 而且这种尺寸效应不是 Weibull 类型的.

与此同时, 经过分析, Bažant (1976) 提出, 应变软化损伤的局域化形成带状区域, 会对达到峰值以后的挠度和结构能量的耗散产生尺寸效应. 80 年代初期, 基于能量释放的近似分析, Bažant (1983, 1984) 提出了一个尺寸效应法则的简单公式. 这个公式是用来描述在经过大的稳定裂纹扩展之后, 准脆性结构名义破坏强度的尺寸效应. 同时 Bažant 还用公式表述了一个裂纹带的模型, 该模型可以用一个非常简单的方式通过有限元分析而得到这种类型的尺寸效应 (Bažant (1982), Bažant 和 Oh(1983)). 现在这个模型几乎成了用于工业和商业程序代码中唯一的混凝土断裂模型 (例如, code DIANA, Rots (1888); code SBETA, Cervenka 和 Pukl (1994)). 随后众多研究人员对应应变软化损伤建立了一个更一般的非局域化方法来描述这类尺寸效应 (Bažant, Belytschko 和 Chang (1984), Bažant (1984), Pijaudier-Cabot 和 Bažant (1987), Bažant 和 Pijaudier-Cabot (1988), Bažant 和 Lin (1988a,b) 等).

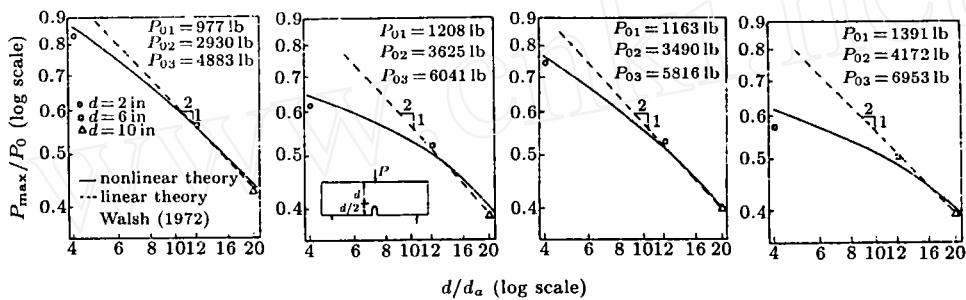


图 3 Walsh (1972) 完成的 6 组几何相似三点弯曲切口梁实验中的 4 组数据点和 Bažant 与 Oh (1983) 用裂纹带模型的有限元分析方法得到的拟合曲线示意图

自 80 年代中期开始, 人们对准脆性材料尺寸效应的研究表现出极大的兴趣, 许多研究人员在这方面做出了显著的成绩, 如 Planas 和 Elices (1988, 1989, 1993), Petersson (1981) 以及 Carpinteri (1986) 等. 尺寸效应已经成为混凝土断裂学术会议的一个主要的议题 (Bažant (eds) 1992, Mihashi 等 (eds) (1993), Wittmann (ed) (1995)).

同时大家也认识到, 对最大载荷下尺寸效应的测量, 被人们当作一种决定准脆性材料断裂特性的简单方法. 这方面的研究在 Cardiff 专题研讨会上形成高潮 (Barr (1995)), 会上由美国和欧洲的一些团体的代表签署了一项以最大载荷的单一测量为基础的联合推荐的检测标准.

Carpinteri 等 (1993, 1995a,b,c), Carpinteri (1994a,b), Carpinteri 和 Chiaia (1995) 在尺寸效应的研究中引入了一个令人感兴趣的的观点. 在众多近期研究不同材料裂纹的分形特性的激励下 (如 Mandelbrot (1984), Brown (1987), Mecholsky 和 Mackin (1988), Cahn (1989), Chen 和 Runt (1989), Hornbogen (1989), Peng 和 Tian (1990), Saouma 等 (1990), Bouchaud 等 (1990), Chelidze 和 Gueguen (1990), Issa 等 (1992), Long 等 (1991), Maloy 等 (1992), Mosolov 和 Borodich (1992),

Borodich (1992), Lange 等 (1993), Xie (1987, 1989, 1993), Xie 等 (1994, 1996), Saouma 和 Barton (1994), Feng 等 (1995) 等等, Carpinteri 和 Chiaia (1994) 建议在不同的观察尺度下, 裂纹和微裂纹的分形特性上的差别, 是混凝土材料尺寸效应的主要原因. 然而, 在 Bažant 近期力学分析中却对这种建议提出了质疑.

目前, 固体力学中有三种有关尺度律的基本理论:

(1) Weibull 的随机强度统计理论 (Weibull (1939), 见第七节);

(2) 长裂纹引起的应力重新分布和断裂能量释放理论 (Bažant (1983, 1984), 见第 3~5 节);

(3) 裂纹分形理论, 它可分为两大类:

(a) 裂纹表面的侵入式分形特性理论 (即表面粗糙度的分形属性) (Carpinteri 等 (1993, 1995a, b, c), Carpinteri (1994a, b), 见第 6 节)

(b) 间隙分形特性理论 (代表着微裂纹的分形分布) (Carpinteri 和 Chiaia (1995), 见第 8 节).

除了这些基本理论之外, 还存在着四种间接的尺寸效应:

(1) 边界层效应: 它是由材料的非均匀性和泊松效应造成的. 前者可以混凝土之类的材料为例, 由于各种骨料不能穿透表面而使表面层具有不同的成分; 而泊松效应指的是, 在试样内部可能存在平面应变的状态, 它们发生在与试件表面平行的平面上, 但不是发生在试件的表面, 而是发生在试件的中心部位.

(2) 表面与裂纹边缘连接处存在三维应力的奇异性: 这也是由于泊松效应引起的 (Bažant 和 Estenssoro (1979)). 这就造成了断裂扩展区域靠近表面的那一部分的力学行为不同于试样内部的力学行为.

(3) 由扩散现象引起的时间相关的尺寸效应, 所谓扩散可以是多孔介质中热的输运或湿气和化学物质的输运 (这一点已在收缩和干燥蠕变现象的尺寸效应中显示出来, 原因是半干燥期依赖于尺寸 (Bažant 和 Kim (1991)); 以及这种尺寸效应对收缩致裂的影响 (Planas 和 Elices (1993))).

(4) 材料本构关系的时间相关性, 特别是材料应变软化的粘性特征, 这一特征中包含了材料时间相关的特征长度 (Tvegaard 和 Hutchinson (1982, 1987), Tvegaard 和 Needliman (1992), Sluys (1992)).

如今, 有关准脆性材料的尺度律研究是一个活跃的、迅速扩展的领域. 尽管近年来在这方面的研究取得了相当大的成功, 但是主要的问题依然存在. 本评述接下来将集中讲述尺寸效应的三大主要理论, 对于间接的尺寸效应这里暂不做讨论.

## 2 幂尺度律和过渡尺寸效应

最基本和最简单的尺度律是在任何一门不存在特征长度的物理理论中得到的. 现在我们来考虑几何相似的梁系统, 如图 4(a) 所示. 结构响应  $Y$  是结构的特征尺寸  $D$  的函数,  $Y = Y_0 f(D)$ ,  $Y$  可以是最大挠度时的最大应力. 梁系统的三种结构尺寸  $1, D, D'$ , 如图 4(a) 所示. 如果尺寸  $1$  被当作是参考尺寸, 则尺寸  $D, D'$  对结构的响应分别是  $Y = Y_0 f(D)$  和  $Y' = Y_0 f(D')$ . 然而, 既然没有特征长度, 那么尺寸  $D$  也可以看作是参考尺寸. 这就意味着

$$\frac{Y'}{Y} = \frac{f(D')}{f(D)} = f\left(\frac{D'}{D}\right) \quad (1)$$

式 (1) 就是未知的尺度律  $f(D)$  的函数方程. 它有且仅有一个解, 也即是幂函数律. 在方程 (1) 中对  $D$  求导数, 并用  $D$  代替  $D'$ , 可得到微分方程

$$df(D)/f(D) = m dD/D \quad (2)$$

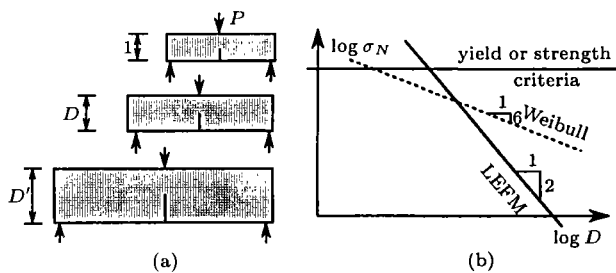


图 4 (a) 不同尺寸  $D$  的几何相似结构, (b) 幂函数律

式中当  $D = 1$  时  $m = df(D)/dD$ . 这个微分方程很容易由分离变量法求解, 初始条件是  $f(1) = 1$ . 求解的结果就是一个带有未知常指数  $m$  的幂函数律:

$$f(D) = D^m \quad (3)$$

前面的推导对每一种没有特征长度物理理论都是可行的. 在固体力学中这样的理论包括弹性理论、塑性理论和线弹性断裂力学 (LEFM) 理论. 其中对于 LEFM 理论, 当然要要求裂纹必须是几何相似的, 这就把有着小缺陷的金属结构排除在外了, 因为小缺陷反映一种材料特性, 不会随着结构的尺度变化而改变.

只有考虑了结构的失效准则才能确定指数  $m$  的大小. 对于包含许用应力的弹性理论和包含用应力或应变分量来表达的失效准则 (如屈服面) 的弹塑性理论来说, 指数  $m = 0$ , 这里结构的响应  $Y$  就代表着应力, 例如最大应力, 或者某一特殊点的应力, 或者在失效点的名义应力 (Bazant (1994)). 这就意味着根据所有的经典理论, 对于不同尺寸而有着几何相似的结构, 失效都发生在同一名义应力 (或同一个最大应力) 处. 通过这个基本的供作参考的例子, 我们可以认为在这种情况下, 就名义强度而言是没有尺寸效应的.

因为在塑性理论中  $m = 0$ , 结构的尺寸效应是用名义强度来度量的. 名义强度是最大载荷  $P$  的参量, 定义为  $\sigma_N = c_n P/bD$ , 其中  $b$  是第三维方向上的结构厚度. 就二维情况的相似性而言,  $\sigma_N = c_n P/D^2$ , 其中  $c_n$  是一个常数, 依赖于结构的形状而不是结构的尺寸. 在  $\sigma_N$  的定义中采用常数  $c_n$  是为了使  $\sigma_N$  符合于某些特征应力的大小, 这些特征应力可以是最大应力、平均应力或者是任一特殊点处的应力.

在 LEFM 理论中情况是不同的. 如果几何相似的结构有着几何相似的裂纹或切槽, 那么名义强度幂函数律中的指数就等于  $m = -1/2$ , 这一结果可以运用 Rice 的  $J$  积分推导得到 (Bazant (1994)).

在名义强度的对数与尺寸的对数所表示的关系图中, 幂函数律是一条直线, 如图 4(b) 所示. 对于塑性理论和包含有许用应力的弹性理论来说, 这一直线的斜率为 0. 而对于 LEFM 理论来说, 直线的斜率为  $-1/2$ .

在这一点上我们还注意到, 对于 Weibull 统计理论 (其中门槛值常可取为 0) 来说, 尺度律也是一个幂函数律. 根据 Zech 和 Wittmann 的试验, 对于混凝土的情况, 在二维和三维相似的情况, 指数  $m$  分别为  $-1/6$  和  $-1/4$ , 如图 4(b) 所示.

然而与前面的推导相反, 它表明 Weibull 统计理论意味着材料没有特征长度. 这就产生了这样一个问题, 即关于 Weibull 统计理论对诸如混凝土或复合材料等脆性材料的可用性. 这些材料明显地有一个特征长度, 它对应于材料微结构的非均匀性的尺度. 这就是为什么 Weibull 统计理论中的尺寸效应不适用于脆性材料的一个原因. 除非尺度变得很大, 以至于它们的非

均匀性可以忽略不计，而大尺度材料的行为从准脆性变为脆性（见第 7 节）。

在准脆性材料中，尺度律问题变得更加复杂，因为材料有特征长度，而且这个特征长度很重要。然而，有一点是清楚的，对于一个足够大尺寸的结构来说，材料非均匀性的尺度以及材料的长度变得不重要了，因此幂函数尺度律可以渐近地适用于足够大的尺寸的情况。如果在失效时有一个大的裂纹，那么这种渐近幂函数律的指数  $m = -1/2$ ，如图 5 虚线所示的渐近线。对于非常小的结构尺寸而言，材料的长度也必须变得不重要，例如在混凝土试样的尺寸仅仅是组份尺寸的几倍的情况。这就意味着对于非常小的尺寸，尺寸效应也应渐近地逼近幂函数律。因为对于非常小的结构尺寸，断裂扩展区布满了整个试样，离散的裂纹是不能看清楚，根据强度准则，幂函数律指数  $m = 0$ ，如图 5 所示的水平渐近线（虚线）。问题的困难在于，大多数准脆性材料的实际应用都会落在两条渐近线之间的过渡区域中，可预期这样的尺度律将遵循某一过渡曲线，如图 5 实线所示。

现在我们可以从能量释放的角度对具有决定性的尺寸效应给出一个最简单的解释。考虑一个矩形面板，如图 6 所示，开始时作用着一个和名义应力  $\sigma_N$  大小一样的应力。在具有一定长度而宽度为  $h$  的断裂扩展区域中引入一条长度为  $a$  的裂纹，可以近似地想象有了应力的解除，从而释放如图 6 所示阴影三角区域和裂纹带中的应变能。应力解除区有效边界的斜率  $k$  为常数，不随尺寸的变化而改变。我们可以设想，对于我们感兴趣的区域，在最大载荷下裂纹的长度近似地与结构的尺寸  $D$  成正比，破坏扩展区的尺寸  $h$  本质上是一个与材料中的非均匀性的尺寸有关的常数（这种假设经常但不总是被实验或者非局域化有限元分析所证实）。

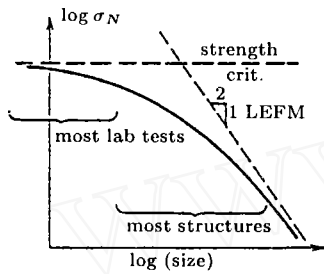


图 5 准脆性结构在经历裂纹大的扩展后失效时名义强度的过渡尺度律曲线

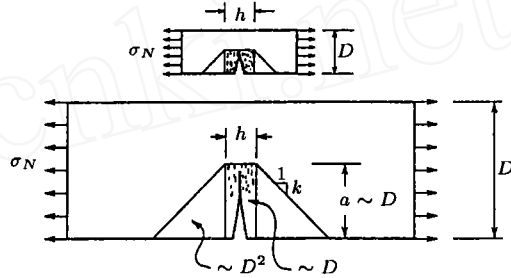


图 6 在大试样和小试样中由于断裂引起的应力释放区示意图

对于一个非常大的结构尺寸，宽度  $h$  就可以忽略不计，于是能量释放仅仅发生在如图 6 所示的阴影三角区域中。该区域的面积与  $D^2$  成正比，这就意味着释放的能量与  $D^2 \sigma_N^2 / E$  成正比（其中  $E$  为弹性模量）。与此同时，消耗的能量与宽度为常数  $h$  的条带的面积成正比，而  $h$  又与  $D$  成正比。因此，由于裂纹引起的能量耗散正比于  $G_f D$ ，其中  $G_f$  是裂纹表面每单位长度和每单位宽度（每单位面积）上的能量耗散，它作为材料本身的一种性质，又叫做裂纹能量。综上所述，明显地有  $D^2 \sigma_N^2 / E \propto G_f D$ ，由此马上可以得出描述非常大的结构的尺寸效应律，那就是  $\sigma_N \propto D^{-1/2}$ 。

另一方面，对于非常小的结构，与裂纹带面积相比，三角形应力解除区域的面积可被忽略，这就意味着释放的能量正比于  $D \sigma_N^2 / E$ ，因此能量的平衡要求  $D \sigma_N^2 / E \propto G_f D$ ，据此得出  $\sigma_N$  为常数。所以，对非常小的结构可以渐近地看作不存在尺寸效应。

前面的分析（详见 Bazant (1983, 1984)）基于这样一个假设：裂纹长度无论在小结构还是大结构都是相似的。根据实验观察和有限元数值模拟，这一假设在人们实际关心的尺寸范围内经常是成立的。然而在有些例子中，裂纹的这种相似性是不存在的，因此尺度律也变得不一样了。

不同尺寸的结构的名义强度与相对挠度的关系曲线如图 7 所示（图 7 中物理量已经无量纲

化, 使得曲线的初始斜率不依赖于结构的尺寸). 尺寸效应除了影响最大载荷值, 还影响达到峰值以后逐渐下降的载荷与挠度关系曲线, 可以简称为峰值后曲线 (postpeak curve). 对于小结构, 峰值后曲线下落很慢; 对于较大结构, 峰值后曲线较陡; 而对于足够大的结构, 峰值后曲线可能存在一个突然的拐点, 即斜率从负的变为正的. 如果用弹簧常数为  $C_S$  的弹性装置对该结构施加载荷, 那么结构便会在载荷与挠度曲线上斜率第一次取值为  $-C_S$  的点 (如果有的话) 上出现失稳, 如图 7 所示. 这些突然失稳的切点就意味着要发生失效. 这些点处的挠度与弹性挠度之比值表征了结构的韧性. 显然, 小的准脆性结构有着较大的韧性, 而大的准脆性结构的韧性较小. 载荷 - 挠度曲线之下的面积代表了结构变形吸收的能量. 这样, 随着结构尺寸的增大, 准脆性结构吸收能量的能力就相应降低. 这对于爆炸加载和冲击作用是很重要的.

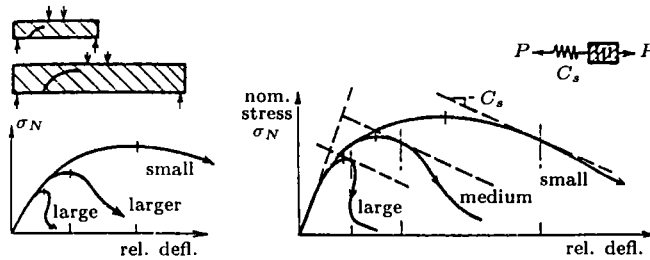


图 7 (a) 不同尺寸的准脆性结构的载荷 - 挠度曲线图, (b) 失稳点示意图其中失稳发生斜率为  $-C_s$  处, 而  $C_s$  是加载装置的刚度

随着尺寸的增加, 图 7 中结构载荷 - 挠度曲线上峰值后曲线的变陡以及拐点的发展可以非常简单地用一串联耦合模型加以解释. 在该模型中, 假定结构的响应至少可以部分地用有内聚裂纹或损伤区与结构的弹性行为的串联耦合进行模化 (Bazant 和 Cedolin (1991). 见第 13.2 节).

### 3 大裂纹失效情况下的尺寸效应: 渐近分析

总体来说, 在裂纹经历大的稳定扩展后, 达到最大载荷时的结构名义强度的尺度律性质通常可由能量释放的渐近分析推导出, 如最近的 Bazant (1996) 的工作. 现在, 我们将简要回顾这一分析, 但我们将限于考虑二维相似性, 三维情形可以类似地得到. 我们定义名义应力为  $\sigma_N = P/bD$ , 其中,  $P$  是施加的载荷或载荷参数,  $b$  是结构在第三维方向上的厚度,  $D$  是结构的特征尺寸 (大小), 例如, 图 8 所示三点弯曲梁的切口深度.

下列无量纲变量可用来表征断裂特征:  $\alpha_0 = a_0/D$ ,  $\alpha = a/D$ ,  $\theta = c_f/D$ , 其中,  $a$  为裂纹总长度, 按照 LFM, 这一总长度反映了同一试件内真实裂纹与断裂扩展区之间的相应性,  $a_0$  为表面无应力裂纹或切口的长度,  $c_f = a - a_0$  为断裂扩展区的有效尺寸 (或  $R$  曲线的有效长度).

然而, 在我们的分析中, 去解释什么是内聚裂纹模型或  $R$  曲线模型并不必要. 总之, 我们可以等效地假设,  $c_f$  为材料的某种长度, 例如,  $c_f = G_f/W_d$ , 其中,  $G_f$  为材料的断裂能 (单位为  $J/m^2$ ),  $W_d$  为单位体积的断裂扩展区中分布裂纹的耗散能 (单位为  $J/m^3$ ), 它由连续介质损伤力学中, 带有应变软化的总应力 - 应变曲线之下的面积来代表. 或者, 我们也可以假设  $c_f = EG_f/f_t^2$ , 其中,  $f_t$  是材料的抗拉强度. 上式来源于 Irwin (1958) 的工作, 它表示材料断裂扩展区的特征尺寸.

分析结构的能量释放, 既可以基于结构在恒定的加载点位移下势能  $\Pi$  的变化, 也可以基于结构在恒载荷下的余能  $\Pi^*$  的变化. 这里, 我们选择后者. 下面为无量纲的  $\Pi^*$  的表达式:

$$\Pi^* = \frac{\sigma_N^2}{E} bD^2 f(\alpha_0, \alpha, \theta) \quad (4)$$



其中,  $E$  为材料的杨氏模量,  $f$  是体现结构几何特征的无量纲函数. 接下来, 我们将介绍最大载荷的两个条件.

第一, 在最大载荷下, 断裂是传播的. 这是指能量释放率  $G$  必须与能量消耗率  $R$  相等.  $R$  可以根据  $R$  曲线 (resistance curve) 的意义来解释, 即  $R$  曲线给出了断裂扩展所要求的临界能量释放率依赖于裂纹长度  $a$  的关系. 在最通常情况下, 断裂阻力可描述为  $R = G_f/r(\alpha_0, \alpha, \theta)$ , 其中  $r$  是相对裂纹长度  $\alpha$ 、相对切口长度  $\alpha_0$  和断裂区相对尺寸  $\theta$  的无量纲函数, 它的性质是当  $\theta \rightarrow 0$  和  $\alpha \rightarrow \alpha_0$  时,  $r \rightarrow 1$ . 在名义应力为常数时对方程 (4) 求导可得能量释放率  $G = (\partial\Pi^*/\partial\alpha)/b$ , 因此我们可以得到关于最大载荷的第一个条件

$$b^{-1}[\partial\Pi^*/\partial\alpha]_{\sigma_N} = G_f r(\alpha_0, \alpha, \theta) \quad (5)$$

第二个条件为, 在载荷控制条件下, 最大载荷代表了稳定性的极限. 如果能量释放率的增长率小于  $R$  曲线的增长率, 则断裂传播是稳定的. 这是因为, 能量释放的改变不足以补偿断裂时能量的消耗和耗散. 达到极限时, 上述二者是相等的, 因此, 最大载荷的第二个条件, 对应于稳定极限, 有如下关系式

$$\left[\frac{\partial G}{\partial\alpha}\right]_{\sigma_N} = \frac{\partial R}{\partial\alpha} \quad (6)$$

在几何上, 它代表的条件是: 能量释放率曲线必与  $R$  曲线相切.

把余能的表达代入方程 (4) 中, 可从前述最大载荷的两个条件中得到结构的如下名义强度:

$$\sigma_N = \sqrt{\frac{EG_f}{D\hat{g}(\alpha_0, \theta)}} \quad (7)$$

其中,  $\hat{g}$  是函数  $f, r$  及它们导数的无量纲函数 (Bazant (1996)). 对于具有正的几何特性 ( $g$  是递增的) 的断裂来说, 这种情况是经常发生的, 那么在相对切口长度  $\alpha_0$  为常数时, 函数  $\hat{g}$  的曲线大致如图 8 所示. 这一函数有按照  $R$  曲线修正的无量纲能量释放率的含义.

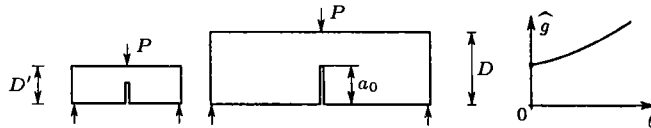


图 8 有大裂纹和函数  $\hat{g}$  的相似结构

显然, 函数  $\hat{g}$  必须光滑, 于是它就可以在点  $(\alpha_0, 0)$  处对相对材料长度  $\theta$  作 Taylor 级数展开. 这样, 可得如下的结构名义强度级数展开式

$$\sigma_N = \sqrt{\frac{EG_f}{D}} \left[ \hat{g}(\alpha_0, 0) + \hat{g}_1(\alpha_0, 0) \frac{c_f}{D} + \frac{1}{2!} \hat{g}_2(\alpha_0, 0) \left(\frac{c_f}{D}\right)^2 + \dots \right]^{-1/2} = \frac{Bf'_t}{\sqrt{D}} (D_0^{-1} + D^{-1} + \kappa_2 D^{-2} + \kappa_3 D^{-3} + \dots)^{-1/2} \quad (8)$$

其中,  $\hat{g}_1, \hat{g}_2$  等为函数  $\hat{g}$  对  $\theta$  的一阶和二阶等偏导数,  $D_0, \kappa_2, \kappa_3, \dots$  为常数, 由函数  $\hat{g}$  及其偏导数在点  $(\alpha_0, 0)$  的取值决定. 此级数展开式中尺寸  $D$  的指数为负, 因此它明显是一个渐近展开式, 并且可以预期它在  $D$  很大时能得到很精确的值. 但是在  $D \rightarrow 0$  时, 它是发散的.

下一个令人关注的问题是如何在小尺寸条件下获得相应的渐近展开式. 为此, 我们用参量  $\eta = \theta^{-1} = D/c_f$  代替原有的参量  $\theta$ . 采用与前面相似的方法, 可以获得结构名义强度的下述表

达式:

$$\sigma_N = \sqrt{\frac{EG_f}{c_f} [\tilde{g}(\alpha_0, \eta)]^{-1/2}} \quad (9)$$

同样, 这一函数也具有无量纲化能量释放率的意义 (用  $R$  曲线作修正), 它是扩展过程区相对尺寸的倒数  $\eta$  的函数. 函数  $\tilde{g}$  仍必须是充分光滑的, 于是可在点  $(\alpha_0, 0)$  处对  $\theta$  作 Taylor 级数展开, 从而有如下的渐近展开表达式:

$$\sigma_N = \sigma_P \left[ 1 + \left(\frac{D}{D_0}\right) + b_2 \left(\frac{D}{D_0}\right)^2 + b_3 \left(\frac{D}{D_0}\right)^3 + \dots \right]^{-1/2} \quad (10)$$

其中,  $\sigma_p, D_0, b_2, b_3, \dots$  为依赖结构形状的参数.

必须强调的是, 这里所谓的大尺度和小尺度情况下的渐近展开仅仅是一种理论上的推断. 显然, 当尺寸特别大时, 结构的失效机制是不同的, 反之, 如果讨论的尺寸小于表征材料非均匀性的尺寸, 我们的讨论也没有意义. 无限大和趋于 0 的尺寸, 并非我们在此进行渐近展开所关心的, 我们的目的只是为了获得在实际工作中感兴趣的尺度范围内的尺寸效应曲线.

我们得到的结果可以用图 9 作出解释, 该图用对数形式给出了尺寸效应关系曲线 (对于具有大的相似裂纹的几何相似结构), 其中用虚线画出了由方程 (8) 和 (10) 所决定的大尺寸和小尺寸情况下的渐近展开. 大尺寸情况下的展开渐近地趋近于斜率为  $-1/2$  的直线, 这与线弹性断裂力学 (含有大的相似裂纹) 中得出的结果一致. 小尺寸情况下的展开曲线趋近于左边的一条水平线, 这与塑性理论或任何强度理论中的结果相同.

