

微薄梁三点弯曲的尺度效应研究¹⁾

冯秀艳* 郭香华† 方岱宁† 王自强*,2)

*(中国科学院力学研究所非线性力学国家重点实验室, 北京 100080)

†(清华大学工程力学系, 北京 100084)

摘要 应用高灵敏度的力传感器以及时间序列电子散斑干涉法, 同时测出了不同厚度纯镍薄片三点弯曲试件的抗力与变形, 得到薄梁中心点处的载荷与挠度曲线. 应用 Fleck 和 Hutchinson 的偶应力理论, 结合平面应变弯曲模型, 建立了薄梁处于弹性状态和弹塑性状态的控制方程, 应用 Runge-Kutta 法进行数值求解, 并将计算得到的载荷-挠度曲线以及无量纲化弯矩-表面应变曲线和实验结果进行了比较. 在理论计算过程中, 没有拟合任何材料参数, 所有的材料参数均来自实验测量的结果, 材料特征尺度也是根据 Stolken 和 Evans 的工作给出的. 结果表明: 应用偶应力理论预测的结果和实验结果符合良好, 而经典理论的预测结果与实验不相符合.

关键词 偶应力, 微薄梁三点弯曲, 应变梯度, Runge-Kutta 法

中图分类号: O344.4 **文献标识码:** A **文章编号:** 0459-1879(2007)04-0479-07

引 言

近年来, 大量实验证实金属材料在微米和亚微米尺度具有强烈的尺度效应. Fleck 等^[1]利用不同直径的细铜丝进行了扭转实验, 发现当铜丝的直径从 170 μm 减小到 12.5 μm 时, 其扭转强度大约增至三倍. Stolken 和 Evans^[2]利用纯镍薄梁进行了纯弯实验, 观察到当薄梁厚度从 50 μm 减小到 12.5 μm 时, 无量纲化弯矩也显著增加. 大量的微压痕实验表明^[3~6], 随着压入深度从 10 μm 减小到 1 μm , 压痕硬度将增大到 2 至 3 倍.

由于经典塑性理论的本构关系中不包含任何特征尺度, 所以, 经典塑性理论无法解释上述实验现象. 为此, 国内外许多研究者相继提出应变梯度理论来描述材料的这种尺度效应. Fleck 和 Hutchinson^[7]从几何必须位错及统计储存位错角度出发, 在简化偶应力理论基础上, 提出了一种应变梯度理论, 即 CS 理论, 该理论只考虑了转动梯度的影响. 为了更好地分析裂纹尖端场以及微米压痕问题, Fleck 和 Hutchinson^[8]又提出了一种完整的塑性应变梯度理论, 习惯上称之为 SG 理论, 在该理论中, 既考虑了转动梯度效应, 又考虑了拉伸应变梯度效应. Fleck 和 Hutchinson^[7,8]的这两种塑性应变梯度理论是一种唯象学理论. Gao 和 Huang 等^[9]提出了一种基

于位错机制的塑性应变梯度理论, 简称 MSG 理论, 这个理论通过一个多尺度、多层次的框架, 实现了宏观塑性理论和位错密度 Taylor 硬化关系的联系.

上述 SG 理论和 MSG 理论都引入了高阶应力, 其本构关系及边界条件相当复杂. Acharya 和 Bassani^[10]讨论了一种率无关框架, 在这个框架下应力增量和应变增量通过塑性硬化模量相关, 而这个塑性硬化模量不仅依赖于塑性应变, 而且依赖于塑性应变梯度, 但他们没有给出建立具体硬化模量的系统方法. Chen 和 Wang^[11]在 J_2 形变理论增量形式的基础上, 给出了一种新的硬化关系, 应变梯度仅作为内变量来影响材料的切线模量. 随后, Chen 和 Wang^[12]在一般偶应力理论框架下提出了一种新的转动梯度理论, 结合考虑拉伸应变梯度的增量硬化关系, 形成了一种完整的应变梯度理论^[13] (简称为 C-W 应变梯度理论). Gao 和 Huang^[14]提出了一种基于 Taylor 模型的非局部化理论. Shizawa 和 Zbib^[15]通过虚功原理建立了热力学力的平衡方程和相关的守恒律, 讨论了连续性方程和能量方程, 并利用熵增原理和最大熵增率原理建立了弹塑性本构方程. Lam 等^[16]又提出了一种弹性应变梯度理论, 在此基础上建立了平面应变梁的弹性应变梯度弯曲理论并对悬臂梁弯曲问题进行了实验和求解.

