第 37 卷 第 3 期 力 学 学 报 Vol. 37, No. 3
2005 年 5 月 ACTA MECHANICA SINICA May, 2005

# 失效准则在广义 Mohr 空间的表示及应用

王文标 * 黄晨光 †,1) 段祝平 †
*(中国科学院研究生院物理系, 北京 100039)
†(中国科学院力学研究所, LNM, 北京 100080)

**摘要** 在广义的 Mohr 空间研究材料的破坏和屈服 (失效), 找到了主应力空间和广义 Mohr 空间中失效曲面的变换, 以及适用于所有失效准则的应力和失效面法向的普适相容关系. 对于双剪强度理论, 根据它在广义 Mohr 空间的表示, 将之归于最大偏应力理论一类.

**关键词** 破坏准则, 屈服函数, 广义的 Mohr 空间

**中图分类号:** O346.5 **文献标识码:** A **文章编号:** 0459-1879(2005)03-0368-06

## 引 言

材料破坏准则和屈服函数的研究是一个关于材料力学性质的重要课题, 有关该领域的综述可参阅文献 [1,2]. 为行文方便, 这里把材料的破坏和屈服统称为失效. 因此材料的破坏准则和屈服曲面统称为失效曲面 (failure surface). 失效曲面的表示多在应力空间给出; 当然也可在应变空间给出. Mohr 研究材料的失效是在现在称为 Mohr 空间的空间中进行的. 所谓 Mohr 空间, 是一个二维欧氏空间, 其上的横坐标为材料中某一面元上的正应力, 而纵坐标是同一面元上作用的剪应力. 而失效曲面, 则是 Mohr 空间中使材料失效的所有试验点的包络. 本文首先把二维的 Mohr 空间推广为三维的广义 Mohr 空间, 在这一空间中, 按照 Coulomb 研究材料强度的基本思想, 把材料的失效表述为一个以 Cauchy 应力 $\boldsymbol{\sigma}$ 和失效面 (failure plane) 方向 $\boldsymbol{n}$ 为自变量的极大值问题. 随后找到了这一极值问题在主应力空间的相应表示, 以及主应力空间给出的失效曲面在广义 Mohr 空间的对应表示. 发现在材料的失效面上的剪应力, 正应力以及应力的不变量之间存在一个普适相容条件; 同时还发现了以剪应力、正应力以及应力不变量表示的失效曲面的斜率 (平均应力 $\sigma_m$ 为参量).

在此基础上对原始的双剪理论 [3,4] 进行了研究. 双剪理论后来又发展成为包括正应力影响的广义双剪屈服理论以及双剪统一强度理论. 我们的研究表明, 原始的双剪强度理论属于最大偏应力理论. 这一理论能较好地解释脆性材料破坏时的拉伸断裂、劈裂等现象, 而对材料受压时的破坏行为的解释尚需进一步的探讨及试验验证.

## 1 预备知识

Coulomb[5] 于 1773 年在他的著名论文中提出了岩石和土任何一个受力面上的极限抗剪强度 $\tau_f$ 不仅和材料的内聚力 $C$ 有关, 而且和作用在该面上的正应力 $\sigma_n$ 有关. 若引进材料的内摩擦角 $\varphi$, 则有 $|\tau_f| = C - \sigma_n \mathrm{tg}\varphi$, 这就是至今仍被广泛使用的 Coulomb 强度准则. 这一准则中不包含中间主应力, 而实验表明中间主应力对岩石强度有影响. 这一准则在 Mohr 平面上的图形是二条相交的直线, 这也与实验结果不符. Mohr 于 1900 年将 Coulomb 准则推广为 $|\tau_f| = f(\sigma_n)$, 通过实测确定 $f$ 的函数形式. 然而 Mohr 准则同样没有考虑中间主应力的影响; 而且, 岩石在单向压缩时所发生的劈裂破坏也和 Mohr 准则的预测不一致.