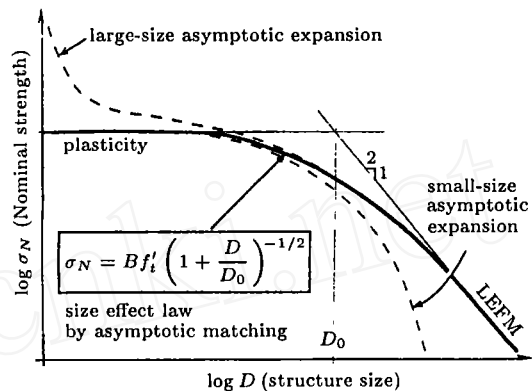


图 9 大尺寸和小尺寸情况下尺寸效应的渐近展开 (虚线), 以及与这些渐近展开匹配的尺寸效应律 (实线)

现在, 剩下的问题是如何在两种不同尺寸情况下的展开式之间进行插值运算, 以获得近似的广泛适用的尺寸效应律. 在大尺寸和小尺寸下的尺寸效应律都较容易地得到了, 但在中间尺寸下, 想得到尺寸效应律就比较困难. 这就要涉及到众所周知渐近匹配方法, 我们面临的情况属于能够有效地运用渐近匹配技术的典型情况 (Bender 和 Orszag (1978), Barenblatt (1979), Hinch (1991)). 这一技术最早出现在 Prandtl 于本世纪初提出的著名的流体力学边界层理论中.

在此, 我们采用的渐近匹配方法是很简单的, 这是因为, 在上述两个渐近级数展开式中, 由其前两项可以导出下面的统一的表达式:

$$\sigma_N = \frac{B f'_t}{\sqrt{1 + \beta}}, \quad \beta = \frac{D}{D_0} \quad (11)$$

其中,  $B$  为无量纲常数,  $f'_t$  为抗拉强度, 在此引入以平衡量纲. (应该说明, 我们采用的是简单意义下的渐近匹配方法, 因为两个渐近展开式中的系数并不是先验的固定的数值, 而是可以调节的, 以便匹配得到相同的表达式.)

上述表达式表达了统一的尺度律, 它最早由 Bažant (1983, 1984) 在所谓的“简化能量释放”理论基础上得到, 其中的比值  $\beta$  称为脆性数 (Brittleness Number) (Bažant (1987), Bažant 和 Pfeiffer (1987)), 这是因为当  $\beta \rightarrow \infty$  时, 材料为完全脆性; 当  $\beta \rightarrow 0$  时, 材料为完全非脆性 (塑

性或韧性). 常数  $D_0$  代表着图 9 中两条渐近展开线的交点, 它是依赖于结构几何的; 而脆性数的定义则与结构的形状和尺寸均无关. 脆性可以看成是与 LEFM 尺度律相近的概念.

如果把函数  $\hat{g}$  或  $\tilde{g}$  当作  $\theta'$  或  $\eta'$  (而不是  $\theta, \eta$ ) 的光滑函数, 并取  $r$  为常数, 渐近分析就可进一步推广. 而且, 在非常大的尺寸的情况下, 结构可能存在向韧性失效机制的转换, 它赋予结构附加的残余名义强度  $\sigma_r$  (例如, 这一转换可能发生在 Brazilian 分离圆柱的实验中, 因为压板之下的滑动尖楔存在摩擦.). 引入这些修正, 可以得到下面统一的尺度律公式:

$$\sigma_N = \sqrt{\sigma_P^2(1 + \beta^r)^{-1/r} + \sigma_r} \quad (12)$$

其中,  $\sigma_P$  为小尺寸情况下的名义强度, 为常数. 在拟合宽范围的实验数据而取得指数  $r$  的值常比在级数展开式中增添高阶项更为有效. 方程 (12) 在很宽的尺寸范围内 (至少 1 : 1000), 与采用具有内聚裂纹模型所作的非局部有限元数值分析的结果吻合较好. 指数  $r$  的最佳取值依不同几何结构而异 (例如, 对于三点弯曲梁,  $r = 0.44$ ; 对于在裂纹面上加载的、具有较大中心裂纹的板条,  $r = 1.5$ ).

#### 4 基于能量释放的尺寸效应律的应用

在等效的 LEFM 近似意义上, 尺寸效应律也可以用 LEFM 函数和材料参数来表达. 为此, 可以引入近似表达式  $\hat{g}(\alpha_0, \theta) = g(\alpha_0 + \theta)$ . 用这种对较大  $D$  值渐近精确的近似, 得到与渐近匹配公式 (11) 一致的尺寸效应律, 即

$$\sigma_N = \sqrt{\frac{EG_f}{g'(\alpha_0)c_f + g(\alpha_0)D}} \quad (13)$$

其中的各参数由下式给出:

$$D_0 = c_f \frac{g'(\alpha_0)}{g(\alpha_0)}, \quad Bf'_t = \sqrt{\frac{EG_f}{c_f g'(\alpha_0)}} \quad (14)$$

注意到区分脆性行为和非脆性行为的过渡尺寸  $D_0$ , 与断裂扩展区的有效尺寸成正比, 也与取决于结构几何形状的比值  $g'/g$  成正比. 于是, 尺寸效应律 (公式 (13)) 不仅反映了尺寸效应, 而且反映了结构几何 (形状) 效应. 这一尺寸效应律可以应用于非几何相似的结构或试件中.

已经证明, 公式 (13) 表示的尺寸效应律可用于材料的非线性断裂参数的确定. 为此, 必须在足够大的脆性数  $\beta$  取值范围内做一系列样品的试验. 这一取值范围依赖于结果的统计分散度. 如果分散度很小, 小范围的  $\beta$  就足够了; 但如果分散度很大, 就需要大范围的  $\beta$ . 对已观察到的混凝土和其他很多材料的典型分散度来说, 最小的脆性数  $\beta$  取值范围为 1 : 4. 要取得更精确的结果, 取 1 : 8 更好.  $\beta$  的范围越宽, 结果就会越准. 要得到脆性数足够宽的取值范围, 就需要对尺寸范围足够大、几何相似的带缺口试件进行试验, 如图 10 所示. 不过, 尽管几何相似的试件结果更精确, 但几何相似并不必要. 这是因为公式 (13) 所描述的几何变化的效应只是近似的.

为了由脆性数不同的试件中测得的最大载荷来确定材料的断裂特性, 可将公式 (13) 做线性回归 (图 11):  $Y = AX + C$ , 其中,  $Y = 1/g'\sigma_N^2$ ,  $X = Dg/g'$ , 均在  $\alpha_0$  处计算. 断裂特性可由  $G_f = 1/AE$ ,  $c_f = C/A$  得到. 由  $G_f$  和  $c_f$  还可以得到临界裂尖张开位移 (Bažant 和 Gettu (1990), Bažant (1996) Vol III)

$$\delta_{CTOD} = (1/\pi)\sqrt{8G_f c_f/E} \quad (15)$$

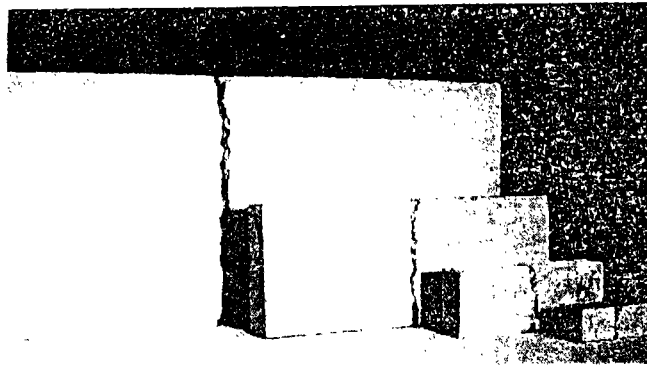


图 10 Bažant 和 Pfeiffer (1987) 试验中的相似的三点弯曲试件

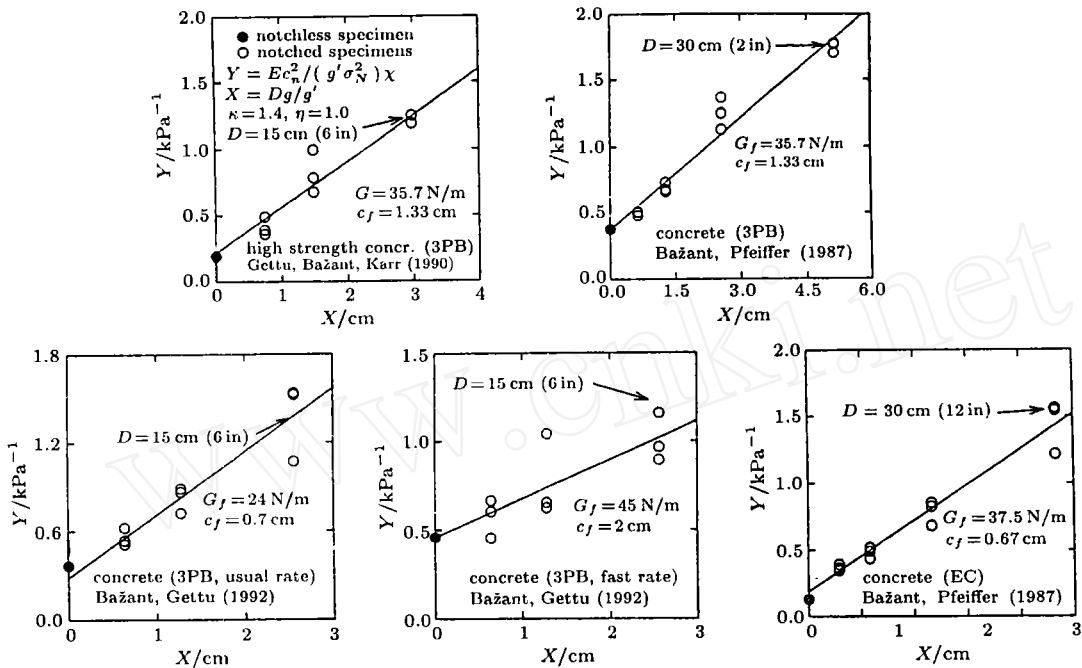


图 11 由 Bažant 和 Pfeiffer (1987), Bažant 和 Gettu (1992), Gettu 等 (1990) 测量得到的切口混凝土试件的名义应力值所做的线性回归 (根据尺寸效应律)

它在 60 年代初已由 Wells (1961) 和 Cottrell (1963) 引入到他们的模型中来处理金属材料, 在 80 年代中期, 被 Jenq 和 Shah (1985) 引进到类似的模型中来处理混凝土. 尺寸效应方法已被国际材料与结构试验研究所联合会 (RILEM) (1990) 采用为混凝土断裂试验的推荐标准.

图 12 表示了尺寸效应律与印第安纳石灰石、环氧-碳纤维复合材料、二氧化硅陶瓷和海冰等材料试验所得到的数据点的比较. Dempsey 等 (1995) 取得的海冰的数据, 覆盖了空前广的尺寸范围 (还有 Mulmule (1995)). Dempsey 的试验是在北冰洋某处, 在现场对尺寸为 0.5~80m, 厚为 1.8m, 浮动的带有切口的方形海冰试件做的. 试验的结果相当接近 LEFM 的渐近线, 显示了极强的尺寸效应, 并揭示出海冰在大尺度时是高度脆性的.

图 13 显示了尺寸效应律与无切口试件试验数据的比较 (几何相似的钢筋混凝土梁的对角剪切失效试验, Bažant 和 Kazemi (1991), 尺寸范围 1:16). 图 14 显示了尺寸效应律与无切口无钢筋试件试验数据的比较 (双孔加载方式的圆柱体, 尺寸 1:16, Marti (1989)).

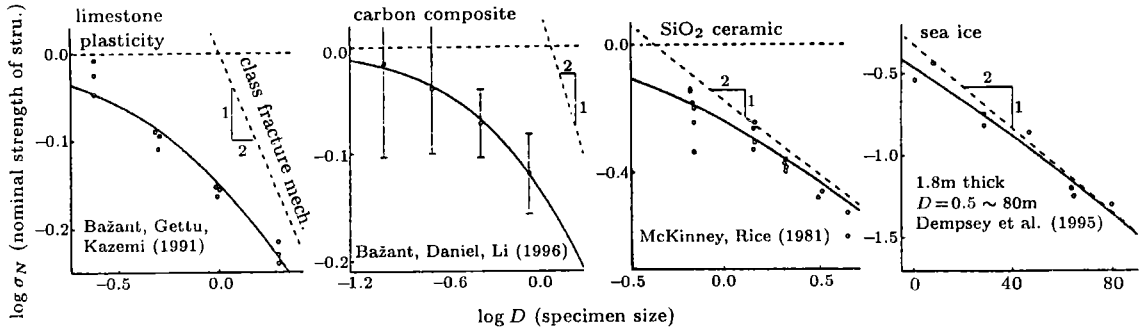


图 12 名义强度试验数据以及尺寸效应律对它们的拟合

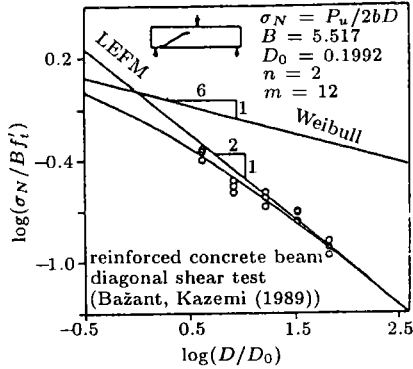


图 13 纵向强化的小尺寸混凝土梁对角剪切失效的名义强度数据 (Bažant 和 Kazemi (1991)); 其拟合曲线 (根据尺寸效应律) 与 Weibull 型统计预测的比较

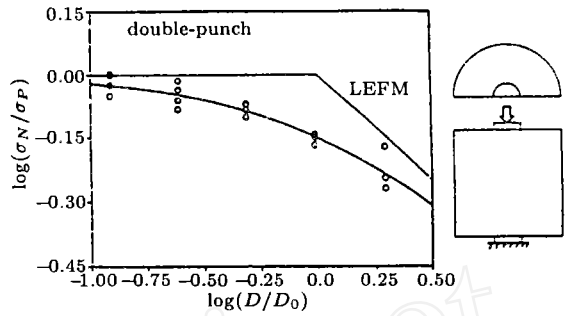
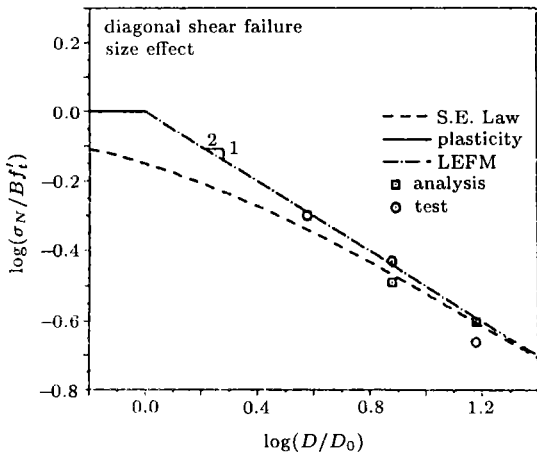
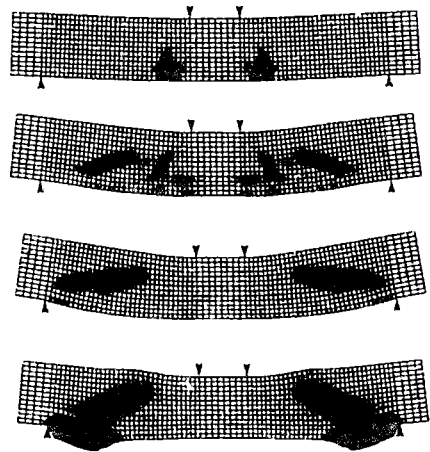


图 14 由 Marti (1989) 混凝土圆柱双孔加载失效实验 (尺寸范围 1 : 16) 得到的名义强度和根据尺寸效应律的拟合曲线

尺寸效应律也与采用非局部损伤概念 (例如, 图 15, Ožbolt 和 Bažant (1996)), 断裂带模型 (见图 3 中的曲线, Bažant 和 Oh (1983)), 或内聚裂纹模型 (Bažant 和 Li (1996)) 的有限元分析结果很一致. 而且, 尺寸效应律表现出与用离散元方法计算出的最大载荷的平均趋势 (随机粒



(a)



(b)

图 15 (a) 由带有裂纹相互作用的非局部模型有限元分析得到名义强度 (Ožbolt 和 Bažant (1996)), 与纵向钢筋混凝土梁对角剪切失效试验结果 (Bažant 和 Kazemi (1991)) 的对比, 以及与尺寸效应律的对比 (虚线). (b) 加载的不同阶段的开裂损伤区

子模拟, Bažant, Tabbara 等 (1990)), 或海冰试验结果 (Bažant, Jirasek (1995), 图 16) 近似一致.

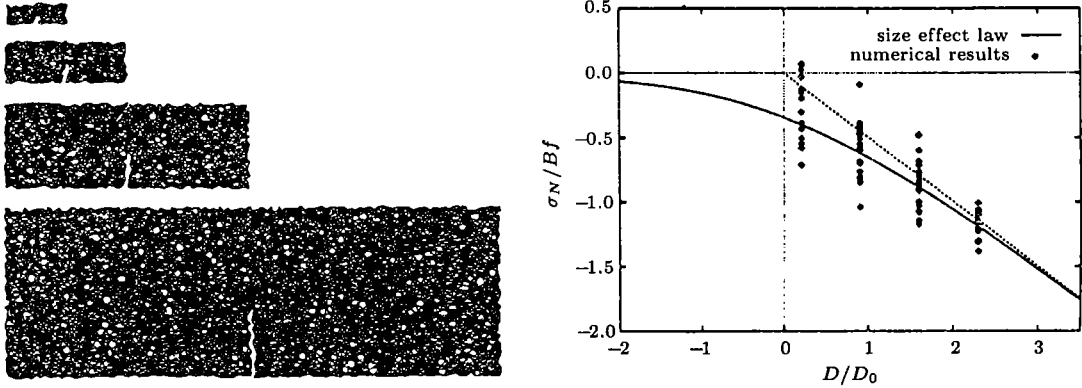


图 16 用离散单元法得到的名义强度值 (对图上所示的试件所做的随机颗粒模拟) 与尺寸效应律结果 的比较, 用以确定随机颗粒系统的断裂特征 (Jirasek 和 Bažant (1995a, b))

虽然如此, 在某些情况下, 公式 (11) 和公式 (13) 表示的简单的尺寸效应律仍是不充分的. 这是因为这些试验数据在尺寸效应的对数图中表现出正的曲率, 如图 17 所示. 比如 Brazilian 圆柱劈裂试验中就可观察到这一点. 原因是, 对很大的结构来说, 产生圆柱对角裂纹的载荷变得可忽略; 但是因为承受载荷的楔形区必定有摩擦滑移, 施加了残余应力  $\sigma_r$ , 因而失效不可能发生. 另一个原因可能是, 失效时, 裂纹长度不再随试件尺寸成比例的增长. 这些数据可被公式 (12) 表示的广义尺寸效应律很好地描述, 其中,  $D_0$  很小, 它小于数据集中  $D$  的最小值 (见图 17).

尺寸效应律对纤维层合板的应用更复杂. 原因之一是必须考虑材料的正交各向异性. 考虑了正交各向异性, 得到了能量释放率的表达式:

$$G(\alpha) = \sigma_V^2 D g(\alpha) Q(\rho) / \bar{E} \quad (16)$$

其中  $\bar{E} = [2\sqrt{E_x E_y^3 / (1 + \rho)}]^{1/2}$ ,  $\rho = (\sqrt{E_x E_y} / 2G_{xy}) - \sqrt{\nu_{xy}\nu_{yx}}$ ,  $Q(\rho)$  是包含正交各向异性、材料和试件形状等信息的函数, 如最近 Bao 等 (1992) 所表示的那样. 更困难的是, 扩展区的尺寸  $c_f$  依赖于断裂扩展时相对于纤维的方向. Bažant, Daniel 和 Li (1996) 在这种分析下得到的结果见图 12.

然而, 关于在纤维复合材料失效尺度律的研究中, 纤维的拔出和破断的作用依然是个复杂问题.

当材料的断裂参数值用不考虑尺寸效应的方法确定时, 将面临一个问题: 这些值的尺寸依赖性是不真实的. 比如, 断裂能可以由测量得到的

的载荷 - 挠度曲线下面的面积很方便地确定出, 这被称为断裂功方法 (Nakayama (1965), Tattersall 和 Tappin (1966)), 并且被 Hillerborg 等 (1976) 首先用于混凝土材料 (又见 Hillerborg (1985a, b)). 但这样所得到断裂能的值依赖于试件尺寸 (Bažant (1996), Bažant 和 Kazemi (1991)). Planas

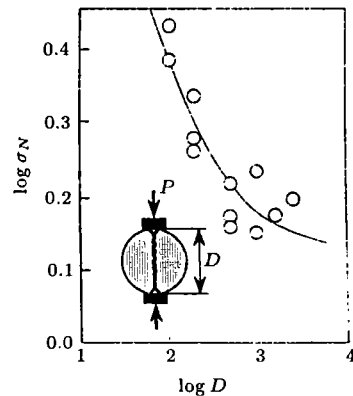


图 17 巴西的圆柱劈裂试验得到的名义强度数据 (Hasegwa, Shioya 和 Okada (1985)) 及基于考虑残余强度的尺寸效应律公式 (12) 的拟合

和 Elices (1994) 讨论了消除这一依赖的方法.

### 5 裂纹起裂的尺寸效应和普适尺寸效应律

上述分析仅应用于在产生了宏观裂纹的稳定生长之后失效的结构. 这对准脆性材料来说是典型的, 也是一个良好的设计的目的, 因为宏观裂纹的稳定生长赋予结构以大的能量耗散能力和韧性的某种度量. 例如, 混凝土结构的强化、陶瓷增韧、复合材料中的添加纤维等的目的, 都可以认为是在失效前得到稳定生长的宏观裂纹.

然而, 在某些情况下, 准脆性断裂的失效是在起裂时产生. 例如, 在无钢筋混凝土梁中发生了这种现象. 然而, 这并不意味着断裂扩展区的尺寸可以忽略. 由于材料的非均匀性, 扩展区尺寸依然相当大, 如图 18(a) 所示. 当这一大的开裂区聚合成一条可进一步生长的连续裂纹时, 就得到了典型的最大载荷. 因为大的开裂区在达到最大载荷之前形成, Weibull 理论不适用, 详见第 7 节.

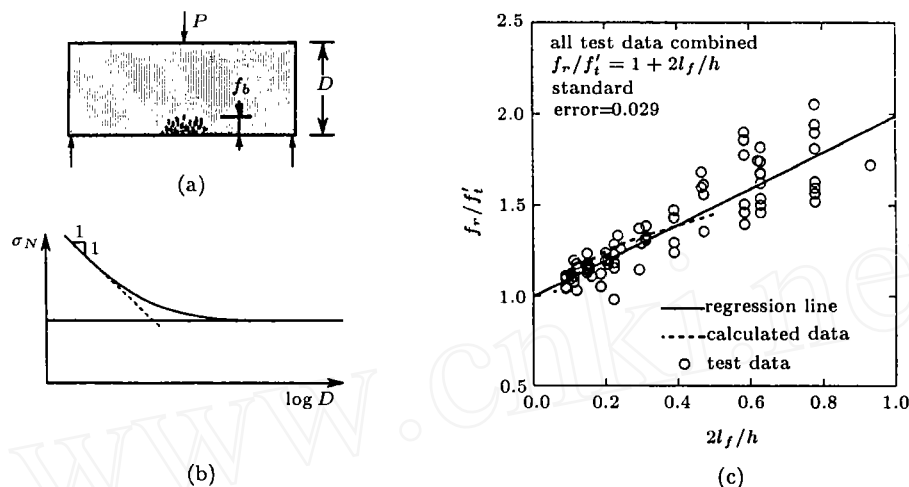


图 18 无切口准脆性试样在最大载荷  $P$  时的裂纹区尺寸 (a); 准脆性材料起裂时的尺寸效应律 (Bažant 和 Li (1994, 1996)) (b); 用这一尺寸效应律, 对 8 个不同实验室得到的混凝土试验数据进行线性回归 (Bažant 和 Li (1994)) (c)

在 Bažant (1996) 的详细描述中, 从一光滑表面起裂时发生的失效, 也可以基于公式 (8) 或公式 (10) 的展开式来分析, 不过, 需做一点改动. 因为这些展开式是关于零初始裂纹长度的, 所以在能量释放函数  $g$  中, 自变量  $\alpha = 0$ . 这意味着能量释放率  $g(\alpha) = g(0) = 0$ , 于是, 表示大尺度展开式的公式 (8) 的第一项为零了. 如果我们像以前那样, 截去第二项之后的所有项, 则不会得到尺寸效应.

因此, 在这种情况下, 我们必须在用于大尺寸的渐近展开式中包括第三项. 这就导出了下述在光滑表面裂纹起裂时失效的名义应力的近似形式

$$\sigma_N = \sqrt{\frac{EG_f}{g'(0)c_f + \frac{1}{2}g''(0)c_f^2 D^{-1}}} \approx f_r^\infty \left(1 + \frac{D_b}{D}\right) \quad (17)$$

上式中, 最后一个表达式是一种保存了渐近性质的近似, 且  $f_r^\infty$  和  $D_b$  是常数, 前者代表了尺寸很大时的名义强度, 后者意为开裂边界层的有效厚度. 图 18 表示了反映起裂时的尺寸效应的公式 (17). 而且, 图 18 还表示了这一公式以  $D_b/D$  为坐标的线性形式, 并与文献 (Bažant 和

Li (1995)) 中的八个系列的数据点做了比较.

至此, 我们所概述的分析得到了以下结果: 对于长裂纹, 其尺寸效应的大尺寸展开式以及小尺寸展开式, 短裂纹的大尺寸展开式和小尺寸展开式. 现在的问题是, 对这些展开式是否能进行内插值、匹配以得到一个公式来近似中间情况, 适应所有的渐近情形. 这一公式已由 Bažant (1996) 得到

$$\sigma_N = \sigma_0 \left(1 + \frac{D}{D_0}\right)^{-1/2} \left\{ 1 + \left[ \left(\bar{\eta} + \frac{D}{D_0}\right) \left(1 + \frac{D}{D_0}\right) \right]^{-1} \right\} \quad (18)$$

其中  $\bar{\eta}$  和  $\sigma_0$  是经验常数. 这个公式可以称为普适的尺寸效应律, 它的曲线图如图 19. 注意到图左上部分表面的斜率发生不连续的, 这是因为表示  $D_b$  时, 为了简化, 使用了函数  $g$  的导数的正的部分 (这一斜率的不连续性可以避免, 但代价是采用更复杂的表达式).

前述普适的尺寸效应律可用于材料断裂参数的测试. 它允许使用同一尺寸的有切口或无切口的试样. 对这种试样, 可不改变试样尺寸而得到脆性参数  $\beta$  足够的范围 (超过 1:4). 另一方面, 如果不包括无切口试样, 则不能仅靠改变切口的长度而得到足够的  $\beta$  的范围.

为了进行数据拟合, 方程 (18) 可约化为一系列非线性回归函数 (Bažant 和 Li (1996)). 以前报道的试验数据的线性回归图如图 11 所示, 我们已经对出现在图上那些代表不同尺寸的有切口试样的空心数据点作过讨论. 实心数据点代表无切口试样. 图 19 中实心数据点排布与空心数据点趋势一致的事实证实了普适的尺寸效应律的近似适用性. 显然, 可删去除最大尺寸外的所有空心数据点, 并仅用有切口的最大尺寸试样和无切口的同样尺寸的试样的数据点得到相同的结果. 这一方法可简化由试验数据确定材料断裂参数的过程.