本文针对不同厚度的纯镍微薄梁三点弯曲试样

2006-06-19 收到第 1 稿, 2006-12-18 收到修改稿.

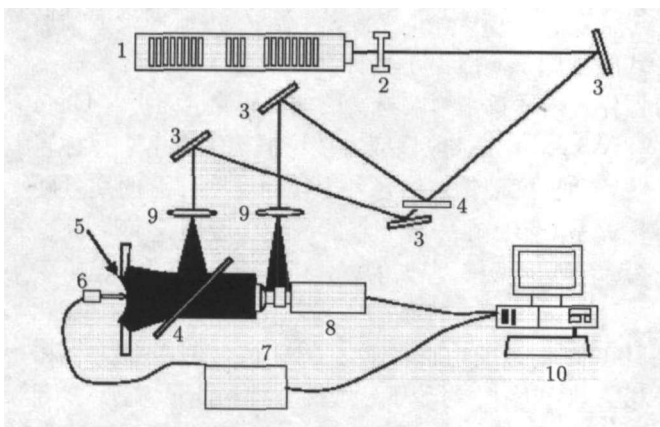
1) 国家自然科学基金资助项目 (10272103).

2) E-mail: tcwang@imech.ac.cn

进行了实验研究,应用高灵敏度的力传感器以及时间序列电子散斑干涉法^[17],同时测出了不同厚度纯镍薄片三点弯曲试件的抗力与变形,得到薄梁中心点处的载荷与挠度曲线.应用Fleck和Hutchinson的偶应力理论,结合平面应变弯曲模型,建立了考虑转动梯度影响的微薄梁的控制方程.对薄梁三点弯曲问题进行了解析数值分析,将理论分析得到的载荷-挠度曲线以及无量纲化弯矩-表面应变曲线和实验结果进行对比.结果表明:偶应力理论预测的计算结果和实验结果符合良好,而经典理论的预测结果与实验不相符合.在理论计算过程中,没有拟合任何材料参数,所用的材料参数均来自实验测量的结果,材料特征尺度也是根据Stolken和Evans^[2]的工作给出的.

1 微薄梁三点弯曲实验研究

实验装置如图1所示,主要包括位移测量系统和微力测量系统.实验中,由He-Ne激光器发出的激光分成两束,一束照在试件上并经过薄膜表面散射后通过半透半反镜,与参考光在CCD靶面叠加产生干涉.CCD以每秒12帧的速度拍摄干涉图并输入计算机.本实验采用三点弯加载,在跨距为15mm的两支撑点中间为加载点.在加载过程中从监视器里能直接看到试件和加载头的图像,用相关的图像软件就可以保证加载头的位置精确到1个像素的精度.加载头与分辨率达0.1mN的力传感器相连.传感器采集的信号经放大器放大之后输入计算机,由



1 激光器, 2 衰减镜, 3 反光镜, 4 分光镜, 5 纯镍薄片, 6 测力传感器, 7 信号放大器, 8 CCD, 9 扩束镜, 10 计算机

1 laser, 2 reducer box, 3 reflector, 4 beamsplitter, 5 thin film, 6 micro loading sensor, 7 signal amplifier, 8 CCD, 9 zoom lens, 10 computer

图1 实验装置简图

Fig.1 Schematic view of the thin-film bending test set-up

AD卡处理便可得到载荷值.在这个装置中,载荷和像素是同步得到并保存于计算机中,经过预先编制的程序处理,就可得到载荷-位移图.

三点弯曲试样的示意图如图2所示,集中载荷加在试样的中点,跨距 $2l$ 等于15mm.实验中纯镍试件由北京航空材料研究院提供,镍的纯度为99.99%以上.采用和Stolken和Evans^[2]同样的处理方法,在镍加工成薄片之后经过760°C真空退火处理6h,以消除残余应力,同时使得薄片内部晶体结构分布均匀.实验试件长30mm,宽5mm,厚度分别为19, 28, 55, 62, 75, 90 μm .实验每一种厚度的试样都做了3个1组,重复上述的实验过程,同时测出不同厚度纯镍薄片三点弯曲试件的抗力与变形,所得的载荷-挠度曲线如图3所示.从图中可看出,所有的每组3个试件的载荷-挠度曲线基本重合,说明实验有良好的可重复性.