尽管 Coulomb 准则和 Mohr 准则存在上述问题, 然而 Coulomb-Mohr 理论的基本思想, 如材料存在内摩擦, 内摩擦系数和材料的应力状态有关, 不应是常数; 以及材料的破坏是一个极值问题, 应力和材料某一面元的法线方向共同使某一函数极值条件得到满足, 材料才能破坏或屈服; 这些无疑是正确的. 中间主应力对材料的破坏和屈服是有影响的.

2004-04-08 收到第 1 稿, 2004-12-09 收到修改稿.
1) E-mail: huangcg@imech.ac.cn

然而归根结底，所谓中间主应力的影响实际上是材料性质对平均应力，或者说对静水压力有依赖性．材料中任何一个面元上作用的正应力都包含有平均应力贡献的部分，以及偏应力贡献的部分，这二者的影响应分别考虑．而岩土类材料恰恰是对平均应力敏感的材料．

设材料的失效应力为 $\boldsymbol{\sigma}$，破坏或滑移在材料内部特定的面上发生，面的法线记为单位向量 $\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{\sigma}$ 的主应力记为 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$．$(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ 为 $\boldsymbol{\sigma}$ 在主应力空间的坐标．首先从 $\boldsymbol{\sigma}$ 中分离出它的球形部分．

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_m \boldsymbol{I} + \boldsymbol{S}, \quad \sigma_m = \frac{1}{3}\mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma}, \quad \mathrm{tr}\boldsymbol{S} = 0 \tag{1}$$

$\sigma_m$ 称为平均应力，静水压力 $p = -\sigma_m$； $\boldsymbol{S}$ 称为偏应力．对 $\boldsymbol{S}$ 有等式

$$\Delta(\boldsymbol{S}) = \boldsymbol{S}^3 - J_2\boldsymbol{S} - J_3\boldsymbol{I} = \boldsymbol{0} \tag{2}$$

式中 $J_2$ 和 $J_3$ 分别称为 $\boldsymbol{S}$ 的第 2 和第 3 不变量

$$J_2 = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\boldsymbol{S}^2 \geq 0, \quad J_3 = \det \boldsymbol{S} = \frac{1}{3}\mathrm{tr}\boldsymbol{S}^3$$

在主应力空间， $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 3\sigma_m = \mathrm{const}$ 的平面记为 $\pi$，其中经过原点的面记为 $\pi_0$；过原点、垂直 $\pi_0$ 面、指向 $\sigma_m$ 增加的方向， $(1,1,1)/\sqrt{3}$，称为 $Oz$ 坐标轴的正向．这样，在主应力空间，可以以 $\pi_0$ 为底面，结合 $Oz$ 轴建立柱坐标系 $(r, \theta, z)$，有

$$r = \sqrt{2J_2}, \quad \cos 3\theta = \frac{3\sqrt{3}}{2}J_3 J_2^{-3/2}, \quad z = \sqrt{3}\sigma_m \tag{3}$$

这里 $r$ 为点 $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ 到 $z$ 轴的距离， $\theta$ 为该点在 $\pi_0$ 平面的投影与某一主应力轴在 $\pi_0$ 投影的夹角，$z$ 表示该点到 $\pi_0$ 平面的距离．

对于给定应力 $\boldsymbol{\sigma}$，材料中法线为 $\boldsymbol{n}$ 的面元上的正应力记为 $\sigma_n$，剪应力记为 $\tau_n$，而偏应力 $\boldsymbol{S}$ 在这个面上的法向分量记为 $S_n$，有

$$\sigma_n = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{n}, \quad S_n = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{S}n = \sigma_n - \sigma_m$$

$$\tau_n = \sqrt{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}^2\boldsymbol{n} - \sigma_n^2} = \sqrt{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{S}^2\boldsymbol{n} - S_n^2}$$