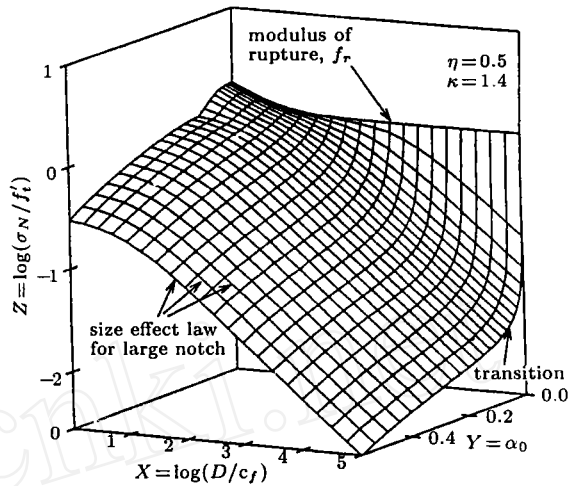


图 19 同时适用于起裂时失效和有大的裂纹以后失效的普适尺寸效应律

## 6 断裂的分形是被观测到的尺寸效应的原因吗?

这个有趣的问题最近由 Carpinteri (1994a, b) 提出 (又见 Carpinteri 等 (1993, 1995a, b, c), Carpinteri 和 Ferro (1994), Carpinteri 和 Chiaia (1995)). 然而, Carpinteri 提供的论据并非基于力学分析和能量的角度, 而是出自严格的几何分析和部分的直觉. 最近, Bažant (1996) 试图对问题进行力学分析. 下面将简要概述他的工作. 这一工作的结果, 答案是否定的. 然而, 对于很多材料, 用分形的概念描述裂纹的表面粗糙度, 至少在有限的范围内是可以的, 这一事实是不容置疑的 (例如, Mandelbrot 等 (1984), Brown (1987), Mecholsky 和 Mackin (1988), Cahn (1989), Chen 和 Runt (1989), Hornbogen (1989), Peng 和 Tian (1990), Saouma 等 (1990), Bouchaud 等 (1990), Chelidze 和 Gueguen (1990), Issa 等 (1992), Long 等 (1991), Måløy 等 (1992), Mosolov 和 Borodich (1992), Borodich (1992), Lange 等 (1993), Xie (1987, 1989, 1993), Xie 等 (1994, 1996), Saouma 和 Barton (1994), Feng 等 (1995)).

在二维情形可以想象用分形曲线表示裂纹, 并可将其图示, 例如用 von Koch 曲线, 如图 20 所示. 在每条直线段上增加自相似的突起而逐渐细化. 如果用特定分辨率  $\delta_0$  的尺子测量这条



曲线的长度，并将该分辨率当作尺子的长度，则被测长度将明显地依赖于尺子的长度，而且，当尺子的长度趋于零时，被测长度将趋于无穷大。如下式所示

$$a_\delta = \delta_0 (a/\delta_0)^{d_f} \quad (19)$$

其中， $a_\delta$  是沿着曲线的被测量的长度， $a$  是投影的（光滑的，欧几里德的）裂纹长度，指数  $d_f$  称为分形维数，当曲线是分形的，它大于 1，当曲线不是分形的，它等于 1。

显然，如果我们假设每单位长度裂纹的耗散能量  $G_f$  有限，则裂纹长度  $a_\delta$  的总能量耗散  $W_f$  将为无穷大。这对分形裂纹断裂力学是个概念性的困难。在 Mosolov 和 Borodich (1992) 所写论文的续文中，Borodich (1992) 建议采用下式克服这一困难：

$$W_f/b = G_{f1} a^{d_f} \quad (20)$$

其中  $W_f$  为总能量耗散； $G_{f1}$  代表某种定义下的分形断裂能，它的量纲不是  $J/m^2$  而是  $J/m^{d_f+1}$ 。

基于断裂能的分形概念，可进行与我们已经概述过的非分形裂纹类似的渐近分析（见 Bažant (1997)）。在宏观裂纹的稳定生长之后失效的情况，得到了代替公式 (11) 的、属于分形断裂的匹配了大尺寸和小尺寸的渐近展开式

$$\sigma_N = \sigma_N^0 D^{(d_f-1)/2} \left(1 + \frac{D}{D_0}\right)^{-1/2} \quad (21)$$

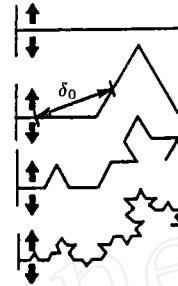


图 20 逐次细化的 von Koch 分形曲线和用长为  $\delta_0$  的尺子对该曲线长度的测量

对于起裂时失效的情况，用以代替公式 (17) 的渐近展开式如下：

$$\sigma_N = \sigma_N^\infty D^{(d_f-1)/2} \left(1 + \frac{D_b}{D}\right) \quad (22)$$

这些表达式在  $d_f = 1$  时退化为非分形情况。这些方程与非分形情况下的尺寸效应公式的比较如图 21 所示。

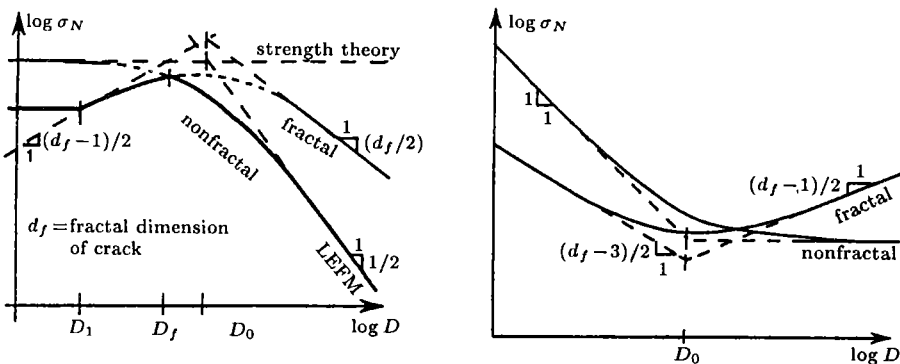


图 21 基于能量耗散的分形和非分形理论预测的尺寸效应曲线，产生大而稳定裂纹生长后失效 (a)，裂纹萌生时失效 (b)

关于裂纹是以分形方式传播的假设已经提出，它的结果已经导出 (Bažant(1997))。现在，我们可以通过判断结果的正确与否来确定这个假设是否准确。从图 21 中的曲线可看出，分形情况与试验的证据明显不一致。对经历大的裂纹生长后失效的情况，图中曲线无上升的部分，

并且很多数据表明, 渐近斜率很接近  $-1/2$ , 而不是由分形假设所预示的小得多的值. 这一点由图 12~14 可清楚地看出. 对于在起裂时发生的失效, 如图 21(b) 的一类曲线, 从未观察到在大尺寸时具有上升的尺寸效应曲线. 因此, 必定会有如下结论: 尺寸效应的分形假设与试验数据不符, 因此不成立. (毫无疑问, 各种材料的断裂表面确实存在分形特征, 而且下面两种可能性都不存在, 即分形特征可能对材料断裂能有影响, 在决定断裂能的微观力学模型中应该考虑分形特征.)

分形假设失败的物理原因是什么? 无疑, 裂纹前端周围是个大的断裂扩展区, 它由微裂纹和摩擦滑移组成, 如图 22 所示. 因为准脆性材料断裂能  $G_f$  通常是比表面能高几个量级的量, 微开裂的断裂扩展区比裂纹曲线耗散的能量要多得多. 因此, 从能量角度来看, 裂纹曲线虽然可能是分形的, 然而却无关紧要.

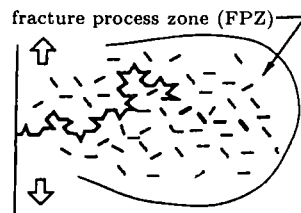


图 22 具有分数维的裂纹曲线以及分布着裂纹的断裂扩展区

还有另一个分形概念, 称为微裂纹分布的间隙分形 (lacunar fractality), 最近由 Carpinteri 和 Chiaia (1995, 1996) 提出. 我们将在讨论了 Weibull 理论之后转向这一概念.

### 7 Weibull 统计理论能否应用于准脆性的断裂问题?

建立在强度随机分布概念基础上的尺寸效应的统计理论在原理上已由 Weibull 完成 (Weibull (1939, 1949, 1951, 1956)). Weibull 理论曾应用于疲劳引起的金属结构脆化并取得了巨大的成功. 但是, 直到 80 年代, 人们才认识到这一理论并不能解释结构经过裂纹的大的稳定扩展后, 发生的失效的有关尺寸效应. Weibull 理论以下列两大假设为支柱:

(1) 只要材料中一个小的单元达到了强度极限, 结构就会失效.

(2) 材料的强度极限是随机的, 材料单元在小于  $\sigma$  的应力水平不失效的概率  $P_1$  可以用下式中的 Weibull 累积分布函数来描述

$$\varphi(\sigma) = \left\langle \frac{\sigma - \sigma_u}{\sigma_0} \right\rangle^m \quad (\sigma \geq \sigma_u \approx 0) \quad (23)$$

应该强调, 这一分布形式仅为极值的尾分布 (the tail distribution of the extreme values). (当然, 在远离门槛值时, 存在着向其他分布形式的转化, 如转化成正态分布、对数正态分布或 Gamma 分布等. 但是在图 23(a) 所示的尺度下, 这将在数英里以远处才会出现.)

Weibull 应用这一分布形式于经典的长链 (图 23(b)) 或缆索问题. 在这些问题上, 上述两个基本假设很容易满足. 同时, 这一分布也被应用于由很多单元 (例如杆系) 组成的静定结构分析中, 其中一个单元失效, 结构就会失效. 但是, 它不能用到超静定的结构或多维物体中.

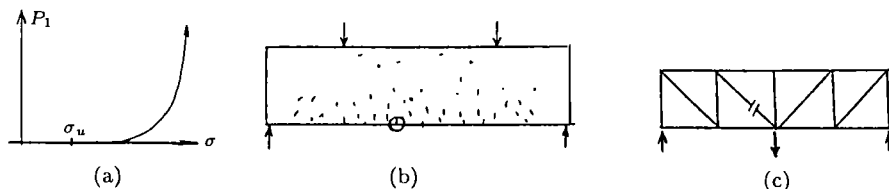


图 23 结构中局部材料强度的 Weibull(累积) 分布形式 (a); 裂纹场中的一条临界裂纹 (用圆圈标出)(b); 一种遵从 Weibull 理论, 破坏特征与一维链条结构相似的多维静定结构 (c)

Weibull 理论也被许多研究人员用于图 23(c) 所示的问题中, 但只有当材料中小单元的失效

能马上引起多维结构的失效时,这一应用才是正确的.在金属结构的疲劳脆化中往往会出现这样的突然失效现象,其中,在突然失效启动的瞬间,临界缺陷的尺度和试样的断面尺寸比起来仍然是极其微小的.但在水泥结构和其他一些准脆性的结构中,出现另外一种情形,失效仅仅发生在裂纹较大的稳态扩展之后.例如,钢筋混凝土梁在对角剪切失效过程中,在梁结构发生失稳和失效前,梁内的临界裂纹稳定扩展的长度一般能超过梁横断面尺寸的80%~90%.在如此大长度的裂纹稳定扩展过程中,结构内的应力可以完成充分的重新分布,结构内储存的能量也在很大程度上被释放掉,如前面我们已经讨论过的,这就产生一种确定性的尺寸效应.

Weibull 理论中的尺寸效应源于这样的事实:在一个较大的结构中,出现具有较小强度的小材料单元的概率随着结构尺寸的变大而增加.考虑结构中全部小材料单元的联合幸存概率,可以得到结构强度的概率积分,它类似于在长链或一系列耦合单元的情形下得到的下列结果(Tippett (1925), Peirce (1926), Frechet (1927), Fischer and Tippett, (1928), von Mises (1936)):

$$\ln(1 - P_f) = \int_V \varphi[\sigma(x)]dV(x)/V_r \quad (24)$$

其中,  $P_f$  为结构的失效概率,  $V$  为结构占据的体积,  $V_r$  为材料的小的具有代表性的单元,其强度的分布由  $\varphi(\sigma)$  给定,  $x$  为空间坐标矢量.因为 Weibull 分布为幂函数律形式( $\sigma_u$  可以忽略),这样前述的概率积分总能导出一个幂函数律形式的尺寸效应律,其表达式如下:

$$\sigma_N = k_0 V^{-1/m} = k_0 D^{-n/m} \quad (25)$$

其中,  $k_0$  为表征结构形状的常数,  $n$  为结构的维数(1,2 或 3).在二维条件下,针对典型的混凝土特性,方程中的指数近似为  $n/m = 1/6$ .

如前所述,Weibull 理论的尺度律为幂函数律形式这一事实,意味着没有结构的特征尺度,也即没有材料长度(这一结论是明显的,因为方程中没有材料长度量出现).这样,在高度非均匀体材料组成的准脆性结构中,由于存在不可忽略的描述材料非均匀性的特征材料长度,Weibull 类型的尺度律理论受到了怀疑.

为考虑应力的重新分布,对于平行单元组成的系统,人们相继提出了各种关于载荷的分担和重新分布的唯象理论.当载荷的分担和重新分布过程相对平缓时,这些理论是适用的;但如果遇到裂纹发生大的稳态扩展,引起应力较为剧烈的重新分配,就不再合适了.这些唯象理论缺乏断裂力学方面的基础.

考虑到由于大的断裂引起的这样强的应力重新分布,人们想到把线弹性断裂力学中得到的裂尖应力场代入方程(24)中的概率积分,也许这是一种可行的方法.但是,在通常所取的 Weibull 模量  $m$  的数值范围内,积分并不收敛.这样,上述的补救措施并不成功.幸运的是,如果引入非局域的推广(Bazant 和 Xi (1991)),Weibull 理论也可用于近似地描述剧烈的应力的重新分布,其中,公式(24)中的概率积分由下列的积分表达式来替代:

$$\ln(1 - P_f) = k_1 \int_V \varphi[E\bar{\epsilon}(x)]dV(x)/V_r \quad (26)$$

此处,结构中某一点的应力,用邻域内(参见图 24)的平均应变场  $\bar{\epsilon}$  乘上弹性模量  $E$  得到.换言之,结构某点  $x$  处的失效概率并不依赖于该点应力(连续介质力学意义下的应力),而依赖于该点某一邻域内的平均应变,这类似于应变软化材料中应变局部化分析时的非局部化理论.随着这一非局部化的推广,方程(26)中积分的解析解难以得到,但是,对于  $D \rightarrow \infty$  和  $D \rightarrow 0$  的情况,很容易得到它的渐近性态.另外,在  $m \rightarrow \infty$  时,解趋向于依据能量释放方程(11)所得到的尺寸效应律.在上述三种渐近解间内插得到下面的简单公式(Bazant 和 Xi (1991)):

$$\sigma_N = \frac{\sigma_P}{\sqrt{\beta^{2n/m} + \beta}} \quad \beta = \frac{D}{D_0} \quad (27)$$

图 25(a) 概略性地描述了式 (27) 的含义, 同时它也展示了前面提及的渐近尺度律. 这一表达在小尺寸条件下与 Weibull 型尺度律相同 (斜率为  $-m/n$  的直线); 在较大的尺度或大的裂纹尺寸下, 则与线弹性断裂力学的尺度律相同 (斜率为  $-1/2$  的直线). 通过这些结果可以得出, 经典的 Weibull 理论的尺寸效应律在充分小的结构中是可以应用的. 把两种尺度律 (一种是具有水平渐近线的带有确定性的尺度律, 另一种有着斜率为  $-m/n$  的渐近由式 (27) 表达的尺度律) 与混凝土的测试数据相比较, 在实验数据的分散度内都符合较好.

引人注意的是, 在大尺度时, 材料的随机性的影响完全消失. 正如前面已提到的, 在大尺度条件下, 尺寸效应的渐近线具有 LEFM

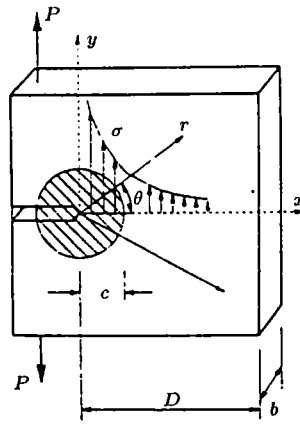


图 24 在 Weibull 理论的非局域化推广中 (Bažant 和 Xi (1991)), 为模拟断裂扩展区引入的“邻域”, 在其中对应变场作了平均化处理

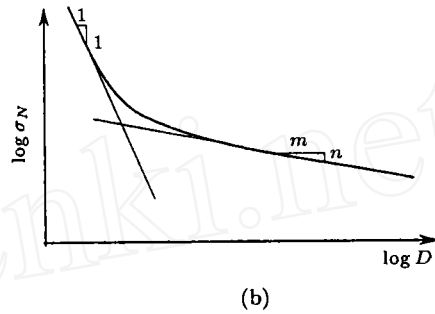
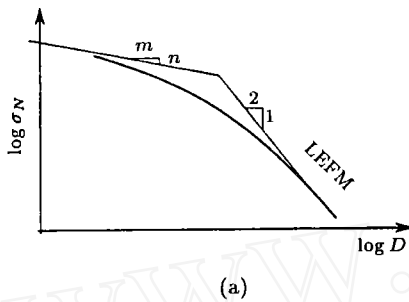


图 25 由 Weibull 理论非局域化推广得出的尺度律: 失效发生在裂纹大的稳定扩展之后 (a); 失效发生在起裂时 (b)

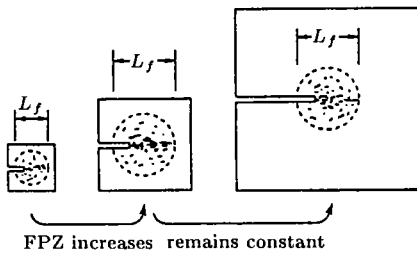


图 26 断裂扩展区的大小随结构尺寸增大时的变化情况

的斜率  $-1/2$ . 这种现象从物理机制上该如何解释呢?

其原因是: 当结构足够大时, 结构尺寸的进一步增大并不会引起其断裂扩展区的变大 (参见图 26). Weibull 型概率积分 (方程 (26)) 是沿着整个结构取值的, 但是对积分的最主要的贡献则来自断裂扩展区, 这样就注定当结构尺寸已经较大时, 继续加大结构的尺寸将不再影响其失效概率.

### 8 微裂纹系统的间隙分形可能导致尺寸效应吗?

在讨论了 Weibull 理论以后, 我们可以来处理另一种分形的问题, 即微裂纹所组成的间隙分形 (lacunar fractality), 如图 27(a) 所示. 从较远的地方看它, 我们看见一条裂纹. 缩短距离仔细看, 可以发现它是由几条由间隙隔开的较短的裂纹组成. 如果我们再靠近一点, 这些短裂纹中的每一条又是由间隙隔开的更短的裂纹所组成, 这样的过程可以一直继续下去. 当细化过程趋近无穷时, 我们便可以得到一个 Cantor 集或分形集, 其分形维数  $d_f$  要小于欧几里德空间

的维数(在如图 27(a) 所示的在一条线上一维排列的裂纹, 其维数为 1). 在混凝土构件中的微裂纹系统的确在有限的程度上展示出十分类似的分形样式. 准脆性材料是一种有着较大的非均匀性和较大的特征长度的材料, 所以越来越小的裂纹的细化存在一个截止值.

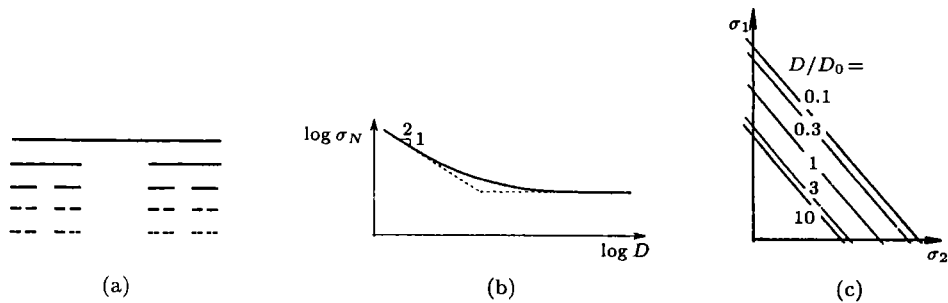


图 27 (a) 逐次细分过程中, 间隙分形结构中的微裂纹线; (b) Carpinteri 等 (1995) 所建议的多重分形尺度律图; (c)  $a_0$  为常数时, 对于不同尺寸的结构, 两个载荷间的相互作用的图形

关于间隙分形(或称稀疏化, rarefying)是准脆性结构的尺寸效应的原因这一论点(Carpinteri 和 Chiaia, (1995)) 源于这样一个基本的事实: 在大小不同的观察尺度下, 同一种微裂纹的排列结构具有不同的分形维数. 在观察尺度较小时, 分形维数  $D_f$  明显小于 1; 而在观察尺度较大时, 其分形维数十分接近于 1. 在相对较小的结构的失效分析中, 小尺度下的分形结构和维数起控制作用; 反之, 当较大结构失效时, 起决定作用的是大尺度下得到的分形结构和维数. 因此, 在不同尺度的分形结构所对应的尺度律之间应该有一个过渡, 在尺寸较大时, 关于强度的幂次尺度律的指数为 0, 即没有尺寸效应. 于是, 有人宣称, 尺寸效应能够由图 27(b) 中两条渐近线之间的过渡曲线给定, 这两条渐近线的斜率分别为  $-1/2$  和 0. 这就是所谓的“多重分形尺度律 (MFSL)” (Carpinteri 等 (1993, 1995a, b, c)), 即

$$\sigma_N = \sqrt{A_1 + \frac{A_2}{D}} \quad (28)$$

其中,  $A_1$  和  $A_2$  为常数. 一些在混凝土中获得的实验数据能与上述表达式符合较好(当然, 一些基于非分形机制的表达式也能够较好地描述这些实验数据 (Bažant 和 Kazemi (1991)), 特别是方程 (12)).

但是, 也有一些实验数据不能用多重分形尺度律 (MFSL) (方程 (28)) 来解释. 许多实验结果表明: 在图 27 这样的对数形式的尺寸效应曲线图中, 曲线的初始斜率远小于  $-1/2$ , 这种情况在试样尺寸特别小, 小到接近试样材料中的骨架颗粒尺寸时, 表现得较明显. 另外, 一些实验结果却显示, 当试样尺寸特别大时, 尺度律曲线的斜率仍为  $-1/2$ . 更有甚者, 一些根据实验结果得出的  $\log \sigma_N$  对  $\log D$  尺寸效应曲线的曲率为负值, 而不是正. 这些都与多重分形尺度律不一致.

进一步研究便会发现, 一些物理和数学上的原因也决定了间隙分形理论不能解释上述实验观察到的尺寸效应. 如果假定, 结构的失效由间隙分形, 亦即由微裂纹所决定, 那就意味着一旦裂纹起裂, 结构便马上失效, 其数学表述必然与前面的 Weibull 理论相类似. 在有间隙微裂纹的断裂扩展区内, 在两种观察尺度下(用上标  $A, B$  分别代表小和大两种观察尺度), 小材料单元的强度的 Weibull 分布分别为

$$\varphi[\sigma(x) : d_f^A] = \left\langle \frac{\sigma_N S(\xi) c_f^{1-d_f^A} - \hat{\sigma}_u^A}{\hat{\sigma}_0^A} \right\rangle^m \quad (29)$$

$$\varphi[\sigma(x) : d_f^B] = \left\langle \frac{\sigma_N S(\xi) c_f^{1-d_f^B} - \hat{\sigma}_u^B}{\hat{\sigma}_0^B} \right\rangle \quad (30)$$

对于非分形 (非间隙分形) 的情况, 在上面两式中, 强度为随机分布的小材料单元中的应力  $\sigma = \sigma_N S(\xi)$ , 此处,  $S$  在几何相似的各种尺寸的结构中, 取相同的函数形式, 另外,  $\xi = x/D$ . 对于分形 (间隙分形) 的情况, 材料单元的应力可以推广为  $\sigma = \sigma_N S(\xi) c_f^{1-d_f}$ , 因为必须考虑到该应力有一个非标准的分数维. 显然, 现在也必须考虑到, Weibull 中的参数  $\hat{\sigma}_0, \hat{\sigma}_u$  同样含有分数维, 但 Weibull 模量必然不是这样. Carpinteri 等也提出了与式 (29) 和 (30) 相类似的方程, 在此基础上, 他们还进一步进行了一些源于几何学和直觉的分析. 我们在此约略地介绍一个新近发表的力学分析工作 (Bažant (1997b)).

在 Weibull 理论 (针对宏观裂纹起裂时的失效) 中, 每一个结构等效地成一根变截面的长杆 (Bažant, Xi 和 Reid (1991), 参见图 28). 这样一来, Carpinteri 等的论点就意味着, 小的结构被分成小的材料单元 (见图 28(a)), 而较大的结构按比例分成较大的材料单元 (见图 28(c)), 这种论点对于由相同材料所做的两种结构失的效机理来说, 无疑是不客观的.

图 28(c) 中较大结构中那些大的材料单元必须能够再分成图 28(a) 中所示的小材料单元, 这种小的材料单元是材料的代表性单元, 它拥有该材料确定的各种性能. 如果, 大的材料单元不能细分成这样的小材料单元, 就意味着大小结构的材料不一样.

记住已将大材料单元细分为小的单元 (参见图 28(b), 这现在我们可以在细分的基础上计算大结构的失效概率; 要不然就意味着大小结构不是由相同材料做的. 应当指出, 由大单元  $\Delta V_{Bj}$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ) 组成的大结构的失效概率  $P_f$ , 以及由小材料单元  $\Delta V_{Aij}$  组成的大单元  $\Delta V_{Bj}$  的失效概率  $P_{fj}^B$  必须满足下列的 Weibull 理论关系式:

$$-\ln(1 - P_f) = \sum_j \varphi(\sigma_N S_j^B; d_f^B) \Delta V_{Bj} / V_r \quad (31)$$

$$-\ln(1 - P_{fj}^B) = \sum_j \varphi(\sigma_N S_{ij}^A; d_f^A) \Delta V_{Aij} / V_r \quad (32)$$

我们已将大结构的每个大单元  $B$  细分成了小单元  $A$ , 此时, 如果大小结构的材料相同, 就必须满足下式

$$-\ln(1 - P_f) = - \sum_j \ln(1 - P_{fj}^B) = \sum_j \sum_i \varphi(\sigma_N S_{ij}^A; d_f^A) \Delta V_{Aij} / V_r \quad (33)$$

将上式代入方程 (8), 便可发现, 为满足客观存在的结构材料相同的事实, 在不同尺度  $A$  和  $B$  下的 Weibull 特性必须不同, 以致有

$$\varphi(\sigma_N S_j^B; d_f^B) = (\Delta V_j^B)^{-1} \sum_i \varphi(\sigma_N S_{ij}^A; d_f^A) \Delta V_{ij}^A \quad (34)$$

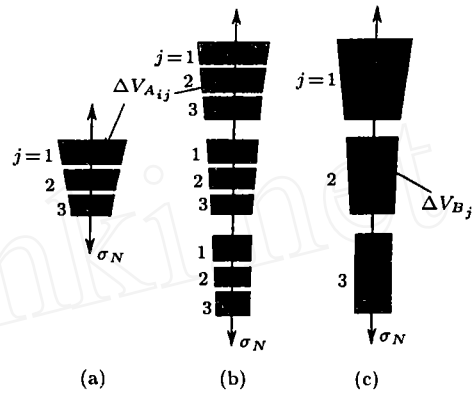


图 28 (a) 小结构分为小单元; (b) 大结构分为小单元; (c) 大结构分为大单元

方程 (33) 和 (34) 意味着, 考虑不同的尺度并不会产生不同的尺度律. 相同幂次律 (在 Weibull 阈值为零的情况) 必然源于“微裂纹分布具有间隙分形结构”这一假设, 而与所考虑的尺度无关.

如果认同多重分形尺度律 (MFSL) 的观点, 那就意味着, 没有分形特征的大材料块体, 就不能细分为具有间隙分形特征的小的代表性材料块体, 这在大、小两种块体的尺寸都远大于材料内非均匀体 (如混凝土中的最大骨料的尺寸) 的尺寸时, 是自相矛盾的. 当然, 如果小材料块体的尺寸小于材料内非均匀体的尺度, 如其大小与夹杂体间的基体 (譬如混凝土中骨料间的灰泥) 的尺度相当, 则上述观点是可以接受的. 基体中小裂纹系统的分形维数, 与作为复合材料的混凝土中裂纹的分形结构的分形维数必然有所不同. 但显然, 即使是最小的混凝土构件的失效也是由混凝土这种复合材料的整体性能决定的, 而不仅由灰泥来控制, 骨料在其中的作用不可忽略. 因此, 用 Carpinteri 的理论分析同一材料的尺度律是不可取的.

总之, 用微裂纹的间隙分形及其理论来研究因起裂而失效的结构所得到的尺度律必然与经典 Weibull 理论得到的相同. 唯一不同的是, 其中的 Weibull 参数依赖于微裂纹的间隙分形, 如果能够利用细观力学理论预测出这些参数, 这种不同是能够加以考虑的. 否则, 如果还是需要用实验来确定 Weibull 参数, 那么, 在尺度律问题的分析中, 引入微裂纹组成的间隙分形的概念就毫无意义.