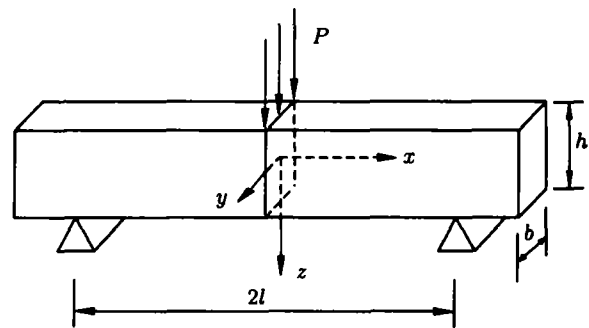


图2 薄梁三点弯示意图

Fig.2 Sketch of three-point bend specimen

2 微薄梁三点弯曲问题的理论分析

假设薄梁的厚度远远小于长和宽,薄梁发生平面应变变形.同时,认为薄梁不能承受横向剪应变,而剪应力与正应力相比为小量,可以忽略不计.考虑到薄梁弯曲变形的对称性,取试件的右半部分进行分析.

对于不可压材料,由平截面假定可得非零应变分量为

$$\varepsilon_x = -\varepsilon_z = \kappa(x)z \quad (1)$$

其中 $\kappa(x)$ 为中性面 $z=0$ 的曲率.则位移场为

$$u_1 = -z\vartheta(x), \quad u_2 = 0, \quad u_3 = -\frac{1}{2}z^2\kappa(x) + w_0(x) \quad (2)$$

其中 $\vartheta(x) = \frac{dw_0(x)}{dx}$ 为相应的转角, $w_0(x)$ 为薄梁弯曲时中性面挠度.因而,等效应变和等效弯扭张量为