$(\sigma_n, \tau_n)$ 平面称为 Mohr 平面．为了便于考虑中间主应力的影响，需要把 Mohr 平面拓展为广义的 Mohr 空间 $(\sigma_m, S_n, \tau_n)$．这样，三维广义 Mohr 空间才能和同样是三维的主应力空间建立 1-1 的映照关系．

## 2 基本方程及求解

下面研究广义 Mohr 空间的函数极值问题

$$\max_n G(\sigma_m, S_n, \tau_n) \leq 0 \tag{4}$$

通常的 Tresca 破坏准则

$$\max_n(|\tau_n| - k) \leq 0$$

以及 Coulomb 破坏准则

$$\max_n(|\tau_n| + (\sigma_m + S_n)\mathrm{tg}\varphi - C) \leq 0$$

都是这一极值问题的特例．因此，上面提出的极值问题可以用来描述材料的失效．使不等号成立的区域为材料的非失效区，此时的 $\boldsymbol{\sigma}$ 称为许可应力；而使等号成立的曲面则是材料的失效曲面，此时的 $\boldsymbol{\sigma}$ 称为失效载荷，而 $\boldsymbol{n}$ 称为失效面方向．材料的失效在这个面上发生．当求解极值问题 (4) 时，由于失效曲面之外的应力状态是物理上不许可的，因此式 (4) 左端不能对 $\boldsymbol{\sigma}$ 取极值．当 $\boldsymbol{\sigma}$ 固定为失效载荷时， $G$ 随 $\boldsymbol{n}$ 变化，这时给 $\boldsymbol{n}$ 以增量 $\delta\boldsymbol{n}$，相应有 $\delta G|_\sigma = 0$ 和 $G = 0$，由此可以得到确定失效时 $\boldsymbol{n}$ 的方程．另外，由于 $\tau_n$ 的符号只影响材料失效以后的运动和滑移方向，而不影响材料是否失效．所以式 (4) 中 $\tau_n$ 只能以 $|\tau_n|$，或等价地，以 $\tau_n^2$ 出现．又由于非失效区的单连通性质，所以，可以把上述极值问题重新表述为

$$\max_{|n|=1}[\tau_n^2 + g(\sigma_m, S_n)] \leq 0 \tag{5}$$

等号当 $\boldsymbol{\sigma}$ 为失效载荷时成立．对于一类仅仅由 $\sigma_m$ 和 $S_n$ 决定，而和 $\tau_n$ 无关的失效曲面，可在 $g$ 中引入一个趋于 $+\infty$ 的系数，以便消除式 (5) 中的 $\tau_n^2$ 项．因此

$$\max_{|n|=1} g(\sigma_m, S_n) \leq 0, \quad \boldsymbol{\sigma}\ \text{固定}$$

也包含在式 (5) 中．当然，也可以单独考虑，可以使用式 (4)．

式 (5) 是一个带有约束条件 $|\boldsymbol{n}| = 1$ 的极值问题．给 $\boldsymbol{n}$ 以增量 $\delta\boldsymbol{n}$，有

$$2\boldsymbol{n}\cdot\delta\boldsymbol{n} + \delta\boldsymbol{n}\cdot\delta\boldsymbol{n} = 0 \tag{6}$$

上式中的二阶项在计算式 (5) 左端二阶变分时要用到．在失效曲面上，利用式 (6)，可计算式 (5) 左端的一阶变分和二阶变分．对于给定的 $\boldsymbol{\sigma}$，当 $\boldsymbol{n}$ 使式 (5) 左端取极值且等于 0 时，有

$$\tau_n^2 + g(\sigma_m, S_n) = 0 \tag{7}$$

$$\boldsymbol{S}^2\boldsymbol{n} - 2S_n\boldsymbol{S}\boldsymbol{n} + g'(\sigma_m, S_n)\boldsymbol{S}\boldsymbol{n} = \lambda\boldsymbol{n} \tag{8}$$