## 9 结构失效中, 多个载荷引起的相互作用及渐近尺度律

在第 3~5 节中介绍的渐近分析方法, 很容易推广到多个载荷  $P_i$  作用下结构失效的尺度律研究中, 每一载荷  $P_i$  由名义应力  $\sigma_i = P_i/bD$  来表征. 众所周知, 每个载荷产生的能量释放率, 不具有可加性, 但是, 每个载荷所导致的应力强度因子  $K_{Ii}$  是可以叠加的, 于是, 便有  $\sum_j \sigma_{Ni} \sqrt{D g_i(\alpha)} = \sqrt{E G_f}$ , 其中,  $g_i(\alpha)$  是相应于载荷  $P_i$  的无量纲的能量释放率. 由稳定性极限条件 (总能量释放率曲线与  $R$  曲线相切) 可以给出与最大载荷对应的相对裂纹长度  $\alpha = \alpha_m(\alpha_0, \theta)$  (这一论点与导得方程 (7) 论点是类似. 但是, 我们立刻把  $g_i$  作为一些单变量函数, 而不是在最后进行这样的简化). 把这个值引入前一个关系式并把  $g_i(\alpha) = g_i(\alpha_0 + \theta)$  按  $\theta = 0$  点进行 Taylor 级数展开, 我们可以得到如下关系:

$$g_i(\alpha_0 + \theta) = g_i(\alpha_0) + g'_i(\alpha_0)\theta + \frac{1}{2}g''_i(\alpha_0)\theta^2 + \dots$$

在大裂纹的情况下, 我们在 Taylor 展开中截取前两项 (保留线性项), 并认为这一关系有正的几何形状 (即在  $i$  取所有值时都有  $g'_i(\alpha_0) > 0$ ). 另外, 我们记  $\sigma_{Ni} = \mu \sigma_{Di}$ , 其中,  $\sigma_{Di}$  为给定的 (固定的) 设计载荷值,  $\mu$  为安全系数. 整理后有

$$\mu = \sqrt{E G_f (\rho_1 \sigma_{D1} + \rho_2 \sigma_{D2} + \dots + \rho_n \sigma_{Dn})}^{-1/2} \quad (35)$$

$$\rho_i = \sqrt{g_i(\alpha_0) D + g'_i(\alpha_0) c_f} \quad (36)$$

这一方程给出了出现大尺度裂纹时的几何效应和尺寸效应. 与此同时, 它也可以被看作许多载荷间的相互作用的图形 (interaction diagram). 对于任意给定的尺寸  $D$ , 如果  $\alpha_0$  为常数, 则这些相互作用的图形呈线性特征 (图 27(c)). 但是, 如果不是采用有正的几何形状的切口型断裂试样, 则  $\alpha_0$  (在  $P_{max}$  作用下的无应力裂纹长度) 是变化的, 并且依赖于载荷间的比例  $P_2/P_1, P_3/P_1, \dots$ , 于是载荷间的相互作用图形就不是线性的.

对于宏观裂纹从光滑表面起裂的情况时, 有  $g_i(0) = 0$ . 因此, 如同在单一载荷作用下一样, Taylor 级数展开式不能只取线性项, 而应该保留平方项. 采用与第 5 节相类似的方法, 我们能

导出  $\mu$ , 它与方程 (35) 的形式一样, 只是其中

$$\rho_i = \sqrt{g_i'(0)c_f + \frac{1}{2}g_i''(0)\frac{c_f^2}{D}} \quad (37)$$

方程 (35) 和 (37) 描述了大尺寸情况下的渐近近似尺寸效应. 在多个载荷作用时, 小尺寸情况下的渐进尺度律也可以利用类似的方法导出, 只是要用  $\eta = 1/\theta$  来代替变量  $\theta$ .

与单一载荷作用时的情况相仿, 当结构承受多个载荷时, 也可以得出一个统一的尺寸效应律, 它对于不同的尺寸、大的裂纹以及起裂等都有正确的渐近性质. 它有着与方程 (18) 类似的形式, 也可写成与方程 (35) 完全相同的表达式, 不同的是,

$$\rho_i = r_i \left[ 1 + \left( \frac{D_{0i}}{D} \right)^r \right]^{1/2r} \left\{ 1 + s \left[ \left( \bar{\eta} + \frac{D}{D_{bi}} \right) \left( 1 + \frac{D}{D_{0i}} \right) \right]^{-1} \right\}^{-1/s} \quad (38)$$

$$r_i = [c_f g_i'(\alpha_0)]^{-1/2r}, \quad D_{0i} = c_f g_i'(\alpha_0) / g_i(\alpha_0), \quad D_{bi} = c_f (-g_i''(\alpha_0)) / 4g_i'(\alpha_0) \quad (39)$$

其中,  $r, s$  和  $\bar{\eta}$  为经验常数, 在许多应用条件下, 这些值可以取 1.

## 10 海冰块断裂的尺度律

海洋中冰块的失效展示了各种类型的尺寸效应. 北冰洋中浮动冰块失效的尺度律研究是较为复杂和困难的. 一类实际需求是要求了解和预测很长的 (在 1~100 km 的量级) 裂纹形成. 这种长裂纹的出现导致水面的露出, 并且可以作为浮冰区和压力脊要开始形成的先驱.

海洋中冰块大规模断裂的原因是冰块的上表面冷却后在冰块内形成的热弯矩 (参见图 29). 在浮力作用下, 浮冰的行为完全相同于弹性 Winkler 基础 (该基础的模量为海水的单位重量) 之上的板. 我们假设, 冰块为无穷大的、等厚度  $h$  的弹性介质, 对于各种不同厚度  $h$ , 冰块温度沿板厚度的分布规律是相似的, 并且认为, 热裂纹是半无限长的, 裂纹在冰块内的传播是静态的 (即惯性力可忽略), 这样可以获得 (Bažant, (1992)) 冰块破坏对应的临界温度差为

$$\Delta T_{cr} \propto h^{-3/8} \quad (40)$$

这表示临界的名义热应力  $\sigma_N \propto h^{-3/8}$ . 上述的分析基于线弹性断裂力学理论. 尽管存在较大的断裂扩展区, 在裂纹稳态扩展时, 线弹性断裂力学仍然适用. 当裂纹向前扩展时, 断裂扩展区保持形状不变且随裂尖一起运动, 这样断裂扩展区引起的能量耗散率是一个常数, 这和 LEFM 的结果是相同的.



图 29 海洋中的浮冰块因为上下表面温差而引起的弯曲断裂

于是我们知道, 方程 (40) 展示的尺度律适用于任何类型的弯曲失效裂纹, 只要这些裂纹是贯穿的、沿冰块或板传播 (无论导致裂纹的是何种载荷类型, 即使是垂直于板的载荷也可, Slepyan (1990), Bažant (1993)).

也许, 人们会为在大尺度下渐近尺度律的指数不是  $-1/2$  感到奇怪. 但是, 要认识到, 冰块或板的厚度仅仅是一个几何参数, 而不是水平板 (位于  $x, y$  平面) 边值问题中的真正的“尺度”, 事实上这个问题中只有一个特征长度, 那就是熟知的弹性基础上板的弯曲波长  $L_0$ . 并且,



$L_0$  不是正比于  $h$ , 而是正比于  $h^{3/4}$ . 这样一来, 尺度律中  $L_0$  的指数便是  $(-3/8)(4/3) = -1/2$ , 所以, 热弯曲断裂的尺度律仍然遵守前述的 LEFM 的尺度律:

$$\Delta T_{cr} \propto L_0^{-1/2} \quad (41)$$

一些简化计算 (Bažant (1992c)) 表明: 要使厚度 1 m 的冰块被热弯曲载荷驱动发生这样长的贯穿裂纹, 冰块上下表面的温差必须达到大约 25°C, 而对于厚度为 6 m 的板, 温差则只需 12°C. 这是一种明显的尺寸效应. 这就可以解释, 为什么在北冰洋, 人们经常发现最厚的大冰块被长的裂纹穿透, 而其周围的重新冷凝而成的薄冰块却安然无恙 (正如 Assur 在 1963 年发现的那样)!

另一个具有实际意义, 但具有不同的尺度律的重要研究课题是, 垂直贯穿浮冰板引起的失效问题 (参见图 30). 在这种情况下, 我们知道断裂是形成一种由径向裂纹组成的星形图案 (见图 30(a)), 并从加载区域向外扩展; 而一旦出现环状的裂纹, 就马上导致冰板的失效, 正如图 30(c) 中冰板的载荷 - 挠度所表示的那样.

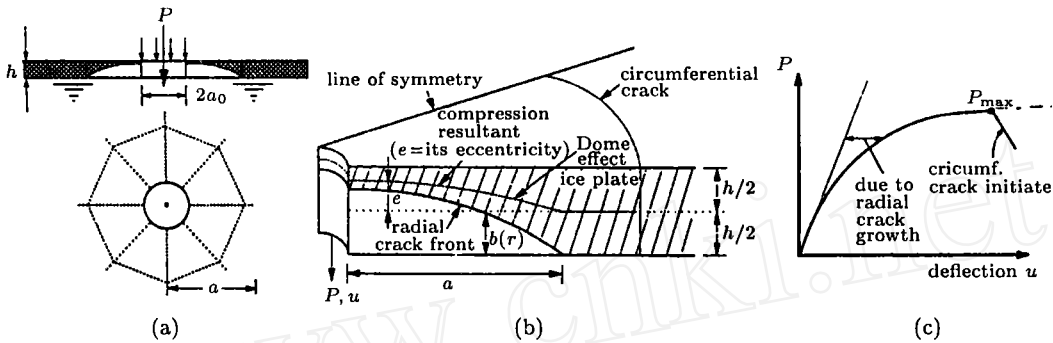


图 30 (a) 物体垂直穿透浮冰块时, 冰块内出现的径向和环向裂纹; (b) 径向非贯穿裂纹及合压力转换引起的圆拱效应; (c) 典型的载荷挠度曲线

对此问题的分析, 最初仍采用了贯穿弯曲裂纹的假设, 这样得出的大裂纹的渐近尺度律仍然是  $h^{-3/8}$  类型的 (Slepyan (1990), Bažant (1992)). 但是, 实验和有限元分析表明, 失效前, 径向裂纹并没有贯穿板的厚度, 如图 30(a) 所示. 这使得这一问题的分析十分复杂.

为求解这一问题, 我们 (Bažant 和 Kim (1997)) 取浮冰块内两条径向裂纹所夹的区域的一半为研究对象, 用数值方法所获得的柔度矩阵来表征它的弹性. 把存在裂纹的径向横截面分成一个个垂直的小条. 在每一窄条内, 裂纹起裂前要经过塑性阶段 (近似代表内聚区的效应), 计算遵从强度准则 (Dugdale 模型的意义下), 在窄条的截面部分, 假设平面内 (in-plane) 的正应力是常数, 而该处的应变超过了强度值所对应的弹性应变. 在后继的断裂阶段, 当处理裂纹引起的旋转、面内位移和窄条内弯矩  $M$  与法向应力  $N$  的关系时, 我们利用了 Rice 和 Levy (1972) 的非线性线弹簧模型, 并假设塑性阶段向断裂阶段的转换发生在塑性时的  $M$  和  $N$  的大小超过它们在断裂时的值 (为使这种做法具有相容性, 在塑性流动法则中假设比值  $N/M$  采取与断裂阶段相同的值).

这一工作 (Bažant 和 Kim (1997)) 最后给出了如图 31 所示的裂纹深度的分布, 其中最上面的曲线对应着最大的载荷值 (图中夸大了冰块的厚度方向). 此图也显示了弯矩和法向应力引起的名义应力的径向分布情况. 另外发现, 通过含裂纹的径向横截面传递的法向力是相当大的, 这些截面起到了类似圆拱的作用, 而帮助支承垂直方向的载荷.

另外还有一个重要的问题是, 到底形成了多少条径向裂纹? 研究表明 (Bažant 和 Li (1995)),

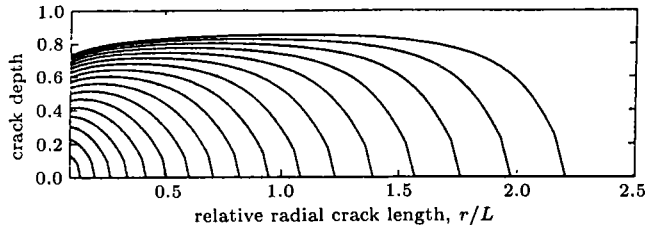


图 31 计算得出逐渐发展的径向非贯穿裂纹前沿 (图中夸大了板的厚度)

径向裂纹的数目依赖于冰块或板的厚度, 并且在很大程度上影响着失效的尺度律。

对于两条径向裂纹之间的板块, 在表达了裂纹引起的旋转、位移和弹性形变间的协调性的基础上, 在径向裂纹面内对积分方程进行数值求解, 给出了图 32 所示的尺寸效应, 此图的上部坐标表示了不同裂纹深度的径向裂纹的数目。图中, 数值结果与 Bazant 的统一尺寸效应律吻合较好, 在图中的中间区, 数值结果与光滑曲线的差异, 很可能源于数值模拟中, 裂纹尖端附近区域的网格不够细密。图 32 也再次确定了渐近尺寸效应律曲线的斜率为  $-1/2$ , 而不是  $-3/8$ 。其原因十分明显, 就是在失效的瞬间, 裂纹并没有贯穿, 而只是沿板厚垂直扩展。

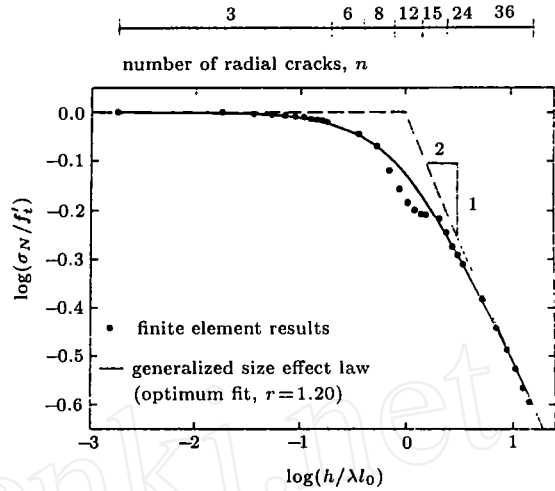


图 32 计算非贯穿裂纹扩展时得出的尺寸效应曲线, 在不同厚度范围具有不同数目的径向裂纹

### 11 内聚 (虚拟) 裂纹模型中的尺寸效应

内聚裂纹模型 (cohesive crack model), 是由 Hillerborg 等 (1976) 在研究混凝土时以“虚拟裂纹模型”的名称引入的。他们认为, 断裂扩展区 (内聚区) 内的裂纹张开位移  $w$  是裂纹桥联应力的单调下降函数, 桥联应力即内聚应力  $\sigma; w = g_i(\sigma)$ 。内聚裂纹模型的基本方程表达了以下两点, 即: 用桥联应力计算得出的裂纹张开必须与周围结构的弹性变形场协调; 并且为保证应力为有限值, 内聚裂纹尖端的应力强度因子  $K$  必须为 0。于是有

$$g[\sigma(\xi)] = - \int_{\alpha_0}^{\alpha} DC^{\sigma\sigma}(\xi, \xi')\sigma(\xi')d\xi' + DC^{\alpha P}(\xi)P \quad (42)$$

$$K = - \int_{\alpha_0}^{\alpha} k_{\sigma}(\xi)\sigma(\xi)Dd\xi + Pk_P = 0 \quad (43)$$

其中,  $\xi = x/D$ ,  $x$  为沿裂纹方向的坐标 (见图 33),  $\alpha = a/D$ ,  $\alpha_0 = a_0/D$ ,  $a, a_0$  分别为总的裂纹长度及无应力的裂纹长度,  $C^{\sigma\sigma}(\xi, \xi')$ ,  $C^{\alpha P}(\xi)$  分别代表周围的弹性区域在裂纹表面和载荷作用点对于给定载荷和位移的柔度参数 (见图 33),  $k_{\sigma}(\xi), k_P$  为内聚裂纹分别在裂

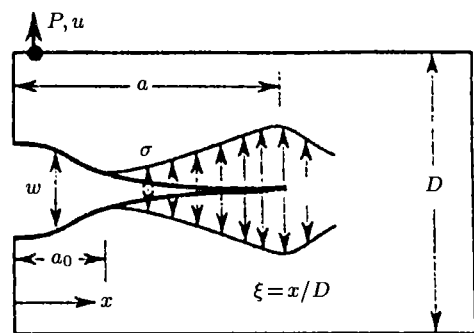


图 33 内聚 - 裂纹及桥联应力分布

纹面或加载荷点处作用单位载荷时裂尖 ( $x = a$ ) 的应力强度因子。

对于给定结构, 按照内聚裂纹模型计算最大载荷的办法通常是, 采用数值方法逐步加载来对上述方程进行积分 (Pettersson (1981)). 但最近的研究发现, 如果假定内聚裂纹区没有卸载 (这是常见的情形), 我们就可不必求解达到最大载荷前的载荷历史, 而可直接获得尺寸效应曲线. Li 和 Bažant(1996) 的工作说明, 反过来考虑这样一个问题是很方便的: 即相应于一个最大载荷  $P_{\max}$ , 对于一个给定的相对裂纹长度  $\alpha = a/D$ , 尺寸  $D$  应该为多大? 他们马上发现, 尺寸  $D$  代表着沿裂纹桥联区域积分的下列积分方程的第一本征值:

$$D \int_{\alpha_0}^{\alpha} C^{\sigma\sigma'}(\xi, \xi') \nu(\xi') d\xi' = -g'[\sigma(\xi)] \nu(\xi) \quad (44)$$

其中, 本征函数  $\nu(\xi)$  具有  $\partial\sigma(\xi)/\partial\alpha$  的意义. 于是, 最大载荷值可由下式给出:

$$P_{\max} = \frac{\int_{\alpha_0}^{\alpha} \nu(\xi) d\xi}{D \int_{\alpha_0}^{\alpha} C^{\sigma P}(\xi) \nu(\xi) d\xi} \quad (45)$$

上述分析和结果已经被广泛地推广使用. 利用载荷 - 挠度曲线, 当给定了切线刚度时, 人们可以直接求解相应的载荷和位移, 包括求解载荷 - 挠度曲线拐点处的对应值, 该处的值表征结构韧度.

内聚裂纹模型可以较好地描述不同尺度下结构失效的转变: 从小结构、相对较大的断裂扩展区转变到大结构、相对较小的断裂扩展区. 图 34 显示了无表面作用力 (traction-free) 裂纹 (指切口) 前正应力的剖面图, 其中, 内聚区尖端的应力值最大. 应注意到, 当结构尺寸变大时, 在无量纲坐标中, 最大应力点是如何向切口尖端运动的. 这些结果也表明, 当结构尺寸增大时, 尺寸效应律会趋近于 LEFM 的结果.

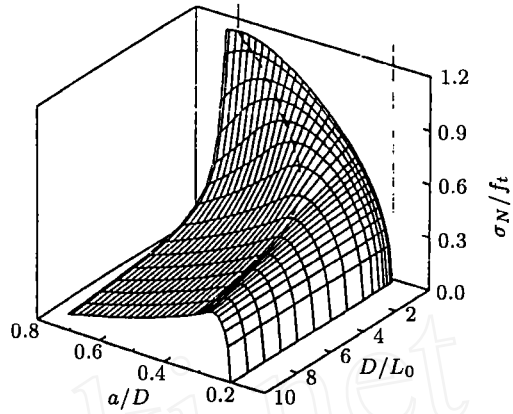


图 34 对于最大载荷和不同尺寸的相似试件沿裂纹线的应力剖面 (峰值代表内聚裂纹的尖端)

## 12 加载率和疲劳对尺寸效应的影响

严格地讲, 断裂总是一个与时间相关的现象. 在聚合物中, 断裂长大与时间有很强的相关性, 这主要源于材料的粘弹性 (见 Williams, Knauss, Schapery 和其他人自 60 年代开始的工作). 在岩石和陶瓷中, 断裂的时间相关性几乎唯一地源于导致断裂的结合键断裂 (bond ruptures) 的时间相关性. 对于其他材料, 如混凝土, 两种时间相关性都重要 (Bažant 和 Gettu (1992); Bažant 和 Wu (1983), Bažant 和 Li (1995)). 这两种时间相关性都对尺度律产生重要而又不同的影响.

首先考虑原子键的断裂, 这是一个热激活过程. 断裂频率由 Maxwell-Boltzmann 分布给出, 定义为超过原子结合强度的频率为  $f \propto e^{-\mathcal{E}/RT}$ , 这里  $T$  为绝对温度,  $R$  为气体常数,  $\mathcal{E}$  为振动原子的能量. 当施加应力时, 原子键间结合势能曲面偏移 (skewed), 如图 35(a) 所示. 这导致破坏结合键的活化势垒由  $Q$  减小到一个较小的值  $Q - c\sigma$ , 而重建结合键的势垒则由  $Q$  增加到一个较大的值  $Q + c\sigma$ , 这里  $Q$  为活化能, 亦即无应力状态的能量势垒, 而  $c$  为常数. 这又引起键的断裂频率  $f^+$  比键的重建频率  $f^-$  大, 二者之差为

$$\Delta f = f^+ - f^- \propto e^{-\frac{Q_+}{RT}} - e^{-\frac{Q_-}{RT}} \propto \sinh(c\sigma/RT) e^{-Q/RT} \quad (46)$$

内聚裂纹的张开速率  $\dot{w}$  可以近似假定正比于  $\Delta f$ . 由此对于内聚裂纹而言, 推导出裂纹 - 桥联 (内聚) 律的率相关的更一般表达式 (Bažant (1993, 1995); Bažant 和 Li (1995)):

$$w = g \left[ \sigma - \kappa e^{Q/RT} a \sinh \left( \frac{\dot{w}}{c_0} \right) \right] \quad (47)$$

对于内聚裂纹的应力 - 位移曲线和裂纹张开率  $\dot{w}$  之间的相关性关系由图 35(b) 表示.

在弹性 - 粘弹性比拟 (对应原理) 的基础上, 结构体的线性粘弹性效应可以引入到前述的关于内聚裂纹模型的方程中. 断裂试件的数值解表明结构体的粘弹性 (线性蠕变) 引起尺寸效应曲线上的点向右移动, 移向脆性增加的方向. 这解释了 Bažant 和 Gettu (1992) 的观察, 他们的观察给出了对于成组相似的由小到中、到大的形状相似具有切口的试件, 在不同的裂纹口部张开位移率下测试的尺寸效应的数据点 (图 36). 这些位移率由到达峰值的时间  $t_p$  描写. 如图 36 所揭示的, 随着  $t_p$  增加, 各组数据点向右移动.

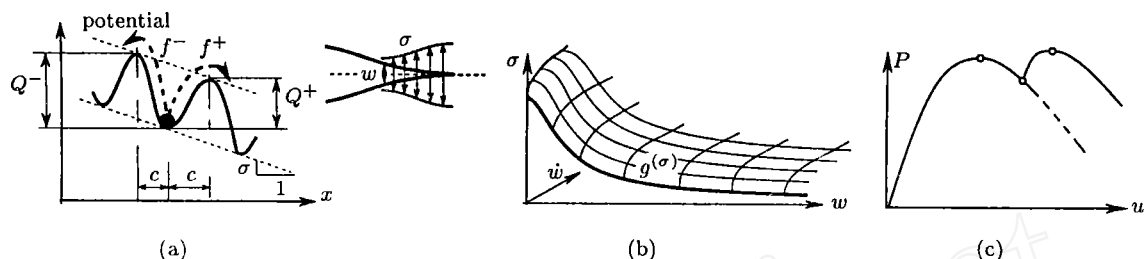


图 35 (a) 因所施应力作用致使原子键间结合势能面的偏移, 伴有活化能  $Q^+$  减小, (b) 内聚力依赖于裂纹张开位移  $w$  和速率  $\dot{w}$  的关系, (c) 加载速率突然增加后的响应变化

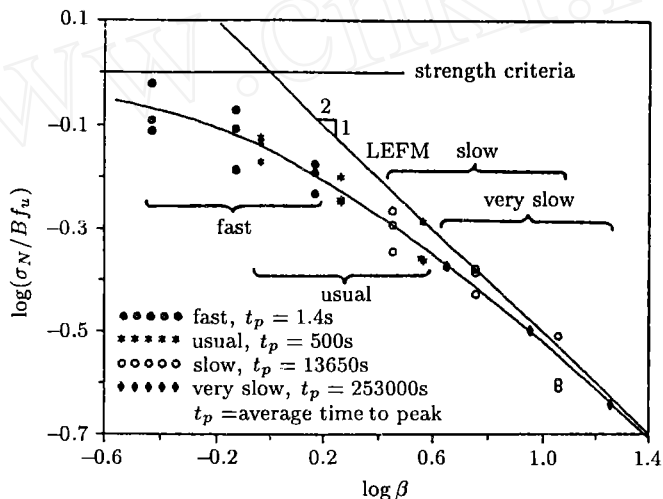


图 36 作为相对尺寸  $\beta = D/D_0$  函数的名义强度, 这里用了 3 个不同尺寸的试件, 4 种到达峰值的不同时间  $t_p$  (根据 Bažant 和 Gettu (1992))

响应所表现的脆性随着加载率的减小或者加载持续时间的增加而增加, 这一事实初看起来使人吃惊, 但却可以由断裂扩展区周围的应力松弛来解释 (如根据依赖于时间的内聚裂纹模型的计算所揭示的), 应力松弛使得扩展区变短. 这一行为也同样可以从名义强度 (用材料强度  $f'_u$  归一化) 与裂纹口部张开位移 (用临界张开位移  $w_c$  归一化) 的关系曲线得到阐释. 对于以蠕变作为唯一时间依赖原因的试件, 这些应力 - 位移曲线的峰值随着加载率的增加而向左移动而软化曲线发生相交 (图 37(a)). 另一方面, 对于结合键的破坏是率相关的唯一原因的试件, 峰值向右移动, 如图 37(b) 所示, 而没有在图 36 中所看到的那类脆性移动. 必须强调指出, 这些结果

仅在静态加载范围有效，也就是在没有惯性和波传播影响时有效。在动力学范围内，材料的行为变得更为复杂。

疲劳对断裂的影响是时间相关的 (Paris 和 Erdogan (1967))。由疲劳载荷引起的裂纹生长速度可近似由 Paris 律 (或 Paris-Erdogan 律) 给出如下：

$$\Delta a / \Delta N = \kappa (\Delta K_I / K_{Ic})^n$$

其中  $a$  为裂纹长度， $N$  为循环次数， $\Delta K_I$  为所作用的应力强度因子幅值， $\kappa, n$  为无量纲经验常数， $K_{Ic}$  为出于量纲原因而引入的断裂韧度。值得注意的是，作为一个比较好的近似，生长速率不依赖于  $K_I$  的最大和最小值。

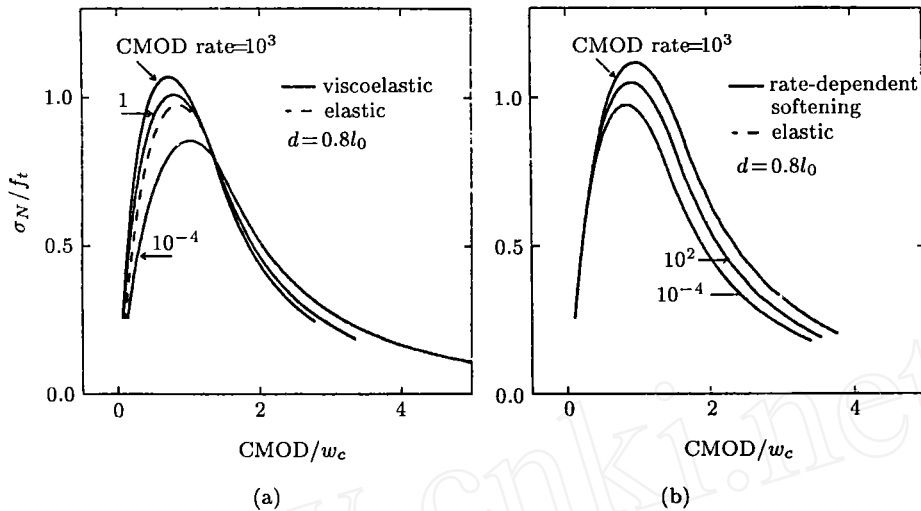


图 37 对于不同的 CMOD 率值，名义应力 - 相对裂纹张开位移 (CMOD) 曲线，根据内聚裂纹模型计算得到的 (a) 假定材料仅表现材料体积粘弹性，(b) 假定裂纹张开只与速率值相关 (Li 和 Bažant (1995))

这一规律可广泛应用于金属中疲劳裂纹的生长。若考虑具有相似裂纹的相似结构，这一方程包含着 LEFM 的尺寸效应的内容，对于不太大的准脆性结构，这一效应却太强了。Bažant 等 (Bažant 和 Xu (1991), Bažant 和 Schell (1993)) 认为 Paris 律需要和单调加载情况下的尺寸效应律结合起来，他们推广了 Paris 律，使之计及结构尺寸  $D$  的影响，即有

$$\frac{\Delta a}{\Delta N} = \kappa \left( \frac{\Delta K_I}{K_{Ic}} \sqrt{1 + \frac{D_0}{D}} \right)^n \quad (48)$$

其中  $D_0$  是和 Paris 律中同样的指数， $K_{Ic}$  是表示无穷大结构的断裂韧度的一个常数。

尺寸校正的必要性可由 Bažant 和 Xu (1991) 对于混凝土的实验结果 (图 38) 得到说明。在尺寸  $D$  不变时，裂纹生长速率  $K_I$  幅值的对数图应该近似为一条直线，由图 (38) 可以明白地证实一点。然而，对于不同尺寸的试

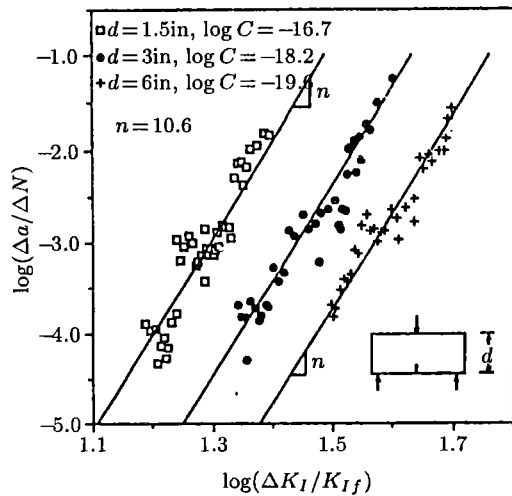


图 38 对于 3 种不同尺寸的混凝土试件每一循环裂纹增长 - 相对应力强度因子图 (Bažant 和 Xu (1991))

件,可以得到不同的直线.这些线的间距可用方程(48)很好地预报得到,然而根据经典的 Paris 律,这三条线却是重合在一起的.