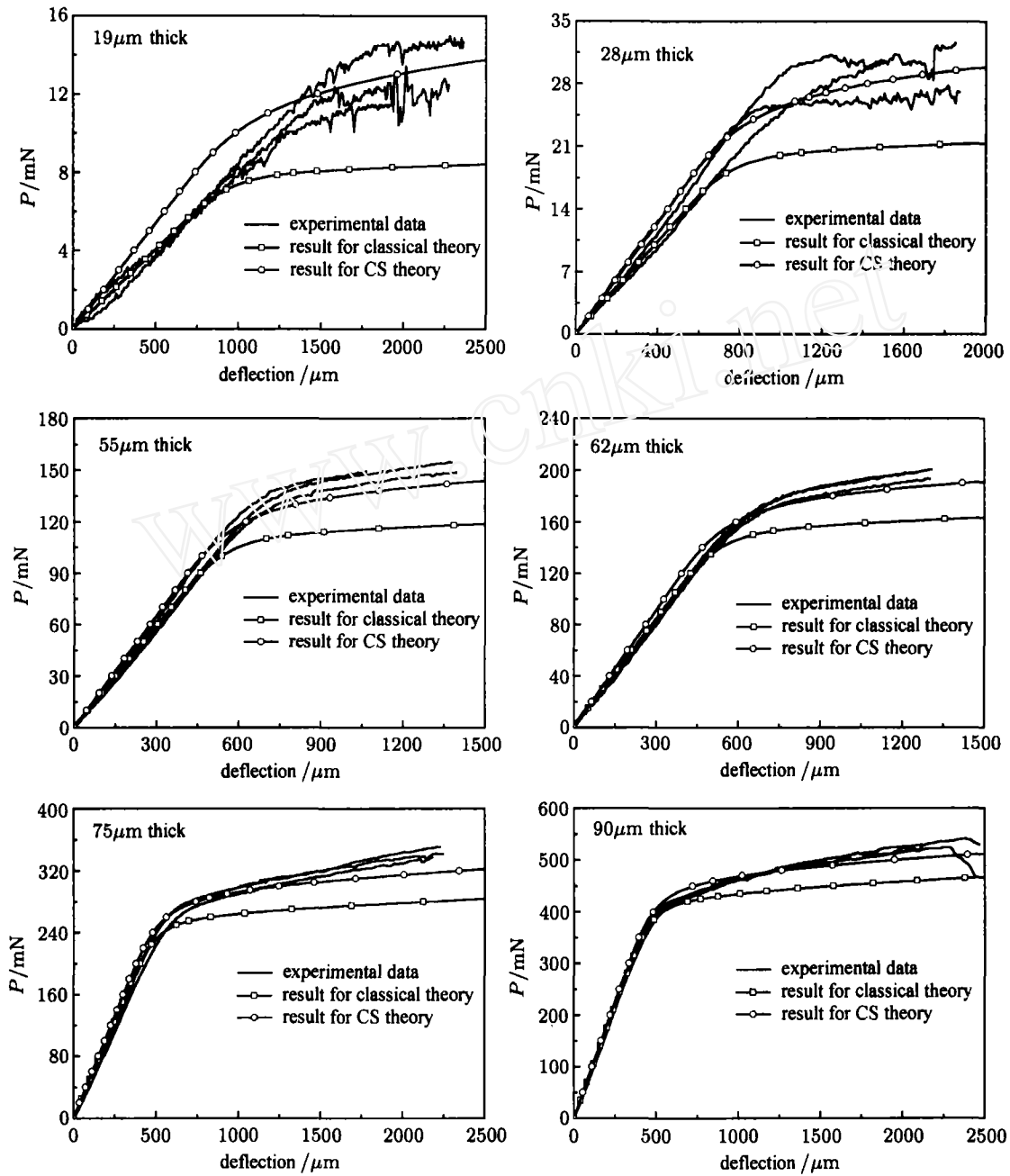


图 3 不同厚度纯镍薄膜的载荷 - 挠度曲线计算结果与实验结果比较

Fig.3 Load deflection curves of the pure Ni foils for the computational results and experimental data

$$\epsilon_e = \frac{2}{\sqrt{3}} \kappa(x) |z| \quad (3)$$

$$\chi_e = \sqrt{\frac{2}{3} \left\{ \left[\frac{1}{2} z \kappa'(x) \right]^2 + \left[\frac{1}{4} z^2 \kappa''(x) + \kappa(x) \right]^2 \right\}} \quad (4)$$

根据 Stolken 和 Evans^[2] 的拉伸实验结果, 纯镍薄片拉伸时的应力应变关系可以刻画为

$$\sigma = \begin{cases} \bar{E}\epsilon, & \sigma \leq \bar{\sigma}_0 \\ \sigma_0 + E_p \epsilon, & \sigma > \bar{\sigma}_0 \end{cases} \quad (5)$$

$$\sigma_0 = \bar{\sigma}_0 \left(1 - \frac{E_p}{\bar{E}} \right), \quad \bar{E} = \frac{E}{1 - \nu^2}$$

其中 $\bar{\sigma}_0$ 为薄膜拉伸屈服强度, 则等效应变与等效应力之间的关系可写为

$$\sigma_e = \begin{cases} 3\mu\epsilon_e, & \sigma_e \leq \sigma_Y \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_0 + \frac{3}{4}E_p\epsilon_e, & \sigma_e > \sigma_Y \end{cases} \quad (6)$$

其中 $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$, $\sigma_Y = \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_0 / \left(1 - \frac{E_p}{4\mu} \right)$ 为单轴拉伸屈服强度. 所以, CS 理论中所采用的硬化关系变为

$$\Sigma_e = \begin{cases} 3\mu E_e, & \text{弹性区} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\Sigma_0 + \frac{3}{4}E_p E_e, & \text{弹塑性区} \end{cases} \quad (7)$$