以及

$$\delta \boldsymbol{n}\cdot \boldsymbol{S}^2\delta \boldsymbol{n}-4(\delta \boldsymbol{n}\cdot \boldsymbol{S}\boldsymbol{n})^2-2S_n\delta \boldsymbol{n}\cdot \boldsymbol{S}\delta \boldsymbol{n}+ g'\delta \boldsymbol{n}\cdot \boldsymbol{S}\delta \boldsymbol{n}+2g''(\delta \boldsymbol{n}\cdot \boldsymbol{S}\boldsymbol{n})^2-\lambda\delta \boldsymbol{n}\cdot\delta \boldsymbol{n}\le 0 \tag{9}$$

式中

$$g'=g'(\sigma_m,S_n)=\frac{\partial g}{\partial S_n}\Big|_{\sigma_m}$$

$$g''=g''(\sigma_m,S_n)=\frac{\partial^2 g}{\partial S_n^2}\Big|_{\sigma_m}$$

式 (8) 和式 (9) 是式 (5) 左端取极值的必要条件 (因为还有 $\boldsymbol{\sigma}$ 要考虑). 然而式 (9) 不便于分析和使用，往往代之以物理上的直观判断.

现在分析式 (8)，这是一个带有约束条件的向量方程，相当于 3 个标量方程. 式 (8) 两端点乘 $\boldsymbol{n}$ 以确定 $\lambda$

$$\lambda=\tau_n^2-S_n^2+g'S_n \tag{10}$$

确定 $\lambda$ 之后，式 (8) 只相当于两个标量方程，就是下面将要给出的式 (11) 和式 (12). 当给定 $g(\sigma_m,S_n)$ 的形式以后，就可由式 (8) 确定 $\boldsymbol{n}$. 然而直接求 $\boldsymbol{n}$ 比较繁琐. 可行的替代办法是通过求 $S_n$ 和 $\tau_n$ 间接得到 $\boldsymbol{n}$. 对式 (8) 两边和 $\boldsymbol{S}\boldsymbol{n}$ 作内积，使用恒等式 (2)，得到

$$(-2S_n+g')(\tau_n^2+S_n^2)+(J_2-\lambda)S_n+J_3=0 \tag{11}$$

将 $\boldsymbol{S}\boldsymbol{n}$ 换成式 $\boldsymbol{S}^2\boldsymbol{n}$，重复上述操作，得到

$$(J_2-\lambda)(\tau_n^2+S_n^2)+[J_2(-2S_n+g')+J_3]S_n+ J_3(-2S_n+g')=0 \tag{12}$$

利用标量方程 (10)~(12) 代替向量方程 (8)，分析起来较为方便. 下面是具体的分析结果.

(1) $S_n$-$\tau_n$ 平面上 $\partial\tau_n/\partial S_n$ 的确定

在主应力空间，给定一个失效应力，只能确定失效曲面上的一个点. 而依据现在关于失效曲面的表述，在试验中不仅确定了失效应力，而且还有失效面的方向. 因而在广义 Mohr 空间，一次试验不仅可以确定失效曲面上的一个点，而且也确定了曲面在该点的偏导数 $\partial\tau_n/\partial S_n|_{\sigma_m}$. 由式 (11) 和式 (12)，有

$$\left.\begin{aligned}&\partial\tau_n/\partial S_n=-g'/(2\tau_n)\\&g'=3S_n+\Delta(S_n)/\tau_n^2\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

式中 $\Delta(S_n)=S_n^3-J_2S_n-J_3$.

这样，只要进行比较少的实验就可以确定失效曲面. 或者，也可以用 $g'$ 来检验所拟合的失效曲面的正确性. 在文献 [6] 中可以找到岩石破裂时应力和破裂面方向资料，但精度并不太高，不便使用. 这一工作还需要更多的实验数据支持.