### 13 压缩断裂中的尺寸效应

在压缩应力作用下脆性材料的断裂研究是断裂力学中最困难的方面.在压缩断裂中,人们必须区分以下两种截然不同的现象:(1)压缩断裂萌生的细观力学,(2)导致失效的整体压缩断裂的力学.对第一个问题比对第二个问题有更多的研究,确认了在压缩应力作用下起裂的各种细观力学机理,如由于空洞引起的劈裂裂纹的生长(Cotterell (1972), Sammis 和 Ashby (1986), Kemeny 和 Cook (1987, 1991), Steif (1984), Wittmann 和 Zaitsev (1981), Zaitsev (1985), Fairhurst 和 Cornet (1981), Ingraffea Heuzé (1980), Nesetova 和 Lajtai (1973), Carter (1992), Yuan et al (1993))或夹杂附近引起的轴向劈裂裂纹的生长,以及由于成组的坚硬夹杂造成的轴向劈裂裂纹的产生和由于滑动倾斜表面引起的翅尖裂纹的形成(Hawkes 和 Mellor (1970), Ingraffea (1977), Ashby 和 Hallam (1986), Horii 和 Nemat-Nasser (1982, 1986), Sanderson (1993), Schulson 和 Nickolayev (1995), Lehner 和 Kachanov (1996), 以及 Nixon (1996) 的评论).

然而,必须认清,所有这些机制都不能解释结构的整体失效.它们可以引起轴向劈裂裂纹的有限伸长,而这些轴向劈裂裂纹的长度是和空洞、夹杂或斜微裂纹的大小同一量级.这些机制中的每一种都能产生一个具有许多劈裂裂纹的区域,这些裂纹大致平行于单轴压应力方向,或者在三轴应力状态下大致平行于最大主压应力方向. Biot (1965) 建议,压缩失效的原因可能是三维的内部屈曲,屈曲既可以在试件体积内发生,也可以在一个倾斜带内发生.然而, Biot 仅考虑了弹性行为,没有进行任何能量分析.对于正交损伤的材料或者正交层板,由于内部屈曲引起的压缩失效的有限变形分析由 Bažant (1967) 给出. Kendall (1978) 指出,考虑了偏心压缩载荷下的屈曲现象,从断裂力学的能量平衡条件,仅仅对于在端面部分受载的试验圆柱的情况,才能真实地预测压缩断裂.

在前述的某些细观力学机制的前提下分析了整体压缩断裂(Bažant (1993), Bažant 和 Xiang (1997)),这些机制考虑了如图 39 所示的轴向劈裂裂纹带的产生,而这种裂纹带在斜交或者正交于最大压缩主压应力方向上进行侧向传播(Bažant (1993), Bažant 和 Xiang (1997)).在后峰值区域(post-peak regime),轴向劈裂裂纹互相连结,产生类似于剪切失效的现象,虽然在后峰值软化(post-peak softening)发生之前并没有剪切滑移的现象(事实上,从本质上来看,在混凝土中大多是不可能发生剪切失效的).对传播中的轴向劈裂裂纹带所作的能量分析表明,不可避免地应当存在尺寸效应.让我们对如图 39 所示的棱柱形试件展开讨论.

轴向劈裂裂纹的形成使裂纹带变窄,且在某种近似意义下,引起劈裂裂纹间薄片(和上图所示)材料的屈曲(换言之,这一现象可模型化为已经损伤的连续介质的内部屈曲).这引起应力的减小,可以认为这一减小近似地发生在阴影三角区内.为了计算裂纹带内的能量变化,需要考虑轴向劈裂裂纹之间的薄片应当经历相应于水平线 3~5 的显著的后屈曲挠度.由此,在劈裂裂纹带内的能量改变由 0120 和 03560 包围的面积之差给出(在压缩断裂中有残余应力  $\sigma_{cr}$ ,这一事实是对拉伸裂纹带扩展所作的类似分析的一个重要区别).释放出来的能量一定要由带内的轴向劈裂裂纹消耗和耗散掉,这是进行分析的一个条件.

第二个条件是由于薄片屈曲造成的裂纹带变窄必须和邻近三角区由于应力释放而产生的扩展相协调.人们需要写出这样的条件,即如图 39(a) 的 HI 部分的缩短要由 GH 和 IJ 部分的伸长来补偿,这就是协调条件.裂纹带的能量释放由图 39(d) 的应力-应变曲线下的面积变化给出,这一变化由开始的压应力  $\sigma_0$  到最后劈裂裂纹带内的应力  $\sigma_{cr}$  之间的应力降产生.

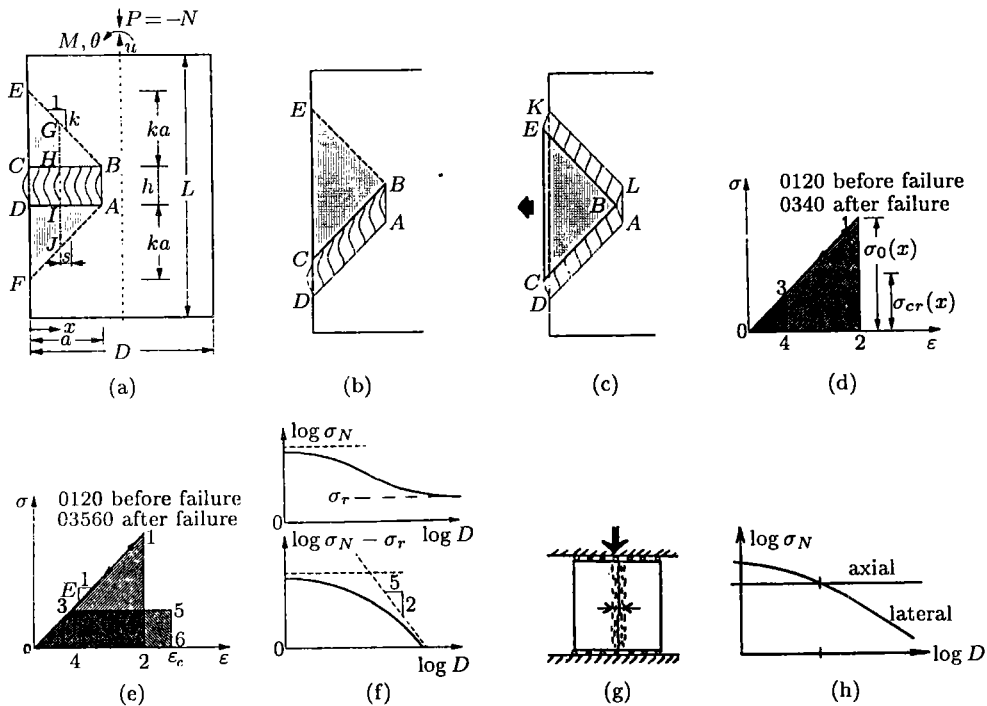


图 39 (a), (b), (c) 有能量释放区的轴向劈裂裂纹带的侧向扩展, (d), (e) 裂纹带的内外应变能密度的减小, (f) 近似的尺寸效应曲线

按照这一分析, 大型结构在压缩失效下的名义强度的尺寸效应有如下形式:

$$\sigma_N = C_1 D^{-2/5} + C_0 \quad (49)$$

其中  $C_0$  和  $C_1$  都是常数.

上述论述的数学表述 (Bažant (1993), Bažant 和 Xiang (1997)) 提供了显示尺寸效应的压缩失效的表达式. 这一尺寸效应被表示在图 39(f) 上, 以尺寸  $D$  的对数为横坐标, 以  $\log \sigma_N$  或  $\log(\sigma_N - \sigma_r)$  为纵坐标. 在图 39(f) 中, 可以看出尺寸效应为趋近于斜率为  $-2/5$  的渐近线. 这是又一个有趣的特点, 其根源在于轴向劈裂裂纹之间的间隔不是常数而依赖于总体能量平衡. 在任意间隔  $s$  的假定下已经得到了名义强度  $\sigma_N$  的解; 而且对某一依赖于尺寸  $D$  的间隔  $s$ ,  $\sigma_N$  显示有一极小值, 正是这一极小值条件使得渐近线斜率是  $-2/5$ , 而不是  $-1/2$ .

由上述简单表达给出的有关尺寸效应的近似理论结果 (Bažant (1993), Bažant 和 Xiang (1997)) 已和试验结果进行了比较. 实验中所用的钢筋混凝土柱有 3 种不同的大小 (比为 1:2:4) 和 3 种不同的细长度,  $\lambda = 19.2, 35.8$  和  $52.5$ , 混凝土颗粒大小也相应缩减. 试验结果表明了尺寸效应的存在, 图 40 中可以看到这一点 (而现行的设计规范却忽略了). 前面所叙述过的采用近似能量分析所得到的关于轴向劈裂裂纹带传播的公式由该图的实线绘出, 表明和实验结果符合得很好.

为什么小的单轴压缩试件由于产生轴向劈裂裂纹而失效, 并且没有表现出尺寸效应? 在一个均匀的单轴应力场内, 一条尖锐的平面轴向裂纹并不改变应力, 因而也不释放能量. 所以一条宽度有限的损伤带 (图 39(g)) 一定超前于轴向劈裂裂纹的形成. 能量只能由这条损伤带, 而不能由邻近的未损伤固体释放, 而释放的能量正比于轴向劈裂裂纹长度, 这意味着此时不存在尺寸效应 (图 39(h)). 所以对于具有充分大尺寸的试件来说, 包含有尺寸效应性质的劈裂裂纹的横向扩展才明显占优势 (图 39(h), Bažant 和 Xiang (1996)). 对于尺寸充分小的情况, 轴向劈裂

占优势的原因是，用于劈裂裂纹带的单位轴向伸长所消耗（和耗散）的总断裂能量要比单位横向伸长的要小，在横向伸长的区域中必然有新的裂纹成核。

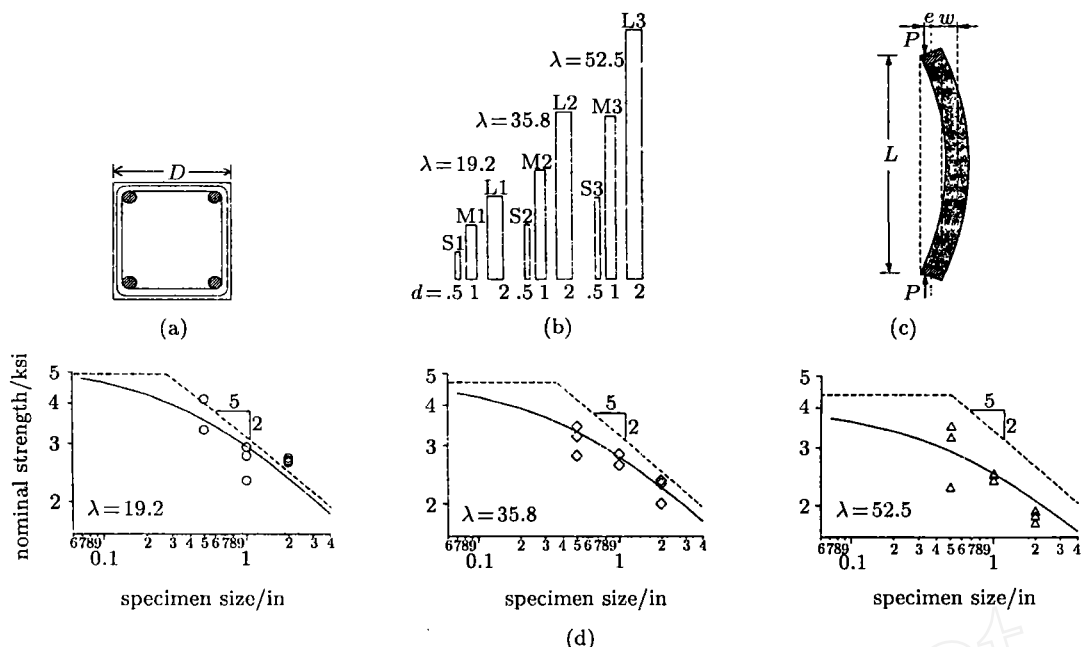


图 40 (a), (b), (c) Bažant 和 Kwon (1993) 试验所用的具有不同尺寸和细长度的经过几何相似缩小的钢筋混凝土柱; (d) 名义强度 - 混凝土柱尺寸关系的实测点及以表达式表示的拟合 (Bažant 和 Xiang (1997))

人们也知道，尺寸效应也存在于岩石钻孔的破裂之中，如 Nesetova 和 Lajtai (1992), Carter (1992), Carter 等 (1992), Yuan 等 (1992) 和 Haimson 及 Herrick (1989) 试验说明的。由 Kemeny 和 Cook (1987, 1981) 以及其他人的研究中可以知道，钻孔破裂的发生是因为在平行于最大压应力  $\sigma_{y\infty}$  方向上有劈裂裂纹的形成。在关于破裂的近似能量分析中采用了以下简化假定：劈裂裂纹占据了一个正在长大的椭圆区域（虽然实际上这个区域较窄，更接近于三角形）。椭圆边界的假定使得可以按照 Eshelby 关于椭球夹杂的本征应变定理，很容易来计算由周围无穷大介质中释放的能量 (Bažant, Lin 和 Lippmann, 1993)。按照这一定理，从无限岩石介质中释放的能量近似为

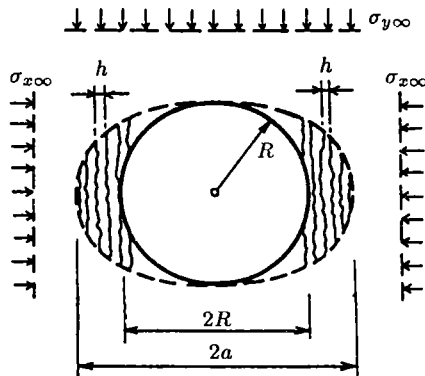


图 41 岩石中钻孔和轴向劈裂裂纹椭圆区的生长 (据 Bažant, Lin 和 Lippmann (1993))

$$\Delta\Pi = -\pi[(a + 2R)R\sigma_{x\infty}^2 + (2a + R)a\sigma_{y\infty}^2 - 2aR\sigma_{x\infty}\sigma_{y\infty} - 2a^2\sigma_{cr}^2](1 - \nu^2)/2E \quad (50)$$

其中  $R$  为钻孔半径， $a$  为椭圆主轴长 (图 41),  $\sigma_{x\infty}$  和  $\sigma_{y\infty}$  为远处主应力， $E$  为岩石杨氏模量， $\nu$  为 Poisson 比。与已经说明过的轴向劈裂裂纹带扩展的相似分析提供了计算破裂应力的表达式，其曲线图和图 39(f) 相似，也具有公式 (49) 所描述的渐近行为。



#### 14 具有残余内聚应力的拉伸或压缩裂纹的渐近尺度律

在因轴向劈裂裂纹带横向扩展引起的压缩裂纹的情况(第13节已讨论过),使裂纹带内发生内屈曲的临界应力给出的残余应力保留了下来. 裂纹带内所有断裂应变集中到一条线上,可以形成一种近似处理,即把这样的断裂视为一条线裂纹,在裂纹内允许相反方向的面发生相互穿透,而且软化压缩应力-位移律终止应用于一个常数残余应力 $\sigma_r$ 的平台处. 同样地,为了表征纤维增强复合材料中裂纹的拉伸应力-位移律,也可以假定有常数残余应力 $\sigma_Y$ 的存在(例如纤维增强混凝土).

有关多载荷情形下的渐近公式(35)~(37)也可以用于这一情形,因为沿裂纹的均匀压力 $\sigma_Y$ 可以看作是作用于结构的两个载荷之一. 我们可以分别写出在载荷 $P$ 和均匀的裂纹压力 $\sigma_Y$ 作用下的应力强度因子

$$K_I^2 = \sigma_N^2 D g(\alpha_0 + \theta) \quad (\text{这里 } \theta = c_f/D)$$

$$K_I^2 = \sigma_Y^2 \gamma(\alpha_0 + \theta)$$

其中 $g, \gamma$ 为无量纲函数,起到以前表达式中的 $g_1$ 和 $g_2$ 的作用. 用这种方式,对方程(35)和(36)进行重新安排,在大的裂纹的情况下给出如下的关于尺寸效应(和形状效应)的表达式:

$$\sigma_N = \frac{\sqrt{EG_f + \sigma_Y \sqrt{\gamma'(\alpha_0)c_f + \gamma(\alpha_0)D}}}{\sqrt{g'(\alpha_0)c_f + g(\alpha_0)D}} \quad (51)$$

对于几何相似的结构和与尺寸无关的 $\alpha_0$ ,这一表达式给出了尺寸效应曲线. 这一曲线以 $\log D$ 为横坐标,以图18(b)和图27的样式终结于一条水平渐近线,而且在左边也有一条水平渐近线.

有均匀残余应力 $\sigma_Y$ 的作用开始生成裂纹的情况,方程(35)和(37)可以化为下面的尺寸(和形状)效应的表达式

$$\sigma_N = \frac{\sqrt{EG_f + \sigma_Y \sqrt{\gamma'(0)c_f + \frac{1}{2}\gamma''(0)\frac{c_f^2}{D}}}}{\sqrt{g'(0)c_f + \frac{1}{2}g''(0)\frac{c_f^2}{D}}} \quad (52)$$

这一表达式在对数图上也终止于一条水平的渐近线,如图18(b)那样.

若残余应力为压应力,并由任意间距的轴向劈裂裂纹的带内发生的内部屈曲所决定,那么前面方程中的 $\sigma_Y$ 不再是常数. 如已经解释的,对于不同裂纹间距求解 $\sigma_N$ 的极小值,表明在带内裂纹的间距应该随 $D$ 而变化. 于是,在方程(51)和(52)中,

$$\sqrt{EG_f} \text{ 必须为 } \sqrt{EG_f} D^{1/10} \text{ 所替代} \quad (53)$$

更进一步,按照临界屈曲载荷的表达式, $\sigma_Y$ 的值也依赖于裂纹间距. 总的趋势可由式(49)很好地近似,特别地, $\sigma_N$ 将趋近于大尺寸情况的渐近极限 $D^{-2/5}$ .

上面的两个表达式也能用于木材和由平行纤维增强的复合材料中的压缩扭折带. 这一问题一直按弹塑性处理,和现有实验数据符合很好的失效载荷的解也已经找到(Rosen(1965), Argon(1972), Budianski(1983), Budianski等(1997), Budianski和Fleck(1994), Kyriakides等(1995), Christensen和DeTeresa(1997)). 然而,在相当宽的尺寸范围所进行的尺寸效应的测量,看起来是不能用的,因此,有理由怀疑尺寸效应的存在. 观察指出,在扭折带内沿着纤维的剪切滑动

和断裂可能表现出软化，也就是剪切应力逐渐减小到最终的渐近值，扭折带也不是在同一时刻形成，而是以平行压缩劈裂纹带的方式（已在第 13 节中分析），有一个传播的前沿。

Carpinteri 在为自己的 MSFL 辩护中提出了以下观点，有些测量的尺寸效应曲线 ( $\log \sigma_N - \log D$ ) 具有正的曲率且趋向于一条水平渐近线（如图 18）。然而，如现在我们所看到的，这可能归结为下列的 4 种原因（确定性的非分型的）中的任何一种。

(1) 在无切口结构中，无表面作用力的裂纹的相对长度  $\alpha_0$  可能不是常数，而是随着尺寸  $D$  的增加而减小。

(2) 在裂纹中可能存在残余内聚（裂纹 - 桥联）应力  $\sigma_Y$ 。

(3) 失效可能在宏观裂纹生长的起始处发生。

(4) 超过某一尺寸  $D$ ，可能存在向某种塑性失效机制的转变（如第 4 节中讨论的巴西 (Brazilian) 试验）。

## 15 钢筋混凝土剪切失效的断裂桁架模型

看来压缩失效也是钢筋混凝土梁剪切失效中的最终失效机制，如梁的对角线剪切和梁的扭转、板的冲压、锚的拔出、梁托和框架连结件的失效等等。梁的剪切失效中尺寸效应的重要性已为许多研究者的实验所证实 (Leonhardt 和 Walter (1962), Kani (1967), Kupfer (1964), Leonhardt (1977), Walraven (1978, 1995), Iguro 等 (1985), Shioya 等 (1989), Shioya 和 Akiyama (1994), Bažant 和 Kazemi (1991), Walraven 和 Lehwalter (1994), 还可参见 Bažant 和 Kim (1994), Bažant 和 Cao (1986, 1987), Bažant 和 Sun (1987), Bažant, Sener 和 Prat (1988), Mihashi 等 (1993))。让我们对钢筋混凝土的对角线剪切失效中的尺寸效应的力学 (Bažant (1996)) 作一简要概述。

按照由 Ritter (1899) 和 Mörsch (1963) 提出的，由 Nielsen 和 Braestrup (1975), Thürlimann (1976), Collins (1978), Collins 等 (1976, 1996), Marti (1980, 1985), Collins 和 Mitchell (1980), Hsu (1988, 1995) 和 Schlaich 等 (1987) 以及其他改进的桁架模型——最近被称为支柱 - 拉杆模型，一个好的近似需要假定，在钢筋混凝土梁高剪切区中在达到最大载荷之前形成了一组倾斜的平行裂纹 (图 42)。假定这种裂纹是连续的，且沿着最大主压应力方向（自然，这只是一种近似），这一假定意味着在裂纹平面没有剪应力，且主拉伸应力已经减小到 0。按照这一简化图案，梁的表现和由纵向的钢筋、垂直的箍筋（受拉伸）和裂纹之间倾斜的混凝土压力支柱组成的一个桁架一样。若钢筋和箍筋设计得足够强，桁架失效的唯一方式只能是压缩对角线支柱。

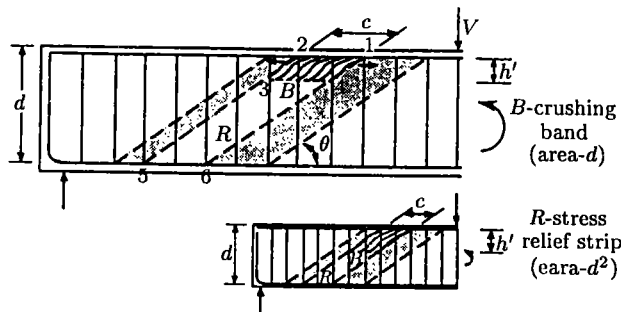


图 42 钢筋混凝土梁对角线剪切失效桁架模型中有关断裂的调整。不同尺寸的梁中的压碎区和能量释放区

经典方法中支柱的压缩失效由强度概念加以处理，然而这一概念没有抓住压缩断裂的局域

化, 而且意味着在倾斜支柱中压缩断裂各处同时发生. 实际上, 被称为压碎的压缩断裂仅在支柱长度上的某一部分发展 (在应力集中区, 如图 42 中梁的顶部), 然后横跨支柱传播. 为简便起见, 形成压碎区的轴向劈裂裂纹带被假定以图 42 所示的方式传播, 在最大载荷时达到某一长度  $c$ . 压碎带的深度在开始可能增加, 随后稳定在根据骨料尺寸大小所控制的某一常数  $h$ .

现在就易于解释尺寸效应是如何发生的了. 由于在最大载荷处平行的倾斜裂纹的存在, 压碎带的形成, 减小了宽为  $c$  深为  $d$  的整个倾斜的白带中的应力 (梁深度示于图 42). 白带的面积为  $cd$ , 亦即  $(c/d)d^2$ ; 它的生长速率是  $(c/d)2d\dot{d}$ , 当比较不同尺寸但几何相似的梁时,  $c/d$  近似为常数. 所以, 能量释放率正比于  $\sigma_N^2 d\dot{d}/E$ , 这里名义强度定义为  $\sigma_N = V/bd =$  平均剪应力,  $V$  为所施加的剪力,  $b$  为梁宽. 能量消耗正比于压碎带的面积  $ch$  即  $(c/d)hd$ , 也就是正比于  $G_f d/s$ , 其变化率为  $G_f \dot{d}/s$ , 这里  $G_f$  为轴向劈裂裂纹的断裂能 ( $s$  为裂纹间距). 这一表达式可以渐近地应用于大的梁, 因为对于小深度  $d$  的梁, 压碎带的全宽  $h$  不能发展. 使能量释放和能量耗散的导数表达式相等, 即  $\sigma_N^2 d\dot{d}/E \propto G_f \dot{d}/s$ , 我们断定, 渐近的尺寸效应应该有如下的形式

$$\sigma_N \propto s^{-1} \sqrt{EG_f d} \quad (54)$$

完全的尺寸效应表示了由水平渐近线到由本方程所给出的尺寸效应图中倾斜渐近线一种过渡. 相对简单的用于设计的表达式已由 Bazant (1996) 得到. 对于具有纵向钢筋, 但没有垂向箍筋的梁来说, 也能用类似方法来分析对角线剪切失效, 并且进而分析扭转失效.