根据广义正交性法则, 可得

$$\Sigma_0 = \sigma_0 \frac{E_e}{\varepsilon_e} \quad (8)$$

联立 CS 理论的本构方程, 得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \bar{E}\kappa(x)z \\ m_{yx} &= 2\mu l_{CS}^2 \left(\frac{1}{4}z^2\kappa''(x) + \kappa(x) \right) \\ \sigma_x &= 2 \left(\frac{\sigma_0}{\sqrt{3}\varepsilon_e} + \frac{E_p}{2} \right) \kappa(x)z \\ m_{yx} &= l_{CS}^2 \left(\frac{\sigma_0}{\sqrt{3}\varepsilon_e} + \frac{E_p}{2} \right) \left(\frac{1}{4}z^2\kappa''(x) + \kappa(x) \right) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{弹性区} \\ \text{弹塑性区} \end{array} \quad (9)$$

则弯矩表达式变为

$$\frac{M}{2b} = \int_0^{h/2} \sigma_x z dz + \int_0^{h/2} m_{yx} dz \quad (10)$$

整理, 得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\mu h^3 l_{CS}^2}{48} \kappa''(x) + \mu h^3 \gamma \kappa(x) - \frac{M}{2b} &= 0, & \text{弹性区} \\ f l_{CS}^2 \kappa''(x) + g \kappa(x) - \frac{M}{2b} &= 0, & \text{弹塑性区} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

式中

$$\begin{aligned} M &= \frac{P}{2}(l-x), \quad \gamma = \frac{1}{12(1-\nu)} + \frac{l_{CS}^2}{h^2} \\ f &= \frac{1}{4} \int_{\xi}^{h/2} \left(\frac{\sigma_0}{\sqrt{3}\varepsilon_e} + \frac{E_p}{2} \right) z^2 dz + \frac{\mu \xi^3}{6} \\ g &= \int_{\xi}^{h/2} \left(\frac{\sigma_0}{\sqrt{3}\varepsilon_e} + \frac{E_p}{2} \right) (2z^2 + l_{CS}^2) dz + \frac{E \xi^3}{3(1-\nu^2)} + 2\mu l_{CS}^2 \xi \end{aligned}$$

其中 ξ 为矩形截面上弹塑性交界线到中性层的距离.

考虑到薄梁弯曲变形时的对称性, 并假定薄梁端部无应力作用, 则边界条件就变为

$$\kappa'(0) = 0, \quad \kappa(l) = 0 \quad (12)$$

当外加载荷比较小时, 整个薄梁均处于弹性状态, 根据式 (11) 中的弹性区的微分方程及边界条件 (12), 可解得

$$\kappa(x) = C_1 \sin \frac{\rho(l-x)}{l} + \frac{P(l-x)}{4\mu b h^3 \gamma} \quad (13)$$

其中

$$\rho = \frac{4l}{l_{CS}} \sqrt{3\gamma}, \quad C_1 = -\frac{Pl}{4bh^3 \mu \gamma \rho \cos \rho} \quad (14)$$

随着载荷 P 的逐渐增大, 薄梁 $x=0$ 处的截面最先开始屈服, 此时

$$\sigma_x|_{z=h/2} = \bar{\sigma}_0$$

相应的弹性极限曲率 $\kappa_e = \frac{2\bar{\sigma}_0}{E\bar{h}}$, 这样, 根据式 (13) 可求得弹性极限载荷 P_e 为

$$P_e = \frac{4\rho\mu\gamma b h^3 \kappa_e}{l(\rho - \tan \rho)}$$

随着载荷 P 的继续增大, 存在 l_0 , 当 $l_0 \leq x \leq l$ 时薄梁处于弹性状态, 而当 $0 \leq x \leq l_0$ 时薄梁处于弹塑性状态. 这样

$$\kappa(l_0) = \kappa_e$$

因此, 当 $l_0 \leq x \leq l$ 时, 方程 (13) 仍然满足, 但此时

$$C_1 = \left[\kappa_e - \frac{P(l-l_0)}{4\mu b h^3 \gamma} \right] / \sin \frac{\rho(l-l_0)}{l} \quad (15)$$

若给定 l_0 , $l_0 \leq x \leq l$ 处的 $\kappa(x)$ 就可以根据式 (13) 及式 (15) 求得. 由此, 也就给定了 l_0 处的弹塑性区 $\kappa(x)$ 的初值, 基于弹塑性区的控制方程 (11), 应用 Rouge-Kutta 法就可以从右到左解出 $0 \leq x \leq l_0$ 处的 $\kappa(x)$. 若 $\kappa'(0) \neq 0$, 则修正 l_0 的值, 重复上述过程, 直到 $|\kappa'(0)|$ 小于预先给定的允许误差 δ . 在计算过程中, 取 $\delta = 10^{-4}$.