(2) 普适的相容条件

当材料失效时，应力 $\boldsymbol{\sigma}$ 和失效面的法线 $\boldsymbol{n}$ 均已知，然后可以计算出 $\sigma_m$, $S_n$, $\tau_n$, $J_2$ 和 $J_3$. 据式 (11) 和式 (12) 消去 $g'$，可以发现这些量之间满足以下的相容条件

$$\tau_n^6+\tau_n^4(3S_n^2-J_2)+3\tau_n^2S_n\Delta(S_n)+\Delta(S_n)^2=0 \tag{14}$$

这一关系适合于所有的失效准则，而和式 (4) 中 $g$ 的具体函数形式无关. 但它又不是恒等式，所以说它是一个普适的相容条件. 这一条件，迄今尚未见到其它文献报导.

(3) 失效曲面在广义 Mohr 空间和主应力空间表示的相互转换

若给出在广义 Mohr 空间的失效曲面表示，即式 (7). 结合式 (10) 消去式 (11) 和式 (12) 中的 $\tau_n$ 和 $\lambda$，有

$$gg'-3gS_n+\Delta(S_n)=0 \tag{15}$$

$$gg'S_n-g'\Delta(S_n)-gJ_2-g^2+S_n\Delta(S_n)=0 \tag{16}$$

式 (15) 和式 (16) 结合起来又可以得到

$$g'\Delta(S_n)-g(3S_n^2-J_2)+g^2=0 \tag{17}$$

式 (15) 和式 (16) 结合消去 $g'$ 也可得到普适式 (14). 由于已经给定了 $g$ 的函数形式，从式 (15) 和式 (16)(或 (17)) 消去 $S_n$，即可得到一个以 $\sigma_m$ 为参量的关于 $J_2$ 和 $J_3$ 的函数关系，即在主应力空间以应力不变量表示的失效曲面. 同样，若给定在主应力空间的失效曲面

$$J_2=f(\sigma_m,J_3) \tag{18}$$

利用式 (15) 和式 (16)，当 $g\ne 0$ 时解出

$$J_2=J_2(S_n,g,g'),\quad J_3=J_3(S_n,g,g')$$

从而得到

$$J_2(S_n,g,g')=f(\sigma_m,J_3(S_n,g,g'))$$

这是一个关于 $g(\sigma_m,S_n)$ 的非线性一阶微分方程，求解这一方程，就得到了广义 Mohr 空间的失效曲面. 当得到了这个方程的解及给定失效载荷 $\boldsymbol{\sigma}$ 时，失效面方向 $\boldsymbol{n}$ 也随之确定. 当广义 Mohr 空间的失效曲

面分片光滑时，每一片的边界是一条单参数曲线，这一曲线在主应力空间的对应表示由式 (15) 及式 (16) 给出；反过来也同样成立．下面将用两个例子来具体说明．

**例 1** 给定广义 Mohr 空间的失效准则

$$\max_n (|\tau_n| - \tau_0(\sigma_m)) \le 0$$

上式等价于

$$\max_n (\tau_n^2 - \tau_0^2) \le 0$$

当 $\boldsymbol{\sigma}$ 为失效载荷，给 $\boldsymbol{n}$ 以增量 $\delta\boldsymbol{n}$，对上式左端变分，并利用 $\boldsymbol{n}$ 为单位向量的条件，得到

$$\tau_0^2 + 3S_n^2 = J_2, \quad 2S_n(\tau_0^2 - S_n^2) = J_3$$

以及

$$4(J_2 - \tau_0^2)(J_2 - 4\tau_0^2)^2 - 27J_3^2 = 0 \tag{19}$$

式 (19) 表示的是主应力空间 $\pi$ 面上 6 条直线的方程，其所围成的区域即是非失效区．式 (19) 即是 Tresca 失效曲面方程 ($\tau_0 = \mathrm{const}$)(严格地讲，Tresca 失效曲面方程还需要一个由式 (9) 确定的补充条件 $J_2 \le 4\tau_0^2/3$，详见文献 [7])．