## 16 具有尺寸效应的断裂或损伤的数值模拟

现在已经有了许多数值方法用来模拟损伤局域化、断裂传播和尺寸效应, 它们可分类如下:

- (1) 离散断裂的弹性分析
  - (a)  $R$ - 曲线模型
  - (b) 内聚 (虚拟的) 裂纹模型
- (2) 分布损伤开裂的非线性分析
  - (a) 有限元
    - (i) 裂纹带模型
    - (ii) 非局部损伤模型
      - (A) 平均型 (半经验)
      - (B) 基于裂纹的相互作用 (细观力学)
    - (iii) 梯度局域化限制子 (limiter)
      - (A) 第 1 梯度
      - (B) 第 2 梯度
      - (C) 扩散型限制子
  - (b) 离散元 —— 随机粒子模型
    - (i) 仅带有轴向力 (随机桁架模型)
    - (ii) 粒子间同时传递法向力和剪切力.

最简单的是  $R$  曲线方法, 它常能给出解析解. 内聚 (或虚拟) 裂纹模型是有效的, 如果内聚裂纹周围弹性体的行为事先被一个刚度矩阵或柔度矩阵所表征. 但是断裂扩展方向一般是不知道的, 这将给应用带来极大的复杂性. 对此, Ingraffea (1977, 后又有修正) 发展的有效重分网格的格式 (在他的计算机程序 FRANC 中) 得到了极大的成功; 然而这一方法尚未被推广到实际实用中.

工程界和商业中的有限元程序(如 DIANA; SBETA, Cervenka 和 Pukl (1994)) 差不多都使用了裂纹带模型. 这一模型是能够捕捉尺寸效应形式最简单的有限元分析. 裂纹带模型的基本思想(Bažant (1982), Bažant 和 Oh (1983)) 是: 由一个具有单一的单元宽度的模糊裂纹损伤带描述断裂或分布的开裂; 并且, 把断裂区的单元宽度, 即带宽作为材料性质看待(1976 由 Bažant 建议). 这是避开虚假的网格敏感性的最简单途径, 且能够保证扩展的裂纹带耗散大小合理的能量(由断裂能  $G_f$  给出).

更一般和更有力但也更为复杂的是非局部损伤方法, 在这一方法中, 连续介质中任一点的应力不仅取决于该点的应变, 而且还和该点邻域的应变有关. 而裂纹带模型可以认为是非局部概念的简化变型, 真正的非局部有限元分析包括由邻近的有限元的应力值来计算应力. 最简单而又原始的形式(Bažant, Belytschko 和 Chang (1984), Bažant (1984)) 包含有一个经验的加权平均规则. 非局部平均有很多可能的变型, 但最接近真实的结果显然是由 Jirásek (1996) 用非局部途径得到, 在这一途径中对于应变软化的应力-应变关系(用以描述损伤和模糊裂纹的演化)情况下的割线刚度矩阵是由空间平均应变计算得到, 之后应力由这一矩阵乘以当地应变得到.

物理上, 利用弹性体中描述很多裂纹相互作用的矩阵关系的连续介质的模糊化(smearing), 可以得到更真实的非局部损伤模型. 这种矩阵的相互作用关系的一种形式是由 Kachanov (1985, 1987) 提出的, 由它导至下面的场方程(Bažant (1994))

$$\Delta \bar{S}^{(1)}(x) - \int_V \Lambda(x, \xi) \Delta \bar{S}^{(1)}(\xi) dV(\xi) = \langle \Delta S^{(1)}(x) \rangle \quad (55)$$

这是一个 Fredholm 积分方程, 其中  $V$  为结构体积;  $\Lambda(x, \xi)$  为裂纹影响函数, 以统计模糊化(smearing)的方式, 表征在  $\xi$  处裂纹面上作用单位压力所引起的在坐标  $x$  处跨过冻结裂纹的正应力;  $\langle \cdot \rangle$  是空间平均算符,  $\Delta S^{(1)}$  或  $\Delta \bar{S}^{(1)}$  为在裂纹相互作用效应之前或之后的主应力增量(在当前的加载步内), 其中上标(1)表示主应力. 这一方程中的积分不是一个平均积分, 因为积分核的空间平均为 0, 这个核在裂纹互相作用的放大区为正, 而在屏蔽区为负. 所以, 在这一非局部损伤模型中, 且不说平均积分, 存在着一个附加的在邻域内对非弹性应力增量的非局部积分, 这些增量模拟了使裂纹生长得到放松或增进的那些应力. 它们反映了一个事实, 即位于给定裂纹的屏蔽区中的邻近裂纹可以阻止裂纹的生长; 与此相反, 位于放大区内的裂纹则能促进裂纹的生长(Bažant (1994), Bažant 和 Jirásek (1994a, 1994b)).

这一表达式表明, 损伤的非局域性主要是由于微裂纹之间相互作用的结果, 由它提供了一个有物理基础的细观力学模型. 应用这一概念, 结合损伤的微平面本构模型, 对于混凝土中发生的断裂和尺寸效应, 给出了漂亮结果(Ožbolt 和 Bažant (1996)). 然而, 这一分析比通过经典的经验平衡途径处理非局部损伤还要复杂. 实际上, 从裂纹相互作用途径所得到的结果是, 由拉伸和剪切断裂控制的失效能够用同一个材料模型来描述, 这一模型中具有与非局部平均相同的特征长度, 而这是以前的模型所不能提供的.

如果包含在非局部损伤模型的平均积分中的特征长度至少是单元尺寸的 3 倍, 关于裂纹(或损伤)沿网格线传播的方向性偏差可以被消除. 然而在某些情况下, 所要求的单元尺寸太小了(虽然可以采用人工的大特征长度, 而且通过修正应变软化本构方程的峰后斜率以保证正确的损伤能量耗散来进行补偿). 假若特征尺寸太小, 或者假若使用裂纹带模型, 则这时期望或者预先知道裂纹传播方向, 据此画出网格线, 或者使用 Ingraffea (1977) 在离散裂纹模型中所提出的同一类重分网格的算法.

最早的非局部损伤模型, 其中不仅损伤而且弹性响应也是非局部的, 显示出关于失稳的虚假的零能量(zero-energy)周期模式, 这一模式需要另外的手段, 如单元的瓦状叠置来加以遏制

(Bažant 等 (1984), Bažant (1984)). 这一不便利处随后由 Pijaudier-Cabot 和 Bažant (1987) 的表述所消除 (还可参见 Bažant 和 Pijandier-Cabot (1988)), 其中的主要想法是, 仅仅具有连续损伤力学意义的损伤 (还有随后屈服极限的降低, Bažant 和 Lin (1988)). 必须是非局部的, 而弹性响应必须是局部的. 此后出现的非局部连续介质模型 (带有平均型积分) 都是这一思想的种种变种.

从有限元分析的观点, 引入非局部概念的主要目的是阻止对损伤前沿进行随意的、虚假的、局部化, 使其成为一个零宽度的带. 因为, 在带有应变软化的损伤模型中, 单位体积材料的能量耗散 (由完全的应力 - 应变曲线下的面积给出) 是一个有限值, 而损伤带前沿的零宽度意味着断裂可以没有能量耗散而扩展, 这在物理上显然不正确. 这一现象, 使得按照具有应变软化的连续损伤力学所得到的普通的 (局部的) 有限元解出现虚假的网格敏感性.

从物理上看, 由一个非正定的切线模量矩阵所表征的应变软化, 初看起来是一种物理可疑现象, 因为它意味着波速为复数 (于是波的传播是不可能的), 它还意味着对应于静态响应的偏微分方程的类型由椭圆型变为双曲型 (Hadamard (1903), Hill (1962), Mandel (1964), Bažant 和 Cedolin (1991), 第 13 章). 通常由两种方式避免这些问题: (1) 通过引入某些形式的数学手段——局域化限制子 (localization limiter), 由它赋予非局部连续损伤模型一个特征长度, (2) 承认软化损伤的率相关性是不可忽略的.

认为应变软化引起波速是复数而不是实数, 这一结论过于简单化, 这有两方面的现象为证. 一是应变软化材料总是能传播卸载波, 因为当卸载时, 如 60 年代实验 (Rüsch 和 Hilsdorf (1963), Evans 和 Marathe (1968)) 所发现, 其切线刚度矩阵总是正定的. 二是最近在西北大学的试验所揭示的 (Bažant 和 Gettu (1992), Bažant, Guo, Faber (1995), Tandon), 真实的应变软化材料总是能够传播具有非常陡前沿的加载波. 后一现象是裂纹传播 (键破坏) 中率效应的结果, 这引起因应变率突然增加使得由应变软化反转为应变硬化 (随后出现第 2 个峰), 见图 35(c). 由方程 (47) 所描述的这一现象对于冲击问题所作的有限元分析是特别重要的.

另一种局域化限制子是梯度限制子. 在这种限制子中将连续介质中给定点处的应力不仅视作依赖于该点的应变, 而且依赖于该点的一阶或二阶应变梯度, 这一概念隐含着存在材料的某一特征长度. 看来可能对关于损伤传播以及尺寸效应的各种实际问题, 给出定性的合理结果. 然而不要忘记, 梯度局域化限制子一直没有在物理上直接被证实. 而且它们可由带有平均型积分的非局部损伤模型近似地推导得到. 事实上, 将积分核和应变场展为 Taylor 级数并在某一项截断, 这样就给出了梯度局域化限制子 (Bažant (1984)), 而且也从物理上证实了它的正确性 (假定积分表述是基于裂纹相互作用的模糊化).

损伤和断裂的离散元模型是由 Cundall (1971), Cundall 和 Strack (1979) 提出的, 用于颗粒固体的经过断裂化适配处理的模型, 这一模型需要使用功能强大的计算机. 随着计算机能力的增大, 这种模型越来越易于完成. 在这些模型中, 材料由粒子系统表示, 粒子间的连接在某一应力时断开. 粒子间有代表性的间距, 与裂纹带模型类似, 起着局域化限制子的作用, 它控制着断裂扩展单位长度所需的能量耗散率 (Bažant, Tabbara et al (1990)). 粒子可以模拟如混凝土中实际骨料构形, 或者作为一种方便的手段赋予模型以某一特征长度, 如模拟海上的浮冰块 (Jirasek 和 Bažant (1995a, b)).

在各向同性材料中, 粒子构形是随机的, 这非常重要. 对于规则的粒子排裂, 在计算中总会出现断裂传播沿着网格线的偏向 (bias), 即使粒子连接的性质具有随机性时也是如此 (Jirasek 和 Bažant, (1995b)).

在最简单的离散元模型中, 粒子之间假定仅有轴向的相互作用. 但是这在三维情况下这将使经过均匀化的连续介质的 Poisson 比为  $1/4$ , 在二维情况则为  $1/3$ , 因而不能描述 Poisson 比为

其他值的材料 (除非使用某些技巧). 另一个不利之处是损伤带太窄. 对于任意 Poisson 比和较宽损伤带的情况, 可以由如下的粒子模型实现: 模型中粒子的连接不仅传递轴向力, 也传递剪切力. 而这正是 Zubelewicz (1983), Zubelewicz 和 Bažant (1987) 模型, 以及 Schlangen 和 van Mier (1992), van Mier 和 Schlangen (1993) 的模型所能做到的. 在后一种模型中, 粒子系统用一个能承受弯曲的杆系来描述 (杆的弯曲是虚拟的, 因而不是真实的, 但是这可以起到在粒子间传递

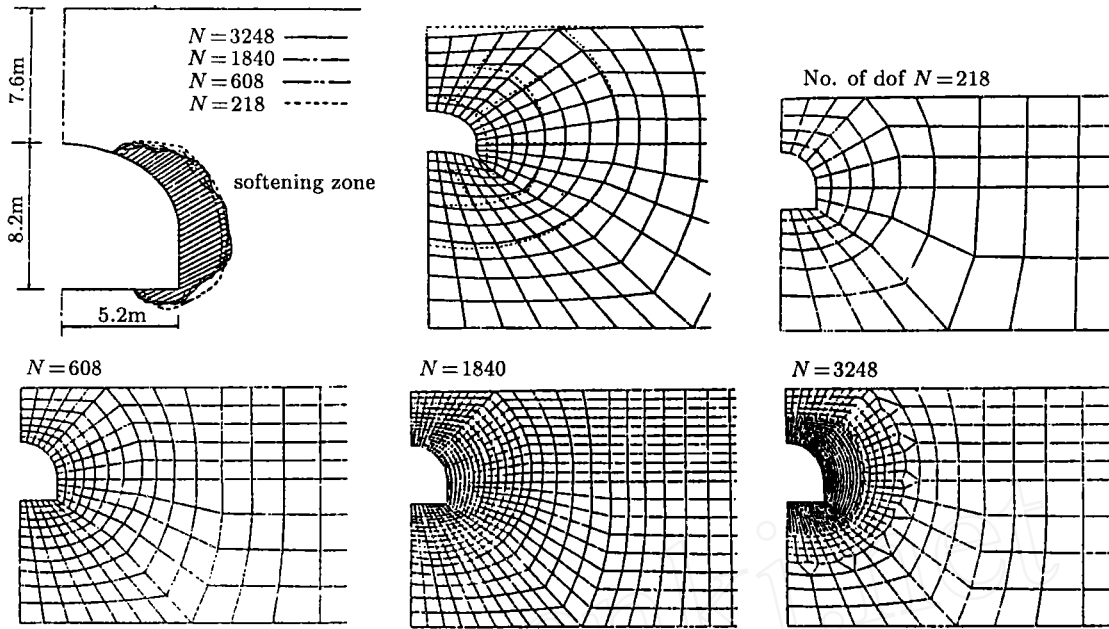


图 43 使用降低的非局部屈服极限对隧道开掘的分析, 带有变形网格 (上左), 和具有不同精度格 (底部)(据 Bažant 和 Lin (1988))

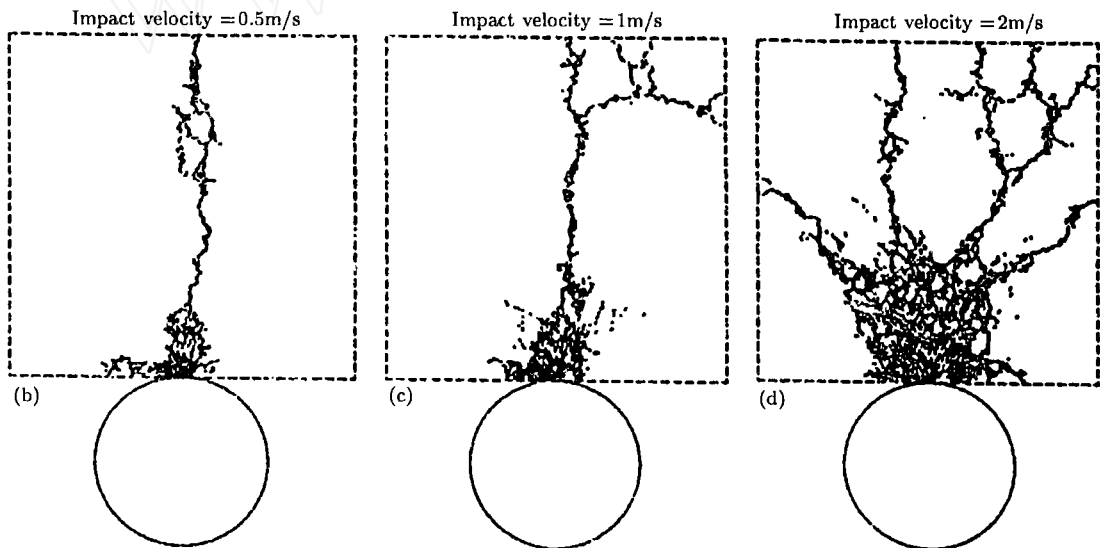


图 44 以不同速度运动的浮冰在和刚性障碍物碰撞后破裂的随机粒子模拟 (Jirásek 和 Bažant (1995b))

剪力的目的). Van Mier 及其合作者用这种方式模拟研究混凝土断裂取得了显著成功.

带有非局部模型和随机粒子模型的数值解的例子已在图 16 和 17 给出. 图 43 和 44 又给出了两个例子. 这两个例子是把非局部有限元损伤模型用于无衬砌的坑道失效分析和用于运动海

冰块在和刚性障碍物相撞后破裂的模拟。

## 17 结语和展望

让我们以理性思考的方式考虑人类知识的逐渐扩张(图 45)来结束这篇论文。已知领域可以想像为一个圆,而所有未知的都位于圆外。在任一历史阶段能够被发现的只是与圆接触的部分。关于更远的将来能有些什么样的问题几乎无从提起。在我们这一领域,弹性框架的强度问题在 Hooke 之前几乎没有人提出,19 世纪中叶才着手处理这一问题,在 1960 年前后,这一领域的大部分问题均已解决。

迄今为止,在物理和数学中最难对付的问题之一是湍流问题,它占据着人们最好的思维已长达一个世纪,而专家们说眼前还看不到对这一问题的完全理解。脆性材料的尺度律问题是损伤力学的一部分,对这一问题的认真研究起始于 1960 年前后。虽然已经知道了很多,但是看起来损伤力学也是难以对付的问题,它的难度可能和湍流一样,需要很长时间才能完全加以解决。

对于最近的将来,下面给出了样本仅是一些已被确认为必须而且有潜在利益的研究方向:

- (1) 软化损伤的细观力学基础。
- (2) 在物理上证明是合理的非局部模型(以裂纹和夹杂相互作用为基础)。
- (3) 脆性压缩断裂和剪切断裂的尺度律。
- (4) 界面断裂(键的破裂)的尺度律。
- (5) 加载率和加载时间对尺度律的影响,以及长时间断裂和疲劳的尺寸效应。
- (6) 大应变时的软化损伤和尺度律。
- (7) 尺寸效应对软化结构的韧性及其能量吸收能力的影响。
- (8) 对于各种准脆性材料(其中很多为高技术材料,见第 1 节引言部分)采集尺寸效应的试验资料,以及各类真实结构的资料。
- (9) 在断裂期间由于能量释放和应力重新分布引起的尺寸效应的统计特征。
- (10) 地球物理学中的尺度律问题,如地震预测,海冰动力学。
- (11) 将尺寸效应向小尺寸方向外推到脆性减弱的范围,这是微电子元件和微机械设备所感兴趣的。
- (12) 将尺寸效应结合到下列对象的设计过程和推荐规范中去:混凝土结构、土工结构、纤维复合材料(如飞机和船舶)、核电站、海洋采油平台、采矿和钻孔技术(特别是岩爆和钻孔破裂)等等。

**致谢** 这篇综述文章的准备工作得到了美国能源部赞助的 Sandia 国家实验室的实验室定向研究和发展计划的支持,合同号为 DE-AC04-p4AL85000。这篇综述中所评述到的有关第一作者过去 7 年里所作研究的大部分工作得到海军研究局的支持(合同号为 N00014-91-J1109,监督人为 Y. Rajapakse)。

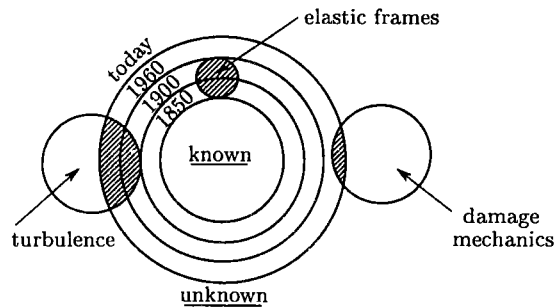


图 45 人类知识扩张透视图中的损伤力学

## 参 考 文 献

### 1638~1850

- da Vinci L (1500s). see Notebooks of Léonardo da Vinci. London: Edward McCurdy, 1945. 546; and Les Manuscrits de Léonard de Vinci. transl in French by Ravaisson-Mollien C. Inst de France (1881~1891). Vol. 3
- Galileo Galilei L (1638). Discorsi i Dimostrazioni Matematiche intorno a due Nuove Scienze: Elsevirii. Leiden; English transl by Weston T. London, 1730. 178~181
- Mariotte E (1686). Traité du mouvement des eaux, (posthumously). de la Hire M ed. English transl by Desvagliers JT. London, 1718. 249; also Mariotte's collected works. 2nd ed. The Hague. 1740
- Young Thomas (1807). Course of lectures on natural philosophy and the mechanical arts. London, I. 144

### 1851~1960

- Barenblatt GI (1959). Formation of equilibrium cracks during brittle fracture: General ideas and hypothesis, axially symmetric cracks. *Prikl Mat Mekh*, 23(3): 434~444
- Blanks RF, McNamara CC (1935). Mass concrete tests in large cylinders. *J Am Concrete Inst*, 31: 280~303
- Dugdale DS (1960). Yielding of steel sheets containing slits. *J Mech Phys Solids*, 8: 100~108
- Fischer RA, Tippett LHC (1928). Limiting forms of the frequency distribution of the largest and smallest member of a sample. *Proc Cambridge Philosophical Soc*, 24: 180~190
- Fréchet M (1927). Sur la loi de probabilité de l'écart maximum. *Ann Soc Polon Math*, 6, 93
- Freudenthal AM (1956). Physical and statistical aspects of fatigue. in *Advance in Applied Mechanics*, Vol 4. Academic Press, 117~157
- Gonnermann HF (1925). Effect of size and shape of test specimen on compressive strength of concrete. *Proc ASTM*, 25: 237~250
- Griffith AA (1921). Phenomena of rupture and flow in solids. *Phil Trans*, 221A: 179~180
- Hadamard J (1903). Lecons sur la propagation des ondes. Ch VI, Hermann Paris
- Mörsch E (1922). Der Eisenbetonbau-Seine Theorie und Anwendung. *Reinforced Concrete Construction-Theory and Application*, Wittwer, Stuttgart. 5th ed. Vol 1, Part 1, 1920 and Part 2, 1922
- Peirce FT (1926). Weakest link theorems on the strength of long and composite specimens. *J Textile Inst*, 17: 355
- Prandtl L (1904). Über die Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung, Verhandlungen. III Int Math-Kongr, Heideberg, Germany
- Ritter W (1899). Die Bauweise Hennebique. *Schweizerische Bauzeitung Zürich*, 33(7): 59~61
- Sedov LI (1959). Similarity and Dimensional Methods in Mechanics. New York: Acad Press
- Talbot AN (1909). Tests of reinforced concrete beams-resistance to web stresses, Series of 1907 and 1908. Bulletin 29, Univ of Illinois Engineering Experiment Station, 85
- Tippett LHC (1925). Extreme individuals and the range of samples. *Biometrika*, 17: 364
- von Mises R (1936). La distribution de la plus grande de  $n$  valeurs. *Rev Math Union Interbalcanique*, 1: 1
- Weibull W (1939). Phenomenon of rupture in solids. *Proc Royal Swedish Inst of Eng Res (Ingénieursvetenskaps Akad Handl)*, 153: 1~55
- Weibull W (1949). Statistical representation of fatigue failures in solids. *Proc Royal IT*, 27
- Weibull W (1951). Statistical distribution function of wire applicability. *J Appl Mech*, 18
- Weibull W (1956). Basic aspects of fatigue. In: Proc Colloquium on Fatigue Stockholm. Springer-Verlag
- Williams E (1957). Observations of Léonardo, Galileo, Mariotte and others relative to size effects. *Annals of Sci*, 13: 23~29
- Withey MO (1907-08). Tests of plain and reinforced concrete. *Bulletin of the Univ of Wisconsin, Eng Series*, 4(1, 2): 1~66

### 1961~1965

- Assur A (1963). Breakup of Pack-Ice Floes-Ice and Snow: Properties, Processes and Applications. Cambridge, Mass: MIT Press
- Barenblatt GI (1962). Mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture. *Adv Appl Mech*, 7: 55~129
- Biot MA (1965). Mechanics of Incremental Deformations. New York: John Wiley and Sons
- Cottrell AH (1963). Iron and Steel Institute Special Report 69. 281
- Hill R (1962). Acceleration waves in solids. *J Mech Phys Solids*, 10: 1~16
- Hoek E, Bieniawski ZJ (1965). Brittle fracture propagation in rock under compression, *Int J Fracture Mech*, 1: 137~155
- Kaplan MF (1961). Crack propagation and the fracture concrete. *ACI J*, 58(11)
- Kupfer H (1964). Erweiterung der Mörsch-schen Fachwerkanalogie mit Hilfe des Prinzips vom Minimum der Formänderungsarbeit (Generalization of Mörsch's truss analogy using the principle of minimum strain energy), Comite Euro-Int du Beton. Bulletin d'Info, No 40, Paris, 44~57
- Leonhardt F, Walther R (1962). Beiträge zur Behandlung der Schub-probleme in Stahlbetonbau. Beton-und Stahlbetonbau (Berlin) 57(3): 54~64, (6): 141~149. Rheology and Soil Mechanics, Proc IUTAM Symp. Grenoble, Kravtchenko J, Sirieys PM eds. Berlin: Springer Verlag, 58~68
- Mandel J (1964). Conditions de stabilité et postulat de Drucker
- Nakayama J (1965). Direct measurement of fracture energies of brittle heterogeneous material. *J Amer Ceramic Soc*, 48(11)



- Rüsch H, Haugli FR, Mayer H (1962). Schubversuch an Stahlbeton-Rechteckbalken mit gleichmässig verteilter Belastung. *Bulletin*, 145, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Berlin, 4~30
- Rüsch H, Hilsdorf H (1963). Deformation Characteristics of Concrete Under Axial Tension. Voruntersuchungen, Munich, Bericht 44
- Thomas TY (1961). Plastic Flow and Fracture in Solids. New York: Academic Press
- Wells AA (1961). Unstable crack propagation in metals-cleavage and fast fracture. *Symp on Crack Propagation*, Cranfield, 1: 210~230
- Williams ML (1965). Initiation and growth of viscoelastic fracture. *Int J Fracture*, 1: 292~310

#### 1966~1970

- Bahl NS (1968). Über den Einfluss der Balkenhöhe auf Schubtragfähigkeit von Einfeldrigen Stahlbetonbalken mit und ohne Schubbewehrung. Dissertation. Univ Stuttgart, 124
- Bažant ZP (1967). L'instabilité d'un milieu continu et la résistance en compression (Continuum instability and compression strength). *Bulletin*, 35: 99~112
- Bažant ZP (1968). Effect of folding of reinforcing fibers on the elastic moduli and strength of composite materials (in Russian). *Mekhanika Polimerov*, 4: 314~321
- Evans RH, Marathe MS (1968). Microcracking and stress-strain curves for concrete in tension. *Mat Struct*, 1: 61~64
- Freudenthal AM (1968). Statistical approach to brittle fracture. Ch 6 in *Fracture 2*, Liebowitz H ed. Acade Press, 591~619
- Hawkes I, Mellor M (1970). Uniaxial testing in rock mechanics laboratories. *Eng Geol*, 4: 177~285
- Kani GNJ (1967). Basic facts concerning shear failure. *ACI J*, Proc 64 (March 3), 128~141
- Knauss WG (1970). Delayed failure: The Griffith problem for linear viscoelastic material. *Int J Fracture*, 6: 7~20
- Paris P, Erdogan F (1967). Critical analysis of crack propagation laws. *J Basic Eng*, 87: 528~534
- Paul B (1968). Macroscopic criteria for plastic flow and brittle fracture. In: *Fracture, an Advanced Treatise*, Liebowitz H ed. 2, Ch 4
- Tattersall HG, Tappin G (1966). Work of fracture and its measurement in metals, ceramics and other materials. *J Mat Sci*, 1(3): 296~301
- Willis JR (1967). Crack propagation in viscoelastic media. *J Mech Phys Solids*, 15: 229~240

#### 1971

- Cundall PA (1971). Computer model for simulating progressive large scale movements in blocky rock systems. In: *Proc Int Symp on Rock Fracture*, ISRM, Nancy, France
- Kesler CE, Naus DJ, Lott JL (1971). Fracture mechanics: Its applicability to concrete. In: *Proc Int Conf on the Mechanical Behavior of Materials*, Kyoto. Soc of Mat Sci, Vol IV, 1972. 113~124

#### 1972

- Argon AS (1972). Fracture of composites. *Treatise of Materials Science and Technology*, 1: 79, New York: Academic Press
- Cotterell B (1972). Brittle fracture in compression. *Int J Fracture Mech*, 8(2): 195~208
- Taylor HPJ (1972). Shear strength of large beams. *Proc ASCE* 98 (ST11), 2473~2490
- Walsh PF (1972). Fracture of plain concrete. *Indian Concrete J*, 46(11)