求出 $\kappa(x)$ 以后, 应用 Rouge-Kutta 法, 根据下列方程及边界条件就可以确定薄梁弯曲时中性面的挠度

$$\kappa(x) = -\frac{d^2 w_0(x)}{dx^2} \quad (16)$$

$$x=0 \text{ 时, } \frac{dw_0(x)}{dx} = 0; \quad x=l \text{ 时, } w_0(x) = 0 \quad (17)$$

3 理论计算结果和实验结果的比较

标定弹性模量 $E = 200 \text{ GPa}$. 根据 Stolken 和 Evans^[2] 的纯镍薄片拉伸实验结果, 3 种不同厚度 ($12.5 \mu\text{m}$, $25 \mu\text{m}$, $50 \mu\text{m}$) 的线性硬化系数 E_p 在 $1.05 \sim 1.3 \text{ GPa}$ 之间, 分析表明, 这个范围内硬化系数 E_p 对计算结果的影响相当小, 因此, 取 $12.5 \mu\text{m}$ 厚的线性硬化系数 $E_p = 1.05 \text{ GPa}$. 对 Stolken 和 Evans^[2] 薄膜拉伸实验结果进行线性插值, 得出不同厚度纯镍薄膜的屈服强度 σ_0 , 如表 1 所示. 根据 Stolken 和 Evans^[2] 的工作, 材料特征尺度 l_{CS} 在 $5.06 \sim 5.46$ 之间, 分析表明, 这个范围内的 l_{CS} 对计算结果的影响比较小, 因此, 取 $l_{CS} = 5.4 \mu\text{m}$.

表 1 不同厚度纯镍薄膜的屈服强度
Table 1 Yield strength of the pure Ni foils with different thicknesses

$h/\mu\text{m}$	σ_0/MPa
19	65.5
28	76.6
55	109.9
62	118.5
75	134.6
90	153.1

计算得到的载荷 - 挠度曲线和实验曲线的比较如图 3 示。这里所说的载荷和挠度是指薄梁中心点的载荷和挠度。其中，实线代表实验测量的载荷 - 挠度曲线，带有空心圆点的曲线代表 CS 理论的计算结果，带有方框的曲线代表经典理论的计算结果。根据相同的挠度对应相同的表面应变，将图 3 所示的载荷 - 挠度曲线转化为相应的无量纲化弯矩与表面应变之间的关系，如图 4 所示，其中表面应变是指薄梁中心加载点处外表面的应变 ϵ_x 。图 4 中，实