**例 2** 关于主应力空间中的 Mises 失效准则在广义 Mohr 空间的表示

Mises 失效准则的表示为

$$\max_n (J_2 - k^2) \le 0$$

由式 (15) 和式 (17) 得到

$$\left.\begin{aligned} J_2 &= g'^2 - 3g'S_n - g + 3S_n^2 \\ J_3 &= -g'^2 S_n + g'(g + 3S_n^2) - 2gS_n - 2S_n^3 \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

所以保留 $J_3$ 的表达式是为判别解的合理性．将 $J_2 = k^2$ 代入式 (20)，得到关于 $g$ 的一阶非线性常微分方程．用半逆解法寻求如下形式的级数解

$$g = aS_n^2 + 2bS_n + c$$

由于符合 Mises 失效准则的材料性质是拉 - 压对称的，所以应有 $b = 0$．然后将 $g$ 的上述式子代入式 (20)，得到

$$g = \frac{3}{4}S_n^2 - k^2$$

即 Mises 准则在广义 Mohr 空间的表示为

$$\max_{\sigma,n} \left(\tau_n^2 + \frac{3}{4}S_n^2 - k^2\right) \le 0 \tag{21}$$

式 (20) 还存在另一个解 $g = S_n^2 - k^2$．但这一结果导致 $J_3 \equiv 0$，不合理，必须舍去．式 (21) 是 Mises 准则在广义 Mohr 空间的唯一对应表示．关于 Mises 准则已经有几种不同的解释，式 (21) 又给出了一个新解释：在失效面上，若定义 $\sqrt{\tau_n^2 + 3S_n^3/4}$ 为折合剪应力，则失效时折合剪应力等于 $k$．

## 3 最大偏应力准则和双剪准则

最大偏应力失效准则是材料失效由正应力决定，而和剪应力无关．这是第一强度理论 —— 最大拉应力理论的改进．在 $S_n$-$\tau_n$ 平面，非失效区域只能是一个竖的条带或半平面．一般地，有

$$\max_n (S_n - S_1(\sigma_m))(S_n - S_2(\sigma_m)) \le 0 \tag{22}$$

式中 $S_1 < 0 \le S_2$．当 $S_1 \to -\infty$，这是 Schmidt 在 1932 年提出的最大偏应力准则；而当 $|S_1| = S_2$，这是Ишлинский在 20 世纪 40 年代提出的另一种最大偏应力准则；而最一般的情形，$|S_1| > S_2$，失效曲面在主应力空间的表示恰好是

$$\Delta(S_1)\Delta(S_2) = (S_1^3 - J_2S_1 - J_3)(S_2^3 - J_2S_2 - J_3) = 0 \tag{23}$$

所围成的封闭曲面．上述曲面和 $\pi$ 面的交线是一个六边形 ($S_1$ 和 $S_2$ 要满足一定条件)．而式 (23) 恰好是双剪准则的不变量表示．这并不是巧合．因为我们已经找到了在广义 Mohr 空间和主应力空间失效曲面表示的对应关系．所以双剪准则就是最大偏应力准则．

最大偏应力准则和坚硬岩石的试验结果符合较好．当坚硬岩石受简单拉伸及纯剪切时都呈现拉应力控制的破坏；在围压较低时的压缩试验，材料呈劈裂破坏，劈裂面顺着主压应力方向，这种破坏也是由正的偏应力控制的．这些都和最大偏应力准则的预测一致．

## 4 结论和讨论

本文沿着 Coulomb 和 Mohr 的思路，将 Mohr 空间 $(\sigma_m, \tau_n)$ 改造成为一个三维的广义 Mohr 空间 $(\sigma_m, S_n, \tau_n)$，在此空间中建立以 $\sigma_m, S_n, \tau_n$ 的某一函数极值关系表示的失效准则．这一失效准则在主应力空间有惟一的对应表示；而主应力空间的失效准则在广义 Mohr 空间也有对应表示，以及由这一准则所确定的失效面方向 $\boldsymbol{n}$ 的表示，这是在主应力

空间无法做到的. 使用失效准则的广义 Mohr 空间表示, 不仅可以避免主应力空间表示的 3 重对称性, 而且失效准则的物理意义更加明确.