#### 1973

- Cotterell B (1972). Brittle fracture in compression. *Int J Fracture Mech*, 8(2): 195~208
- Cruse TA (1973). Tensile strength of notched composites. *J Composite Mat*, 7: 218~228
- Kauss WC (1973). Steady propagation of a crack in a viscoelastic sheet; experiment and analysis. In: Kausch HH ed. *Deformation in Fracture of High Polymers*. New York: Plenum, 501~541
- Nesetova V, Lajtai EZ (1973). Fracture from compressive stress concentration around elastic flaws. *Int J Rock Mech Mining Sci*, 10: 265~284

#### 1974

- Bieniawski ZT (1974). Estimating the strength of rock materials. *J S Afr Inst Min Metal*, 74: 312~320
- Knauss WC (1974). Steady propagation of a crack in a viscoelastic plastic solid. *J Appl Mech*, 41(1): 234~248
- Whitney JM, Nujmer RJ (1974). Stress fracture criteria for laminated composites containing stress concentrations. *J Composite Mat*, 8(July): 253~264
- Wnuk MP (1974). Quasi-static extension of a tensile crack contained in viscoelastic plastic solid. *J Appl Mech*, 41(1): 234~248
- Zaitsev JW, Wittmann FH (1974). Statistical approach to the study of the mechanical behavior of porous materials under multiaxial state of stress. *Proc of the 1973 Symp on Mechanical Behavior on Materials*, Kyoto, Japan, 705

#### 1975

- Nielsen MP, Braestrup NW (1975). Plastic shear strength of reinforced concrete beams. Tech Report 3, Bygningsstatistiske Meddelelser, 46

## 1976

- Bazant ZP (1976). Instability, ductility, and size effect in strain-softening concrete. *J Eng Mech Div*, 102(EM2): 331~344; disc 103: 357~357, 775~777, 104: 501~502
- Hilberborg A, Modeer M, Petersson PE (1976). Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cement Concrete Res*, 6: 773~782
- Thürlimann B (1976). Shear Strength of reinforced and prestressed concrete beams, CEB approach. Tech Report, ETH Zürich, 33
- Walsh PF (1976). Crack initiation in plain concrete. *Magazine Concrete Res*, 28: 37~41

## 1977

- Ingraffea AR (1977). Discrete fracture propagation in rock: Laboratory tests and finite element analysis. [PhD Dissertation]. Univ of Colorado, Boulder
- Leonhardt F (1977). Schub bei Stahlbeton und Spannbeton-Grundlagen der neueren Schubmessung. *Beton- und Stahlbetonbau*, 72(11): 270~277, (12): 295~392 (Figs 24-26)
- Kfoury AP, Rice JR (1977). Elastic-plastic separation energy rate for crack advance in finite growth steps. Fracture 1977. Proc 4th Int Conf on Fracture. ICF4. Waterloo, Taplin DMR ed. Univ of Waterloo, Ontario, Canada, 1. 43~59
- Mihashi H, Izumi M (1977). Stochastic theory for concrete fracture. *Cement Concrete Res*, 7: 411~422
- Zech B, Wittmann FH (1977). Complex study on the reliability assessment of the containment of a PWR. Part II—Probabilistic approach to describe the behavior of materials. In: Jaeger TA, Boley BA eds. Trans 4th Int Conf on Structural Mechanics in Reactor Technology. Brussels, Belgium: European Communities, Vol H.J1/11. 1~14

## 1978

- Bender MC, Orszag SA (1978). Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers. New York: McGraw Hill, (Chs 9~11)
- Collins MP (1978). Towards a rational theory for RC members in shear. *J Struct Div*, 104(Apr): 396~408
- Daniel IM (1978). Strain and failure analysis of graphite-epoxy plate with cracks. *Exp Mech*, 18(July): 246~252
- Kendall K (1978). Complexities of compression failure. *Proc Royal Soc London A*, 361: 245~263
- Schapery RA (1978). Method for predicting crack growth in nonhomogeneous viscoelastic media. *Int J Fracture*, 14: 293~309
- Walraven JC (1978). Influence of depth on the shear strength of lightweight concrete beams without shear reinforcement. Stevin Lab Report No 5-78.4. Delft Univ of Tech

## 1979

- Barenblatt GI (1979). Similarity, self-similarity and intermediate asymptotics. New York, NY: Consultants Bureau
- Bazant ZP, Cedolin L (1979). Blunt crack band propagation in finite element analysis. *J Eng Mech Div Proc*, 105: 297~315
- Bazant ZP, Estenssoro LF (1979). Surface singularity and crack propagation. *Int J Solids Struct*, 15: 405~426 Addendum 16: 479~481
- Cundall PA, Strack ODL (1979). Discrete numerical model for granular assemblies. *Geotech*, 29: 47~65

## 1980

- Bazant ZP, Cedolin L (1980). Fracture mechanics of reinforced concrete. *J Eng Mech Div Proc*, 106: 1257~1306
- Collins MP, Mitchell D (1980). Shear and torsion design of prestressed and non-prestressed concrete beams. *J Prestressed Concrete Inst*, 25(5, Sept-Oct): 32~100; Also, Discussion 26(6, Nov-Dec 1981): 96~118
- Daniel IM (1980). Behavior of graphite-epoxy plates with holes under biaxial loading. *Exp Mech*, 20(1): 1~8
- Marti P (1980). Zur plastischen Berechnung von Stahlbeton. Bericht Nr 104. Inst für Baustatik und Konstruktion. ETH Zürich. 1980

## 1981

- Chana PS (1981). Aspects of modeling the behavior of reinforced concrete under shear loading. Tech Report No 543. Cement and Concrete Assoc, Wexham Springs, 22
- Daniel IM (1981). Biaxial testing of graphite-epoxy laminates with cracks, *ASTM STP*, 734: 109~128
- Fairhurst C, Cornet F (1981). Rock fracture and fragmentation. Proc 22nd US Symp on Rock Mechanics, MIT, June. 21~46
- Selected Papers by Alfred M Freudenthal (1981). ASCE, New York
- Mihashi H, Zaitsev JW (1981). Statistical nature of crack propagation. In: Wittmann FH ed. Section 4-2 in Report to RILEM-TC 50-FMC
- Petersson PE (1981). Crack growth and development of fracture zones in plain concrete and similar materials. Report TVBM-1006. Div of Bldg Mat, Lund IT, Lund, Sweden
- Wittmann FH, Zaitsev YV (1981). Crack propagation and fracture of composite materials such as concrete. In: Proc 5th Int Conf on Fracture (ICF5), Cannes
- Zaitsev YV, Wittmann FH (1981). Simulation of crack propagation and failure of concrete. *Mat Struct*, 14: 357~365

## 1982

- Bažant ZP (1982). Crack band model for fracture of geomaterials. In: Eisenstein Z ed. Proc 4th Int Conf on Numerical Methods in Geomechanics, Edmonton, Alberta, Vol 3. 1137~1152
- Daniel IM (1982). Failure mechanisms and fracture of composite laminates with stress concentrations. In: VIIth Int Conf on Experimental Stress Analysis, Haifa, Israel, Aug 23~27. 1~20
- Hori H and Nemat-Nasser H (1982). Compression-induced nonplanar crack extension with application to splitting, exfoliation and rockburst. *J Geophys Res*, 87: 6806~6821
- Kachanov M (1982). Microcrack model of rock inelasticity-Part I: Frictional sliding on microcracks. *Mech Mat*, 1: 19~41
- Schapery RA (1982). Proc 9th US Natl Congress of Applied Mechanics. ASME, 237~245

## 1983

- Bažant ZP (1983). Fracture in concrete and reinforced concrete. In: Bažant ZP ed. IUTAM Prager Symp on Mechanics of Geomaterials: Rocks, Concretes, Soils. NWU, 281~316
- Bažant ZP, Cedolin L (1983). Finite element modeling of crack band propagation. *J Struct Eng*, 109: 69~92
- Bažant ZP, Oh B-H (1983). Crack band theory for fracture of concrete. *Mat Struct*, 16: 155~177
- Budianski B (1983). Micromechanics. *Comput Struct*, 16(1~4): 3~12
- Hillerborg A (1983). Examples of practical results achieved by means of the fictitious crack model. In: Bažant ZP ed. Prager Symp on Mechanics of Geomaterials: Rocks, Concretes, Soils. NWU, Evanston. 611~614
- Mihashi H (1983). Stochastic Theory for Fracture of Concrete. In: Wittmann FH ed. Fracture Mechanics of Concrete. BV, Amsterdam: Elsevier Science Publ, 301~339

## 1984

- Bažant ZP (1984). Imbricate continuum and its variational derivation. *J Eng Mech*, 110(12): 1693~1712, 1015~1035
- Bažant ZP (1984). Size effect in blunt fracture: Concrete, rock, metal. *J Eng Mech*, 110, 518~535
- Bažant ZP, Belytschko TB, Chang T-P (1984). Continuum model for strain softening. *J Eng Mech*, 110(12): 1666~1692
- Bažant ZP, Kim Jenn-Keun (1984). Size effect in shear failure of longitudinally reinforced beams. *ACI J*, 81: 456~468; *Disc and Closure*, 82 (1985): 579~583
- Bažant ZP, Kim JK, Pfeiffer P (1984). Determination of nonlinear fracture parameters from size effect tests. Preprints NATO Advanced Research Workshop on Application of Fracture mechanics to Cementitious Composites. NWU, Evanston. IL, Shah SP ed. 143~169
- Bažant ZP, Oh Byung H (1984). Rock fracture via strain-softening finite elements. *J Eng Mech*, 110: 1015~1035
- Mandelbrot BB, Passoja DE, Paullay A (1984). Fractal character of fracture surfaces of metals. *Nature*, 308: 721~722
- Marti P (1985). Basic tools of reinforced concrete beam design. *ACI J*, 82(1): 46~56; *Discussion*, 82(6): 933~935
- Schapery RA (1984). Correspondence principles and a generalized  $J$  integral for large deformation and fracture analysis of viscoelastic media. *Int J Fracture*, 25: 195~223
- Steff PS (1984). Crack extension under compressive loading. *Eng Frac Mech*, 20: 463~473

## 1985

- Bažant ZP (1985). Comment on Hillerborg's size effect law and fictitious crack model. In: Cedolin L et al, eds. Dei Poli Anniversary Volume, Politecnico di Milano. Italy, 335~338
- Bažant ZP (1985). Fracture mechanics and strain-softening in concrete. Preprints US-Japan Seminar on Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Structures. Tokyo, Vol 1, 47~69
- Bažant ZP, Belytschko TB (1985). Wave propagation in strain-softening bar: Exact solution. *J Eng Mech*, 111: 381~389
- Bažant ZP, Kim Jenn-Keun (1985). Fracture theory for nonhomogeneous brittle materials with application to ice. In: Bennett LF ed. Proc ASCE Natl Conf on Civil Engineering in the Arctic Offshore ARCTIC 85, San Francisco. New York: ASCE, 917~930
- Daniel IM (1985). Mixed-mode failure of composite laminates with cracks. *Exp Mech*, 25(Dec): 413~420
- Hasegawa T, Shioya T, Okada T (1985). Size effect on splitting tensile strength of concrete. In: Proc 7th Conf of Japan Concrete Inst. 305~312
- Hillerborg A (1985a). Theoretical basis of method to determine the fracture energy  $G_f$  of concrete. *Mat Struct*, 18(106): 291~296
- Hillerborg A (1985b). Results of three comparative test series for determining the fracture energy  $G_f$  of concrete. *Mat Struct*, 18(107)
- Hsu TTC (1985). Softened truss model theory for shear and torsion. *ACI Struct J*, 85(6): 624~635
- Iguro M, Shiyoa T, Nojiri Y, Akiyama H (1985). Experimental studies on shear strength of large reinforced concrete beams under uniformly distributed load, *Concrete Library Int Japan Soc of Civil Eng*, 5: 137~154 (transl 1984 article in Proc JSCE)
- Jeng YS, Shah SP (1985). Two parameter fracture model for concrete. *J Eng Mech*, 111(4): 1227~1241
- Kachanov M (1985). Simple technique of stress analysis in elastic solids with many cracks. *Int J Fracture*, 28: R11~R19
- RILEM Recommendation (1985). Determination of fracture energy of mortar and concrete by means of three-point bend tests of notched beams, RILEM TC 50-FMC. *Mat Struct*, 18(106)

## 1986

- Ashby MF, Hallam SD (1986). Failure of brittle solids containing small cracks under compressive stress states. *Acta Metall*, 34(3): 497~510
- Bazant ZP (1986). Mechanics of distributed cracking. *Appl Mech Rev*, 39(5): 675~705
- Bazant ZP, Cao Z (1986). Size effect in brittle failure of unreinforced pipes. *ACI J*, 83: 365~373
- Bazant ZP, Cao Z (1986). Size effect in shear failure of prestressed concrete beams. *ACI Struct J*, 83: 260~268
- Bazant ZP, Kim Jenn-Keun, Pfeiffer PA (1986). Nonlinear fracture properties from size effect tests. *J Struct Eng*, 112(ST2): 289~307, 195
- Bazant ZP, Pfeiffer PA (1986). Shear fracture tests of concrete. *Mat Struct*, 19: 111~121
- Belytschko TB, Bazant ZP, Hyun YW, Chang T-P (1986). Strain-softening materials and finite element solutions. *Comput Struct*, 23(2): 163~180
- Carpinteri A (1986). Mechanical Damage and Crack Growth in Concrete. Martinus Nijhoff Publ-Kluwer, Dordrecht-Boston
- Horii H, Nemat-Nasser H (1986). Brittle failure in compression, splitting, faulting and brittle-ductile transition. *Phil Trans of Royal Soc London*, 319(1549): 337~374
- Nallathambi P, Karihaloo BL (1986). Determination of specimen-size independent fracture toughness of plain concrete. *Mag of Concrete Res*, 38(135): 67~76
- Sammis C G, Ashby MF (1986). Failure of brittle porous solids under compressive stress state. *Acta Metall*, 34(3): 511~526
- Shetty DK, Rosenfield AR, Duckworth WH (1986). Mixed mode fracture of ceramics in diametrical compression. *J Am Ceramic Soc*, 69(6): 437~443
- van Mier JGM (1986). Multiaxial strain-softening of concrete. *Mat Struct*, 19: 179~200
- Vecchio F, Collins MP (1986). Modified compression field theory for reinforced concrete elements subjected to shear. *ACI J*, 83(2): 219~231
- Zaitsev YV (1986). Inelastic properties of solids with random cracks. In: Bazant ZP ed. Mechanics of Geomaterials, Proc IUTAM Prager Symp, NWU, 1983. John Wiley and Sons, 89~128

## 1987

- Bazant ZP (1987). Fracture energy of heterogeneous material and similitude. Preprints SEM-RILEM Int Conf on Fracture of Concrete and Rock, Houston TX. June 1987, Shah SP and Swartz SE eds. 390~402
- Bazant ZP (1987). Why continuum damage is nonlocal: Justification by quasi-periodic microcrack array. *Mech Res Commun*, 14(5/6): 407~419
- Bazant ZP, Pfeiffer PA (1987). Determination of fracture energy from size effect and brittleness number. *ACI Mat J*, 84: 463~480
- Bazant ZP, Cao Z (1987). Size effect in punching shear failure of slabs. *ACI Struct J*, 84: 44~53
- Bazant ZP, Pijaudier-Cabot G (1987). Modeling of distributed damage by nonlocal continuum with local strains. In: Luxmore AR et al, eds. Numerical Methods in Fracture Mech. Proc 4th Int Conf. San Antonio TX. Swansea, UK: Pineridge Press, 411~431
- Bazant ZP, Pijaudier-Cabot G, Pan J-Y (1987). Ductility, snapback, size effect and redistribution in softening beams and frames. *J Struct Eng*, 113(12): 2348~2364
- Bazant ZP, Sener S (1987). Size effect in torsional failure of concrete beams. *J Struct Eng ASCE*, 113(10): 2125~2136
- Bazant ZP, Sun H-H (1987). Size effect in diagonal shear failure: Influence of aggregate size and stirrups. *ACI Mat J*, 84(4): 259~272
- Belytschko T, Wang X-J, Bazant ZP, Hyun T (1987). Transient solutions for one-dimensional problems with strain-softening. *J Appl Mech*, 54(3): 513~516
- Brown SR (1987). Note on the description of surface roughness using fractal dimension. *Geophys Res Letters*, 14(11): 1095~1098; 15(11): 286
- de Borst R (1987). *Comput Methods Appl Mech and Eng*, 62: 89~110
- Kachanov M (1987). Elastic solids with many cracks: A simple method of analysis. *Int J Solids Struct*, 23: 23~43
- Kemeny JM, Cook NGW (1987). Crack models for the failure of rock under compression. In: Desai CS et al, eds. Proc 2nd Int Conf on Constitutive Laws for Eng Mat, Tucson. New York: Elsevier Science Publ, Vol 2. 879~887
- Murakami Y (1987). Stress Intensity Factors Handbook. Pergamon Press
- Pijaudier-Cabot G, Bazant ZP (1987). Nonlocal damage theory. *J Eng Mech*, 113(10): 1512~1533 t.) 84: 44~53
- Schlaich J, Schafer K, Jannewein M (1987). Toward a consistent design for structural concrete. *PCI J*, 32(3): 75~150
- Xie H (1987). Fractal effect of irregularity of crack branching on the fracture toughness of brittle materials. *Int J Fracture*, 41: 267~274
- Zubelewicz A, Bazant ZP (1987). Interface modeling of fracture in aggregate composites. *J Eng Mech*, 113(11): 1619~1630, 226

## 1988

- Bazant ZP (1988). Softening instability: Part I-Localization into a planar band. *J Appl Mech*, 55: 517~522
- Bazant ZP (1988). Softening instability: Part II-Localization into ellipsoidal regions. *J Appl Mech*, 55: 523~529

- Bažant ZP, Lin Feng-Bao (1988a). Nonlocal smeared cracking model for concrete fracture. *J Struct Eng*, 114(11): 2493~2510
- Bažant ZP, Lin Feng-Bao (1988b). Nonlocal yield limit degradation. *Int J Numer Methods in Eng*, 26: 1805~1823
- Bažant ZP, Pijaudier-Cabot G (1988). Nonlocal continuum damage, localization instability and convergence. *J Appl Mech*, 55: 287~293
- Bažant ZP, Prat PC (1988). Measurement of mode III fracture energy of concrete. *Nucl EngDes*, 106: 1~8
- Bažant ZP, Sener S (1988). Size effect in pull out test. *ACI Mat J*, 85: 347~351
- Bažant ZP, Sener S, Prat PC (1988). Size effect tests of torsional failure of plain and reinforced concrete beams. *Mat Struct*, 21: 425~430
- Hsu TTC (1988). Softened truss model theory for shear and torsion. *ACI Struct J*, 85(6): 624~635
- Kittl P, Diaz G (1988). Weibull's fracture statistics, or probabilistic strength of materials: state of the art. *Res Mechanics*, 24: 99~207
- Mecholsky JJ, Mackin TJ (1988). Fractal analysis of fracture in ocala chert. *J Mat Sci Letters*, 7: 1145~1147
- Planas J, Elices M (1988). Conceptual and experimental problems in the determination of the fracture energy of concrete. In: Proc Int Workshop on Fracture Toughness and Fracture Energy. Test Methods for Concrete and Rock. Tohoku Univ Sendai. Japan, 203~212
- Planas J, Elices M (1988). Size-effect in concrete structures: Mathematical approximation and experimental validation. In: Mazars J, Bažant ZP eds. Cracking and Damage, Strain Localization and Size Effect. Proc of France-US Workshop. Cachan France, 462~476
- Pijaudier-Cabot G, Bažant ZP (1988). Dynamic stability analysis with nonlocal damage. *Comput Struct*, 29(3): 503~507
- Pijaudier-Cabot G, Bažant ZP, Tabbara M (1988). Comparison of various models for strain-softening. *Eng Comput*, 5 (June): 141~150
- Rots JG (1988). Computational modeling of concrete structures. [PhD Thesis]. Netherlands: Delft Univ of Tech
- Sanderson TJO (1990). Ice Mechanics, Graham and Trotman. London
- 1989**
- Bažant ZP (1989). Identification of strain-softening constitutive relation from uniaxial tests by series coupling model for localization. *Coment Concrete Res*, 19(6): 973~977
- Bažant ZP, Pijaudier-Cabot G (1989). Measurement of characteristic length of nonlocal continuum. *J Eng Mech*, 115(4): 755~767
- Cahn R (1989). Fractal dimension and fracture. *Nature*, 338(Mar): 201~202
- Carpinteri A (1989). Decrease of apparent tensile and bending strength with specimen size: Two different explanations based on fracture mechanics. *Int J Solids Struct*, 25(4): 407~429
- Chen CT, Runt J (1989). Fractal analysis of polystyrene fracture surfaces. *Polymer Commun*, 30(Nov): 334~335
- Droz P, Bažant ZP (1989). Nonlocal analysis of stable states and stable paths of propagation of damage shear bands. In: Mazars J, Bažant ZP eds. Cracking and Damage. Proc of France-US Workshop, Cachan, France, 1988. London: Elsevier. 183~207
- Elices M, Planas J (1989). In: Elfgren L ed. Material Models, Chapter 3 in Fracture Mechanics of Concrete Structure. London: Chapman and Hall, 16~66
- Haimson BC, Herrick CG (1989). In-situ stress calculation from borehole breakout experimental studies. In: Proc 26th US Symp on Rock Mech. 1207~1218
- Hornbogen E (1989). Fractals in microstructure of metals. *Int Mat Rev*, 6: 277~296
- Kittl P, Diaz G (1989). Engineering applications of the probabilistic strength of materials. *Appl Mech Rev*, 42(11): 108~112
- Knauss WG (1989). Advances in Fracture Research 4. 7th Int Conf on Fracture. Houston TX. 2683~2711
- Marti P (1989). Size effect in double-punch tests on concrete cylinders. *ACI Mat J*, 86(6): 597~601
- Planas J, Elices M (1989). Conceptual and experimental problems in the determination of the fracture energy of concrete. In: Mihashi et al, eds. Fracture Toughness and Fracture Energy, Proc RILEM Int Workshop 1988. Tohoku Univ Sendai, Japan. Balkema, Rotterdam. 165~181
- Planas J, Elices M (1989). Cracking and Damage. Mazars J, Bažant ZP eds. London: Elsevier. 462~476
- Planas J, Elices M, Toribio J (1989). Approximation of cohesive crack models by R-CTOD curves. In: Shah SP, Swartz SE, Barr B eds. Fracture of Concrete and Rock: Recent Developments, Int Conf held at Cardiff, UK. London: Elsevier. 203~212
- Planas J, Elices M, Toribio J (1989). Fracture of Concrete and Rock: Recent Developments. Shah SP, Swartz S, Barr BIG eds. London: Elsevier Appl Sci. 203~212
- Shioya T, Iguro M, Nojiri Y, Akiyama H, Okada T (1989). Shear strength of large reinforced concrete beams. In: Fracture Mechanics: Application to Concrete, SP-118. Detroit: Am Concrete Inst. 25~279
- Xi Yunping, Bažant ZP (1989). Sampling analysis of concrete structures for creep and shrinkage with correlated random material parameters. *Probabilistic Eng Mech*, 4(4): 174~186
- Xie H (1989). Studies on fractal models of microfractures of marble. *Chinese Sci Bull*, 34: 1292~1296
- 1990**
- Bažant ZP (1990). Equilibrium path bifurcation due to strain-softening localization in ellipsoidal region. *J Appl Mech*, 57(4): 810~814

- Bažant ZP, Kazemi MT (1990). Determination of fracture energy, process zone length and brittleness number from size effect, with application to rock and concrete. *Int J Fracture*, 44: 111~131
- Bažant ZP, Kazemi MT (1990). Size effect in fracture of ceramics and its use to determine fracture energy and effective process zone length. *J Am Ceramic Soc*, 73(7): 1841~1853
- Bažant ZP, Ožbolt J (1990). Nonlocal microplane model for fracture, damage, and size effect in structures. *J Eng Mech*, 116: 2484~2504
- Bažant ZP, Prat RC, Tabbara MR (1990). Antiplane shear fracture tests (Mode III). *ACI Mat J*, 87(Jan-Feb): 12~19
- Bažant ZP, Tabbara MR, Kazemi MT, Pijaudier-Cabot G (1990). Random particle model for fracture of aggregate or fiber composites. *J Eng Mech*, 116(8): 1686~1705
- Bhat SU (1990). Modeling of size effect in ice mechanics using fractal concepts. *J Offshore Mech Arctic Eng*, 112: 370~376
- Bouchaud E, Lapasset G, Planes J (1990). Fractal dimension of fracture surfaces: a universal value? *Europhys Lett*, 13(1): 73~79
- Chelidze T, Gueguen Y (1990). Evidence of fractal fracture. *Int J Rock Mech Mining Sci*, 27(3): 223~225
- Gettu R, Bažant ZP, Karr ME (1990). Fracture properties and brittleness of high-strength concrete. *ACI Mat J*, 87(Nov-Dec): 608~618
- Hermann H, Roux S (1990). Statistical Models for the Fracture of Disordered Media. Amsterdam: N Holland, Amsterdam (Ch5)
- Jishan X, Xixi H (1990). Size effect on the strength of a concrete member. *Eng Fracture Mech*, 35: 687~696
- Kittl P, Diaz G (1990). Size effect on fracture strength in the probabilistic strength of materials. *Reliab Eng syst Safety*, 28: 9~21
- Lemaitre J, Chaboche J-L (1990). Mechanics of solid materials. Cambridge, UK: Cambridge Univ Press
- Peng G, Tian D (1990). Fractal nature of a fracture surface. *J Phys A: Mat and General*, 23: 3257~3261
- RILEM Recommendation (1990). Size effect method for determining fracture energy and process zone of concrete. *Mat Structs*, 23: 461~465
- Saouma VC, Barton C, Gamal-el-Din N (1990). Fractal characterization of concrete crack surfaces. *Eng Fracture Mech*, 35(1)
- Schulson EM (1990). Brittle compressive failure of ice. *Acta Metal Mat*, 38: 1963~1976
- Slepyan LI (1990). Modeling of fracture of sheet ice. *Izvestia AN SSSR, Mekh Tverd Tela*, 25(2): 151~157
- 1991**
- Bažant ZP ed. (1991). Fracture Mechanics of Concrete Structures: Part I. Proc First Int Conf on Fracture Mech of Concrete Structures (FraMCoS-1), Breckenridge, Colorado. London: Elsevier
- Bažant ZP (1991). Why continuum damage is nonlocal: Micromechanics arguments. *J Eng Mech*, 117(5): 1070~1087
- Bažant ZP, Cedolin L (1991). Stability of Structures: Elastic, Inelastic, Fracture and Damage Theories. New York: Oxford Univ Press, 1991. (984+xxvi)
- Bažant ZP, Gettu R, Kazemi MT (1991). Identification of nonlinear fracture properties from size-effect tests and structural analysis based on geometry-dependent R-curves. *Int J Rock Mech Mining Sci*, 28(1): 43~51
- Bažant ZP, Kazemi MT (1991). Size dependence of concrete fracture energy determined by RILEM work-of-fracture method. *Int J Fracture*, 51: 121~138
- Bažant ZP, Kazemi MT (1991). Size effect on diagonal shear failure of beams without stirrups. *ACI Struct J*, 88(3): 268~276
- Bažant ZP, Kazemi MT, Hasegawa T, Mazars J (1991). Size effect in Brazilian split-cylinder tests: measurement and fracture analysis. *ACI Mat J*, 88(3): 325~332
- Bažant ZP, Kim Joong-Koo (1991). Consequences of diffusion theory for shrinkage of concrete. *Mat Structs*, 24(143): 323~326
- Bažant ZP, Xu K (1991). Size effect in fatigue fracture of concrete. *ACI Mat J*, 88(4): 390~399
- Bažant ZP, Xi Y (1991). Statistical size effect in quasi-brittle structures: II-Nonlocal theory. *J Eng Mech*, 117(11): 2623~2640
- Bažant ZP, Xi Y, Reid SG (1991). Statistical size effect in quasi-brittle structures: I-Is Weibull theory applicable? *J Eng Mech*, 117(11): 2609~2622
- Collins MP, Mitchell D (1991). Prestressed Concrete Structures. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 766
- Costin DM (1991). Damage Mechanisms in the post-failure regime. *Mech Mat*, 4: 149~160
- Hinch (1991). Perturbation Methods. Cambridge, UK: Cambridge Univ Press
- Hu XZ, Wittmann FH (1991). Analytical method to determine the bridging stress transferred within the fracture process zone: I—General theory. *Cement and Concrete Res*, 21: 1118~1128
- Karihaloo BL, Nallathambi P (1991). Notched beam tests: Mode I Fracture Toughness. In: Shah SP, Carpinteri A eds. Fracture Mechanics Test Methods for Concrete. London: Chapman and Hall, 1~86
- Kemeny JM, Cook NGW (1991). Micromechanics of deformation in rock. In: Shah SP et al, eds. Toughening Mechanisms in Quasibrittle Material. Kluwer, Netherlands, 155~188
- Long QY, Suquin L, Long CW (1991). Studies of fractal dimension of a fracture surface formed by slow stable crack propagation. *J Phys*, 24(4)
- Mihashi H, Nomura N, Izumi M, Wittmann FH (1991). Size dependence of fracture energy of concrete. In: van Mier, Rots and Bakker eds. Fracture Processes in Concrete, Rocks and Ceramics. 441~450