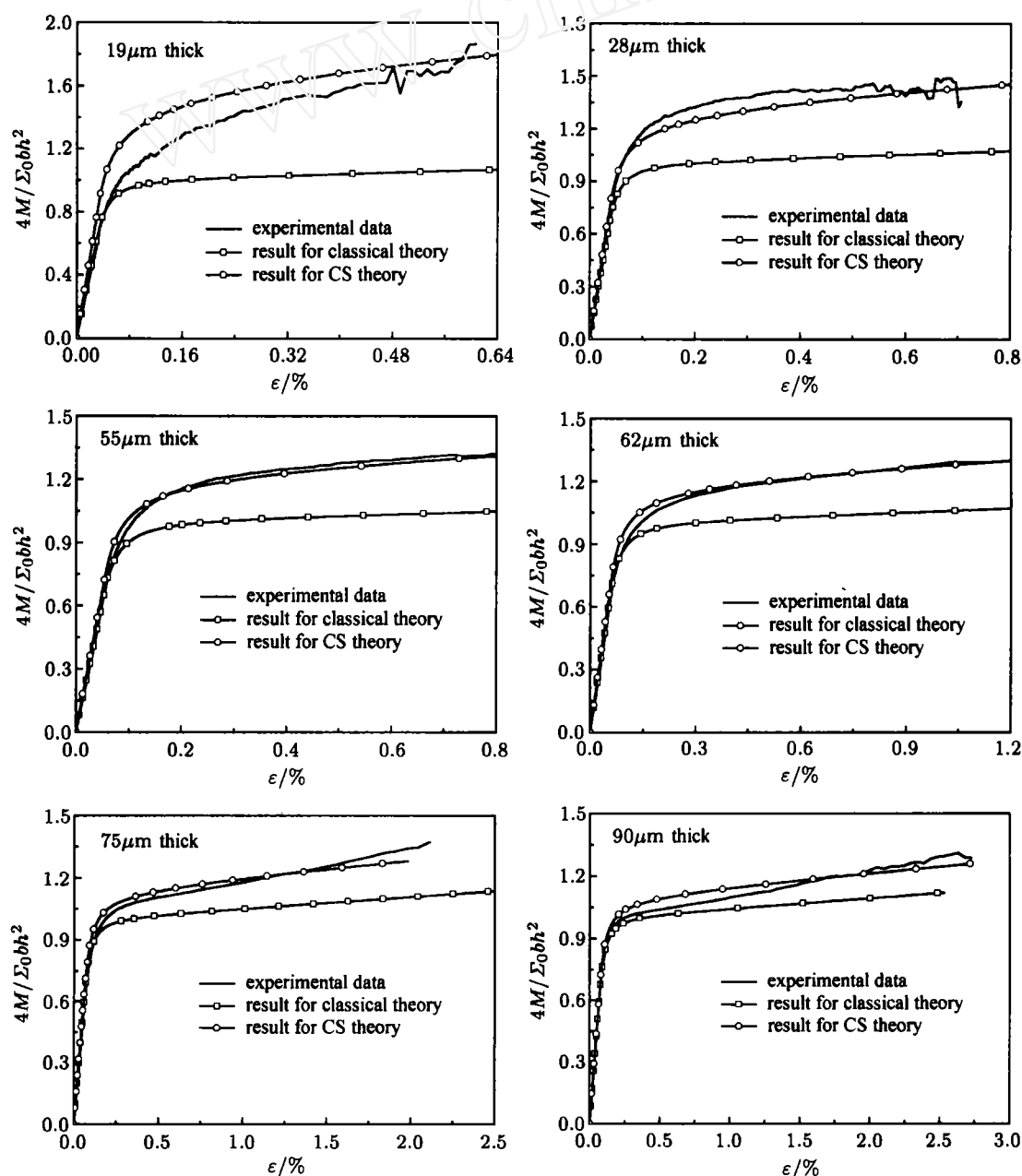


图 4 不同厚度纯镍薄膜的无量纲化弯矩 - 应变曲线计算结果与实验结果比较

Fig.4 Plots of non-dimensional bending moment against the surface strain at the midpoint of the specimen

线代表相应于实验曲线的三条无量纲化弯矩与表面应变曲线的平均值. 带有空心圆点的曲线代表 CS 理论的计算结果, 带有方框的曲线代表经典理论的计算结果.

从图 3 可以看出, 对于各种不同厚度的纯镍薄膜, 在塑性屈服阶段, 按照经典理论计算的载荷 - 挠度曲线比实验曲线低很多, 而按照 CS 理论预测的载荷 - 挠度曲线却和实验曲线符合得比较好. 对于弹性阶段, 当薄梁的厚度为 $19\mu\text{m}$ 时, 按照 CS 理论预测的结果明显高于实验结果, 这是由于采用的是全量型 CS 理论. 在弹性阶段, 本构方程为

$$s_{ij} = 2\mu\epsilon'_{ij}, \quad m'_{ij} = 2\mu l'_c \chi'_{ij}$$

也就是说, 全量型 CS 理论已经承认了弹性阶段的内禀尺度 l_{el} 与塑性阶段的内禀尺度 l_{cs} 是一样的. 而大量实验表明塑性应变梯度对塑性本构关系有重要的影响, 而对弹性本构关系的影响比较小. 因此, 可以通过选择 l_{el}/l_{cs} 的比值, 使偶应力对弹性变形的影响减小, 这样弹性段的理论计算结果和实验结果会符合得比较好, 这种情况只能采用增量型塑性应变梯度理论来进行分析^[12].

从图 4 可以观察到应用 CS 理论预测的无量纲化弯矩 - 表面应变曲线和实验曲线符合得相当好.