采用广义 Mohr 空间, 当给定失效的应力 $\boldsymbol{\sigma}$ 和失效面方向 $\boldsymbol{n}$ 时, 同时也就给定了 $\partial\tau_n/\partial S_n$. 利用这一导数, 不仅使我们能更好地拟合实验结果, 指导选用最合适的失效准则; 而且也可以估计拟合的误差. 而在主应力空间拟合试验数据则没有这样的方便条件.

另外, 在广义 Mohr 空间, 我们还发现了一个对所有失效准则都适用的普适相容条件, 这一式子可以用来估计试验数据的误差. 也可以据此定义一个描述材料脆性程度的无量纲参数. 这一普适条件的可能解释是, 对各向同性材料, 当失效准则给定时, 对于失效载荷 $\boldsymbol{\sigma}$ , 相应的失效面方向 $\boldsymbol{n}$ 也是确定的. 因此, 为材料失效时, $J_2, J_3, \tau_n$ 和 $S_n$ 并不是完全独立的. 它们之间的关系就是普适相容条件.

俞茂鋐等长期研究的双剪失效准则在广义 Mohr 空间的表示为最大偏应力准则. 这一准则中起控制作用的是主偏应力. 这一准则和坚硬岩石的试验结果符合较好. 然而有一个问题值得提出来研究, 迄今为止, 材料受压试验中并没有观察到单纯的"压坏", 观察到的只是压剪破坏或塑性变形.

## 参 考 文 献

1 俞茂鋐. 双剪理论及其应用. 北京: 科学出版社, 1998 (Yu Maohong. Double Shearing Theory and Its Applications. Beijing: Science Press, 1998(in Chinese))

2 龚晓南等. 工程材料本构方程. 北京: 中国建筑出版社, 1995 (Gong Xiaonan, et al. Constitutive Equations of Engineering Materials. Beijing: China Construction Press, 1995 (in Chinese))

3 俞茂鋐. 各向同性屈服函数的一般性质. 西安交通大学科学技术论文, 1961 (Yu Maohong. Isotropic yield function and its general characters. Thesis of Xi'an Jiaotong University, 1961 (in Chinese))

4 Yu Maohong. Fifty years of research on engineering strength theory in China. In: Yu Maohong, Fan Sau Cheong, eds, Proceedings of Int Sym on Strength Theory, Setp 9~11, 1998, Xian China. 95~114

5 Coulomb CA 著. 朱自理译. 极大极小原理在建筑静力学中的应用. 岩土工程学报, 1993, 15(6): 110~121 (Coulomb CA. Memoires de Mathematique et de physique. presente's a l' Academie royale das Sciences par divers Savants et lus dans ses Assemblees, Annee 1773, Paris (in Chinese))

6 高延法. 岩石真三轴压力试验与岩体损伤力学. 北京: 地震出版社, 1999 (Gao Yanfa. Real Triaxial Compression Test and Damage Mechanics of Rocks. Beijing: Earthquake Press, 1999 (in Chinese))

7 王文标, 黄筑平. 关于 Tresca 屈服准则的不变量表示. 徐秉业主编. 塑性力学教学研究和学习指导. 北京: 清华大学出版社, 1993 (Wang Wenbiao, Huang Zhuping. The invariant representation of Tresca yield criterion. In: Xu Bingye ed. The Guide Book of Teaching and Learning Mechanics of Plasticity. Beijing: Tsinghua Press, 1993 (in Chinese))