- Ouyang C, Shah SP (1991). Geometry-dependent R-curve for quasi-brittle materials. *J Am Ceramic Soc*, 74: 2831~2836
- Palmer AC, Sanderson JO (1991). Fractal crushing of ice and brittle solids. *Proc Royal Soc London*, 433: 469~477
- Petersson PE (1991). Crack growth and development of fracture zones in plain concrete and similar materials (Report TVBM-106), Div of Building Materials, Lund IT, Lund, Sweden
- Reineck K-H (1991). Model for structural concrete members without transverse reinforcement. Proc IABSE Colloquium on Structural Concrete, Stuttgart IABSE Rep Vol 62: 643~648
- 1992**
- ACI Committee 446 (1992). State-of-art-report on fracture mechanics of concrete: concepts, model and determination of materials properties. In: Bažant ZP ed. *Fracture Mechanics of Concrete Structures*. London, New York: Elsevier Appl Sci. 4~144
- ACI Committee 446 on Fracture Mechanics (1992). (Bažant ZP princ author and Chair). Fracture mechanics of concrete: concepts, models and determination of material properties. In: Bažant ZP ed. *Fracture Mechanics of Concrete Structures*, Proc FraMCoSI-Int Conf on Fracture Mechanics of Concrete Structures. Breckenridge, Colorado. June. London: Elsevier Appl Sci. 1~140
- Bao G, Ho S, Suo Z, Fan B (1992). Role of material orthotropy in fracture specimens for composites. *Int J Solid Struct*, 29(9): 1105~1116
- Bažant ZP ed. (1992a). *Fracture Mechanics of Concrete Structures*, Proc First Intern Conf (FraMCoS-I). Breckenridge, Colorado. June 1~5. London: Elsevier (1992)
- Bažant ZP (1992b). Large-scale fracture of sea ice plates. In: Hruday TM ed. Proc 11th IAHR Ice Symp. Banff, Alberta. June. Edmonton: Dept of Civil Eng, Univ of Alberta, Vol 2. 991~1005
- Bažant ZP (1992c). Large-scale thermal bending fracture of sea ice plates. *J Geophys Res*, 97(C11): 17739~17751
- Bažant ZP, Gettu R (1992). Rate effects and load relaxation: Static fracture of concrete. *ACI Mat J*, 89(5): 456~468
- Borodich F (1992). Fracture energy of fractal crack, propagation in concrete and rock (in Russian). *Doklady Akademii Nauk*, 325(6): 1138~1141
- Carter BC (1992). Size and stress gradient effects on fracture around cavities. *Rock Mech and Rock Eng*, 25(3): 167~186
- Carter BC, Lajtai EZ, Yuan Y (1992). Tensile fracture from circular cavities loaded in compression. *Int J Fracture*, 57: 211~236
- Elices M, Guinea GV, Planas J (1992). Measurement of the fracture energy using three-point bend tests: Part 3—Influence of cutting the  $P - \delta$  tail. *Mat Structs*, 25: 327~334
- Guinea GV, Planas J, Elices M (1992). Measurement of the fracture energy using three-point bend tests: Part I—Influence of experimental procedures. *Mat Structs*, 25: 212~218
- He S, Plesha ME, Rowlands RE, Bažant ZP (1992). Fracture energy tests of dam concrete with rate and size effects. *Dam Eng*, 3(2): 139~159
- Hu XZ, Wittmann FH (1992). Analytical method to determine the bridging stress transferred within the fracture process zone: I—Application to mortar. *Cement and Concrete Res*, 21: 559~570
- Issa MA, Hammad AM, Chudnovsky A (1992). Fracture surface characterization of concrete. Proc 9th ASCE Conf on Eng Mech. New York: ASCE
- Jackson KE, Kellas S, Morton J (1992). Scale effects in the response and failure of fiber reinforced composite laminates loaded in tension and in flexure. *J Composite Mat*, 26(18): 2674~2705
- Måløy K, Hansen A, Hinrichsen E, Roux S (1992). Experimental measurement of the roughness of brittle cracks. *Phys Rev Letters*, 68(2): 213~215
- Mosolov AB, Borodich FM (1992). Fractal fracture of brittle bodies under compression (in Russian). *Doklady Akademii Nauk*, 324(3): 546~549
- Ožbolt J, Bažant ZP (1992). Microplane model for cyclic triaxial behavior of concrete. *J Eng Mech*, 118(7): 1365~1386
- Planas J, Elices M, Guinea GV (1992). Measurement of the fracture energy using three-point bend tests: Part 2—Influence of bulk energy dissipation. *Mat Structs*, 25: 305~312
- Rice JR, Levy N (1992). Part-through surface crack in an elastic plate. *J Appl Mech*, 39: 185~194
- Tvergaard T, Hutchinson JW (1992). Relation between crack growth resistance and fracture process parameters in elastic-plastic solids. *J Physics Mech Solids*, 40: 1377~1397
- Schlagen E, van Mier JGM (1992). Experimental and numerical analysis of micromechanisms of fracture of cement-based composites. *Cement and concrete Composites*, 14: 105~118
- Sluys LJ (1992). Wave propagation, localization and dispersion in softening solids. [PhD Dissertation]. Delft Univ of Tech, Netherlands
- Tvergaard V, Needleman AJ (1992). Effect of crack meandering on dynamic ductile fracture. *J Mech Physics Solids*, 40: 447~471
- Wisnom MR (1992). Relationship between tensile and flexural strength of unidirectional composite. *J Composite Mat*, 26(8): 1173~1180
- 1993**
- Batto Ra, Schulson Em (1993). Ductile-to-brittle transition in ice under compression. *Acta Metall Mat*, 41(7): 2219~2225
- Bažant ZP (1993). Scaling Laws in Mechanics of Failure. *J Eng Mech*, 119(9): 1828~1844

- Bažant ZP, Bai S-P, Gettu R (1993). Fracture of rock: Effect to loading rate. *Eng Fracture Mech*, 45(3): 393~398
- Bažant ZP, Jirásek M (1993). R-curve modeling of rate and size effects in quasibrittle fracture. *Int J Fracture*, 62: 355~373
- Bažant ZP, Lin F-B, Lippmann H (1993). Fracture energy release and size effect in borehole breakout. *Int J Numer Anal Methods Geomech*, 17: 1~14
- Bažant ZP, Schell WF (1993). Fatigue fracture of high-strength concrete and size effect. *ACI Mat J*, 90(5): 472~478
- Daniel IM, Hsiao H-M, Wooh SC, Vittoser J (1993). Processing and compressive behavior of thick composites. In: Rajapakse YDS ed. *Mechanics of Thick Composites*, AMD, 162, ASME. June. 107~126
- Dempsey JP, Bažant ZP, Rajapakse YDS, Sunder S Shyam eds. (1993). *Ice Mechanics 1993*, Proc of Symp as part of ASCE-ASME-SES Joint Mechanics Meeting, Charlottesville VA, AMD Vol 163. New York: ASME, 1993
- Hsu TTC (1993). *Unified Theory of Reinforced Concrete*. CRC Press
- Kim JK, Park YD, Eo SH (1993). Size effect in concrete specimens with dissimilar initial cracks. In: Mihashi H, Okamura H, Bažant ZP eds. *Size effect in concrete structure: Proc Japan Concrete Institute Int Workshop*, Sedai. 181~192 (also *ACI Mat J*)
- Lange DA, Jennings HM, Shah SP (1993). Relationship between fracture surface roughness and fracture behavior of cement paste and mortar. *J Am Ceramic Soc*, 76(3): 589~597
- Mihashi H, Okamura H, Bažant ZP eds. (1994). *Size effect in concrete structures*. In: Proc Japan Concrete Inst Int Workshop, Sendai, Japan, Oct 31~Nov 2, 1995. London-New York: E&FN Spon
- Planas J, Elices M, Guinea GV (1993). Cohesive cracks vs nonlocal models: Closing the gap. *Int J Fracture*, 63(2): 173~187
- van Mier JGM, Schlangen E (1993). Experimental and numerical study of mode I (tensile) and mode II (shear) fracture in concrete. *J Mech Behavior of Mat*, 4: 179~190
- Xie H (1993). *Fractals in Rock Mechanics*. Balkema, Rotterdam
- Yuan YY, Lajtai EZ, Ayari ML (1993). Fracture nucleation from a compression-parallel finite-width elliptical flaw. *Int J Rock Mech Mining Sci*, 30(7): 873~876

#### 1994

- Bažant ZP (1994a). Discussion of Fracture mechanics and size effect of concrete in tension, by Tang T, Shah SP, and Ouyang C. *J Struct Eng*, 120(8): 2555~2558
- Bažant ZP (1994). Is size effect caused by fractal nature of crack surfaces? Report No 94-10/402i, Dept of Civil Eng, NWU, Evanston IL
- Bažant ZP (1994). Nonlocal damage theory based on micromechanics of crack interactions. *J Eng Mech*, 120(3): 593~617; *Addendum and Errata*, 120: 1401~02
- Bažant ZP, Bittnar Z, Jirásek M, Mazars J eds. (1994). *Fracture and damage in quasibrittle structures: Experiment, theory and computer modeling*. Proc Europe-US Workshop, Czech Tech Univ, Prague, Sept 21~23, 1994. London-New York: E&FN Spon. (647+xiv)
- Bažant ZP, Desmorat R (1994). Size effect in fiber of bar pullout with interface softening slip. *J Eng Mech*, 120(9): 1945~1962
- Bažant ZP, Huet C, Müller HS (1994). Comment on recent analysis of concrete creep linearity and applicability of principle of superposition. *Mat Structs*, 27: 359~361
- Bažant ZP, Jirásek M (1994). Damage nonlocality due to microcrack interactions: statistical determination of crack influence function. In: Bažant, ZP, Bittnar Z, Jirásek M, Mazars J eds. *Fracture and Damage in Quasibrittle Structures: Experiment, Theory and computer Modeling*, Proc Europe-US Workshop, Czech Tech Univ, Prague, Sept 21~23, 1994. London-New York: E&FN Spon. 3~17
- Bažant ZP, Jirásek M (1994). Nonlocal model based on crack interactions: A localization study. *J Eng Mat Tech*, 116(July): 256~259
- Bažant ZP, Kwon YW (1994). Failure of slender and stocky reinforced concrete columns: Tests of size effect. *Mat Structs*, 27: 79~90
- Bažant ZP, Li Y-N (1994). Cohesive crack model for geomaterials: Stability analysis and rate effect. In: Kobayashi AS ed. Proc 12th US Natl Congress of Appl Mech, Mechanics USA 1994. Seattle WA, Appl Mech Revs, 47(6,Pt2), June. S91~S96
- Bažant ZP, Li Y-N (1994). Penetration fracture of sea ice plate: Simplified analysis and size effect. *J Eng Mech*, 120(6): 1304~1321
- Bažant ZP, Ožbolt J, Eligehausen R (1994). Fracture size effect: review of evidence for concrete structures. *J Struct Eng*, 120(8): 2377~2398
- Bažant ZP, Xiang Y (1994). Compression failure of quasibrittle materials and size effect. In: Allen DH, Ju JW eds. AMD-Vol 185, *Damage Mechanics in Composites* (ASME Winter Annual Meeting, Chicago, Nov 1994). 143~148
- Bažant ZP, Vitek JL (1994). Stud connectors in composite beams: simplified failure modeling and size effect. In: Bažant ZP, Bittnar Z, Jirásek M, Mazars J eds. *Fracture and Damage in Quasibrittle Structures: Experiment, Theory and Computer Modeling*, Proc Europe-US Workshop. Czech Tech Univ Prague, Sept 21~23, 1994. London-New York: E&FN Spon. 333~341
- Budianski B, Fleck NA (1994). Compressive kinking of fiber composites: A topical review. *Appl Mech Rev*, 47(6)
- Carpinteri A (1994). Fractal nature of material microstructure and size effects on apparent mechanical properties. *Mech Mat*, 18: 89~101
- Carpinteri A (1994). Scaling laws and renormalization groups for the strength and toughness of disordered materials. *Int J Solids Structs*, 31, 291~302



- Carpinteri A, Chiaia B, Ferro G (1994). Multifractal scaling law for the nominal strength variation of concrete, structures. In: Mihashi M, Okamura H, Bažant ZP eds. Size effect in concrete structures. Proc Japan Concrete Inst Int Workshop, Sendai, Japan, 1993. London-New York: E&FN Spon, 1994. 193~206
- Carpinteri A, Ferro G (1994). Size effect on tensile fracture properties: a unified explanation based on disorder and fractality of concrete microstructure. *Mat Struct*, 27: 563~571
- Cervenka V, Pukl R (1994). SBETA analysis of size effect in concrete structure. In: Mihashi H, Okamura H, Bažant ZP eds. Size Effect in concrete Structure, London: E&NF Spon. 323~333
- Guinea GV, Planas J, Elices M (1994). *Mat Struct*, 27: 99~105 (also summaries in Proc IUTAM Symp, Brisbane, 1993 and Torino, 1994)
- Jirásek M, Bažant ZP (1994). Localization analysis of nonlocal model based on crack interactions. *J Eng Mech*, 120(3): 1521~1542
- Li Y-N, Bažant ZP (1994). Eigenvalue analysis of size effect for cohesive crack model. *Int J Fracture*, 66: 213~226
- Li Y-N, Bažant ZP (1994). Penetration fracture of sea ice plate: 2D analysis and size effect. *J Eng Mech*, 120(7): 1481~1498
- Mihashi H, Okamura H, Bažant ZP eds. (1994). Size effect in concrete structures. In: Proc Japan Concrete Inst Int Workshop, Sendai, Japan. Oct 31~Nov 2, 1995. London-New York: E&FN Spon. (556+xiv pages)
- Okamura H, Mackawa K (1994). Experimental study of size effect in concrete structures. In: Mihashi H, Okamura H, and Bažant ZP, eds. Size Effect in Concrete Structures, Proc of JCI Int Workshop, Sendai, Japan. 1993. London: E&FN Spon. 3~24
- Petroski H (1994). Design Paradigms: Case Histories of Error and Judgment in Engineering. Cambridge, UK: Cambridge Univ Press
- Planas J, Guinea GV, Elices M (1994). Determination of the fracture parameters of Bažant and Jenq-Shah based on simple tests. Report to ACI-SEM Joint Task Group on Fracture Testing of Concrete. Univ Politecnica de Madrid (June)
- Saouma VC, Bartin CC (1994). Fractals, fracture and size effect in concrete. *J Eng Mech*, 120(4): 835~854
- Shioya Y, Akiyama H (1994). Application to design of size effect in reinforced concrete structures. In: Mihashi H, Okamura H, Bažant ZP eds. Size Effect in Concrete Structures, Proc of Int Workshop, Sendai, 1993. London: E&FN Spon. 409~416
- Tvergaard T, Hutchinson JW (1994). Effect to T-stress on Mode I crack growth resistance in a ductile solid. *Int J Solids Struct*, 31: 823~833
- Walraven J, Lehwalter (1994). Size effects in short beams loaded in shear. *ACI Struct J*, 91(5): 585~593
- Xie H, Sanderson DJ, Peacock DCP (1994). Fractal model and energy dissipation for en echelon fractures. *Eng Fracture Mech*, 48(5): 662~665
- 1995**
- Barr BIG ed. (1995). Proc NSF Workshop on Standards for Measurement of Mode I Fracture Properties of Concrete. Cardiff UK: Univ of Wales
- Bažant ZP (1995). Creep and Damage in Concrete, Materials Science of Concrete IV. Skalny J, Mindess S eds. Westerville OH: Am Ceramic Soc. 355~389
- Bažant ZP (1995). Scaling theories for quasibrittle fracture: Recent advances and new directions. In: Zürich, Wittmann FH ed. Fracture Mechanics of Concrete Structures. Proc 2nd Int Conf on Fracture Mech of Concrete and Concrete Structures (FramCoS-2), at ETH, Freiburg, Germany: Aedificatio Publ. 515~534
- Bažant ZP (1995). Scaling of quasibrittle fracture and the fractal question. *J Mat Tech*, 117(Oct): 361~367 (Mat Div Special 75th Anniversary Issue)
- Bažant ZP, Gu Wei-hwa, Faber KT (1995). Softening reversal and other effects of a change in loading rate on fracture of concrete. *ACI Mat J*, 92: 3~9
- Bažant ZP, Kim J-J, Li Y-N (1995). Part-through bending cracks in sea ice plates: Mathematical modeling. In: Dempsey JP, Rajapakse Y eds. AMD-Vol 207, Ice Mechanics (ASME Summer Meeting, Los Angeles CA, June). 97~105
- Bažant ZP, Li Y-N (1995). Cohesive crack model with rate-dependent crack opening and viscoelasticity. Theory, Report, NWU; also submitted to *Int J Fracture*
- Bažant ZP, Li Y-N (1995). Penetration Fracture of Sea Ice Plate. *Int J Solids Struct*, 32(3/4): 303~313
- Bažant ZP, Li Yuan-Neng (1995). Stability of cohesive crack model: Part I—Energy principles. *J Appl Mech*, 62(Dec): 959~964
- Bažant ZP, Li Yuan-Neng (1995). Stability of cohesive crack model: Part II—Eigenvalue analysis of size effect on strength and ductility of structures. *J Appl Mech*, 62(Dec): 965~969
- Bažant ZP, Li Z (1995). Modulus of rupture: size effect due to fracture initiation in boundary layer. *J Struct Eng*, 121(4): 739~746
- Bažant ZP, Li Z, Thoma M (1995). Identification of stress-slip law for bar or fiber pullout by size effect tests. *J Eng Mech*, 121(5): 620~625
- Li Y-N, Bažant ZP (1995). Cohesive crack model with rate-dependent crack opening and viscoelasticity: Numerical method and behavior. Report, NWU; also submitted to *Int J Fracture*
- Carpinteri A, Chiaia B (1995). Fracture Mechanics of Concrete Structures. In: Wittmann FH ed. Proc of FramCoS-2, at ETH, Zürich. Freiburg: Aedificatio Publ, 581~596
- Carpinteri A, Chiaia B, Ferro G (1995). Size effects on nominal tensile strength of concrete structure: multifractality of material ligaments and dimensional transition from order to disorder. *Mat Struct*, 28(7): 311~317

- Carpinteri A, Ferro G, Intervenizzi S (1995). Fracture mechanics of concrete structures. In: Wittmann FH ed. Proc of FraMCoS-2, at ETH, Zürich. Freiburg, Germany: Aedificatio Publ. 557~570
- Dempsey JP, Adamson RM, Mulmule SV (1995). Large-scale in-situ fracture of ice, Vol 1. In: Wittmann FH ed. Proc 2nd Int Conf on Fracture Mech of Concrete Structures (FraMCoS-2), ETH, Zürich. Freiburg, Germany: Aedificatio Publ. (1995) 575~684
- Feng N-Q, Ji X-H, Zhuang Q-F, Ding J-T (1995). Fractal study of the size effect of concrete fracture energy. In: Wittmann FH ed. Fracture Mechanics of Concrete Structures, Vol 1. Proc 2nd Int Conf on Fracture Mech of Concrete Structures (FraMCoS-2), ETH, Zürich. Freiburg, Germany: Aedificatio Publ. 597~606
- Jirásek M, Bažant ZP (1995a). Macroscopic fracture characteristics of random particle systems. *Int J Fracture*, 69(3): 201~228
- Jirásek M, Bažant ZP (1995b). Particle model for quasibrittle fracture and application to sea ice. *J Eng Mech*, 121(9): 1016~1025
- Kyriakides S, Ascerulatne R, Perry EJ, Liechti KM (1995). Compressive failure of fiber reinforced composites. *Int J Solids Structs*, 32(6/7): 689~738
- Li Y-N, Hong AN, Bažant ZP (1995). Initiation of parallel cracks from surface of elastic half-plane. *Int J Fracture*, 69: 357~369
- Mulmule SV, Dempsey JP, Adamson RM (1995). Large-scale in-situ ice fracture experiments-Part II: Modeling efforts. In: Ice Mechanics-1995 ASME Joint Applied Mechanics and Materials Summer Conf, UCLA, June, AMD-MD '95. New York: ASME
- Rosen BW (1965). Mechanics of composite strengthening. Fiber Composite Materials, Am Soc for Metals Seminar, Ch3
- Schulson EM, Nickolayev OY (1995). Failure of columnar saline ice under biaxial compression: failure envelopes and the brittle-to-ductile transition. *J Geophys Res*, 100(B11): 22 383~22 400
- Walraven J (1995). Size effects: their nature and their recognition in building codes. *Studi e Ricerche*, 16: 113~134
- Wittmann FH ed. (1995). Fracture Mechanics of Concrete Structures. In: Proc 2nd Int Conf on Fracture Mech of Concrete and Concrete Structures (FraMCoS-2), ETH, Zürich. Freiburg, Germany: Aedificatio Publ. 515~534
- Xie H, Sanderson DJ (1995). Fractal effect of crack propagation on dynamic stress intensity factors and crack velocities. *Int J Fracture*, 74: 29~42

#### 1996

- Bažant ZP (1996). Can scaling of structural failure be explained by fractal nature of cohesive fracture? In: Carpinteri A ed. Appendix to a paper by Bažant and Li in Size-Scale Effects in the Failure Mechanisms of Materials and Structures. Proc IUTAM Symp at Politecnico di Torino, Italy, Oct 1994. London: E&FN Spon. 284~289
- Bažant ZP (1996). Fracturing truss model: explanation of size effect mechanism in shear failure of reinforced concrete. Report 96-3/603f, Dept of Civil Eng, NWU. March 1996; also submitted to *J Eng Mech*
- Bažant ZP (1996). Is no-tension design of concrete or rock structures always safe?—Fracture analysis, *J Struct Eng*, 122(1): 2~10
- Bažant ZP (1996). Size effect aspects of measurement of fracture characteristic of quasibrittle material. *Adv Cement-Based Mat*, 4(3/4): 128~137
- Bažant ZP, Daniel IM, Li Zhengzhi (1996). Size effect and fracture characteristics of composite laminates. *J Eng Mat Tech*, 118(3): 317~324
- Bažant ZP, Kaplan MF (1996). Concrete at High Temperatures: Material Properties and Mathematical Models (monograph and reference volume). London: Longman (Addison-Wesley), 1996. (412+xii)
- Bažant ZP, Li Y-N (1996). Scaling of cohesive fracture (with ramification to fractal cracks). In: Carpinteri A ed. Size-Scale Effects in the Failure Mechanisms of Materials and Structures, Proc IUTAM Symp, at Politecnico di Torino, 1994. London: E&FN Spon. 274~289
- Bažant ZP, Li Zhengzhi (1996). Zero-brittleness size-effect method for one-size fracture test of concrete. *J Eng Mech*, 122(5): 458~468; 398~478
- Bažant ZP, Xiang Y (1996). Size effect in compression fracture: Splitting crack band propagation. *J Eng Mech*, 122: in press
- Bažant ZP, Xiang Y, Prat PC (1996). Microplane model for concrete-I: Stress-strain boundaries and finite strain. *J Eng Mech*, 122(3): 245~254
- Bažant ZP, Xiang Y, Adley MD, Prat PC, Akers SA (1996). Microplane model for concrete-II: Data delocalization and verification. *J Eng Mech*, 122(3): 255~262
- Collins MP, Mitchell D, Adebar P, Vecchio FJ (1996). General shear design method. *ACI Struct J*, 93(1): 36~45
- Hsu TTC, Zhang L-X (1996). Tension stiffening in reinforced concrete membrane elements. *ACI Struct J*, 93(1): 108~115
- Jirásek J (1996). Comparison of nonlocal models, orally presented at the 33rd Annual Meeting of Soc of Eng Science. Tempe AZ
- Lehner F, Kachanov M (1996). Modeling of winged cracks forming under compression. *Int J Fracture*, 77(4): R69~R75
- Nixon WA (1996). Wing crack models of the brittle compressive failure of ice. *Cold Regions Sci Tech*, 24: 41~45
- Ožbolt J, Bažant ZP (1996). Numerical smeared fracture analysis: Nonlocal microcrack interaction approach. *Int J Numer Methods Eng*, 39: 635~661

Size effect aspects of measurement of fracture characteristics of quasibrittle materials. In: Wittmann FH ed. Fracture Mechanics of Concrete Structures, Vol 3. Proc 2nd Int Conf on Fracture Mech of Concrete Structures (FraMCoS-2), ETH, Zürich. Freiburg, Germany: Aedificatio Publ, 1996. 1749~1772; to be reprinted in J Adv Cement-Based Mat

#### 1997

Bažant ZP (1997a). Scaling of quasibrittle fracture: The fractal hypothesis, its critique and Weibull connection. *Int J Fracture*, 83(1): 19~40

Bažant ZP (1997b). Scaling of quasibrittle fracture: Asymptotic analysis. *Int J Fracture*, 83(1): 41~65

Bažant ZP, Kim JJ (1997). Penetration of sea ice plate with part-through bending crack and size effect. submitted to *J Eng Mech*

Bažant ZP (1997c). Fracturing truss model: size effect in shear failure of reinforced concrete. *J Eng Mech*, 123: in press

Bažant ZP, Xiang Y (1997). Size effect in compression fracture: Splitting crack band propagation. *J Eng Mech*, 123(2): 162~172

Budianski B, Fleck NA, Amazigo JC (1997). Compression kink band propagation. Report MECH 305, Harvard Univ, Cambridge (also: submitted to JMPs)

Christensen RM, DeTersa SJ (1997). Kink band mechanism for compressive failure of fiber composite materials. *J Appl Mech*, 64(Mar): 1~6

中国科学院力学研究所 王文标 黄晨光 赵红平 张榕京 段祝平 译自  
Scaling of structural failure. *Appl Mech Rev*, 1997, 50(10): 593~627  
中国科学院力学研究所 谈庆明 董务民 段祝平 校

## SCALING OF STRUCTURAL FAILURE

Zdenek Bažant

Department of Civil Engineering and Material Science, Northwestern University, Evanston IL 60208-3109

E-mail: z-bazant@nwu.edu

Er-Ping Chen

Material and Structural Mechanics Department, MS0437  
Sandia National Laboratories, Albuquerque NM 87185-0437

**Abstract** This article attempts to review the progress achieved in the understanding of scaling and size effect in the failure of structures. Particular emphasis is placed on quasibrittle materials for which the size effect is important and complicated. After reflections on the long history of size effect studies, attention is focused on three main types of size effects, namely the statistical size effect due to randomness of strength, the energy release size effect, and the possible size effect due to fractality of fracture or microcracks. Definitive conclusions on the applicability of these theories are drawn. Subsequently, the article discusses the application of the known size effect law for the measurement of material fracture properties, and the modeling of the size effect by the cohesive crack model, nonlocal finite element models and discrete element models. Extensions to compression failure and to the rate-dependent material behavior are also outlined. The damage constitutive law needed for describing a microcracked material in the fracture process zone is discussed. Various applications to quasibrittle materials, including concrete, sea ice, fiber composites, rocks and ceramics are presented. There are 377 references included in this article.

**Keywords** scaling, structural failure, quasibrittleness, fracture and damage, fractal