**附 录** 式 (5) 变分的推导

在极值点处, 有

$$\left.\begin{aligned} &\tau_n^2 + g(\sigma_m, S_n) = 0 \\ &\tau_{n+\delta n}^2 + g(\sigma_m, S_{n+\delta n}) \le 0 \end{aligned}\right\} \tag{A1}$$

上式对于任意满足 $|\boldsymbol{n}+\delta\boldsymbol{n}|=1$ 的 $\boldsymbol{n}$ 和 $\delta\boldsymbol{n}$ 都成立. $\delta\boldsymbol{n}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 满足下面的约束条件

$$2\boldsymbol{n}\cdot\delta\boldsymbol{n} + \delta\boldsymbol{n}\cdot\delta\boldsymbol{n} = 0 \tag{A2}$$

计算 $S_{n+\delta n}$ 和 $\tau_{n+\delta n}$

$$S_{n+\delta n} = S_n + 2(\boldsymbol{S}\boldsymbol{n})\cdot\delta\boldsymbol{n} + \delta\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{S}\delta\boldsymbol{n}$$

$$\begin{aligned}\tau_{n+\delta n}^2 = {} & \tau_n^2 + 2(\boldsymbol{S}^2\boldsymbol{n} - 2S_n\boldsymbol{S}\boldsymbol{n})\cdot\delta\boldsymbol{n} + \\ & \delta\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{S}^2\delta\boldsymbol{n} - 2S_n\delta\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{S}\delta\boldsymbol{n} - 4(\boldsymbol{n}\cdot S\delta\boldsymbol{n})^2 + \\ & O(|\delta\boldsymbol{n}|^3)\end{aligned}$$

对 $g(\sigma_m, S_{n+\delta n})$ 进行 Taylor 展开, 只保留到 $|\delta\boldsymbol{n}|^2$ 项, 有

$$\begin{aligned} & g(\sigma_m, S_{n+\delta n}) = \\ & \quad g(\sigma_m, S_n) + g'(2\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{S}\delta\boldsymbol{n} + \delta\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{S}\delta\boldsymbol{n}) + \\ & \quad \frac{1}{2}g''(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{S}\delta\boldsymbol{n} + \delta\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{S}\delta\boldsymbol{n})^2 + O(|\delta\boldsymbol{n}|^3)\end{aligned}$$

利用式 (A1), 有

$$2(\boldsymbol{S}^2\boldsymbol{n} - 2S_n\boldsymbol{S}\boldsymbol{n})\cdot\delta\boldsymbol{n} + g'(2\boldsymbol{S}\boldsymbol{n})\cdot\delta\boldsymbol{n} = O(|\delta\boldsymbol{n}|^2)$$

再利用式 (A2), 即得到式 (8), 并贡献给式 (A1) 一个二阶项, $-\lambda\delta\boldsymbol{n}\cdot\delta\boldsymbol{n}$. 考虑式 (A1) 展开式的 $\delta\boldsymbol{n}\cdot\delta\boldsymbol{n}$ 项, 即可得到式 (9).

# THE REPRESENTATION OF FAILURE CRITERIONS IN GENERALIZED MOHR SPACE AND ITS APPLICATIONS

Wang Wenbiao* Huang Chenguang†,1) Duan Zhuping†

*(*Department of Physics, Graduate School, CAS, Beijing* 100039, *China*)

†(*LNM, Institute of Mechanics, CAS, Beijing* 100080, *China*)

**Abstract** The paper deals with the strength and the yield (failure) of materials in generalized Mohr space and finds out the transformations of failure criterions represented in the principal stress space and in the generalized Mohr space. A universal compatibility relations for the failure stress and the failure plane, which is independent of the failure criterions, is also discovered. For double shearing strength theory, owing to its representation in the generalized Mohr space, the theory is considered the equivalent of the maximal deviator stress.

**Key words** failure criterions, yield function, generalized Mohr space

Received 8 April 2004, revised 9 December 2004.

1) E-mail: huangcg@imech.ac.cn