4 结 论

本文应用高灵敏度的力传感器以及时间序列电子散斑干涉法, 同时测出了不同厚度纯镍薄片三点弯曲试件的抗力与变形, 得到薄梁中心点处的载荷与挠度曲线. 并应用 Fleck 和 Hutchinson 的 CS 理论, 结合平面应变弯曲模型, 建立了考虑转动梯度影响的控制方程并应用 Rouge-Kutta 法进行了求解, 对薄梁三点弯曲问题进行了解析数值分析, 将计算结果与实验结果进行了比较. 通过计算结果和实验结果的比较, 发现应用 CS 理论所预测的载荷 - 挠度曲线以及无量纲化弯矩 - 表面应变曲线和实验曲线符合得都比较好, 因此, CS 理论能很好地解释薄梁三点弯曲实验现象, 而经典理论不能解释这种实验现象. 这也说明, 在不同厚度纯镍薄膜三点弯曲实验中, 确实存在一种尺度效应现象.

参 考 文 献

- 1 Fleck NA, Muller GM, Ashby MF, et al. Strain gradient plasticity: theory and experiment. *Acta Metall Mater*, 1994, 42 (2): 475~487
- 2 Stolken JS, Evans AG. A microbend test method for measuring the plasticity length scale. *Acta Mater*, 1998, 46(14): 5109~5115
- 3 Nix WD. Mechanical properties of thin films. *Metall Trans*, 1989, A 20: 2217~2245
- 4 Stelmashenko NA, Walls MG, Brown LM, et al. Microindentations on W and Mo oriented single crystals: An STM study. *Acta Metall Mater*, 1993, 41(10): 2855~2865
- 5 Ma Q, Clarke DR. Size dependent hardness of silver single crystals. *J Mater Res*, 1995, 10(4): 853~863
- 6 Pool WJ, Ashby MF, Fleck NA. Micro-hardness of annealed and work-hardened copper polycrystals. *Scripta Metall Mater*, 1996, 34(4): 559~564
- 7 Fleck NA, Hutchinson JW. A phenomenological theory for strain gradient effects in plasticity. *J Mech Phys Solids*, 1993, 41(12): 1825~1857
- 8 Fleck NA, Hutchinson JW. Strain gradient plasticity. *Advances in Applied Mechanics*, 1997, 33: 295~361
- 9 Gao H, Huang Y, Nix WD, Hutchinson JW. Mechanism-based strain gradient plasticity I. — Theory. *J Mech Phys Solids*, 1999, 47: 1239~1263
- 10 Acharya A, Bassani JL. On Non-local Flow Theories That Preserve the Classical Structure of Incremental Boundary Value Problems. *Micromechanics of Plasticity and Damage of Multiphase Materials*, IUTAM Symposium, Paris, Aug. 29-Sept. 1, 1995
- 11 Chen SH, Wang TC. A new hardening law for strain gradient plasticity. *Acta Mater*, 2000 (48): 3997~4005
- 12 Chen SH, Wang TC. A new deformation theory with strain gradient effects. *International Journal of Plasticity*, 2002, 18: 971~995
- 13 Chen SH, Wang TC. Strain gradient theory with couple stress for crystalline solids. *Eur J Mech A/Solids*, 2001, 20: 739~756
- 14 Gao H, Huang Y. Taylor-based nonlocal theory of plasticity. *Int J Solids Struct*, 2001, 38: 2637
- 15 Shizawa K, Zbib HM. A thermodynamical theory of gradient elastoplasticity with dislocation density tensor I: Fundamentals. *Int. J. Plasticity*, 1999, 15: 938
- 16 Lam DCC, Yang F, Chong ACM, et al. Experiments and theory in strain gradient elasticity. *J Mech Phys Solids*, 2003, 51: 1477
- 17 郭香华, 方岱宁, 李喜德. 用电子散斑法对纯镍薄片弯曲变形的测量. *力学与实践*, 2005, 27(2): 22~25 (Guo XH, Fang DN, Li XD. Measurement of deformation of pure Ni foils by speckle pattern interferometry. *Mechanics in Engineering*, 2005, 27(2): 22~25 (in Chinese))

THREE-POINT MICROBEND SIZE EFFECTS FOR PURE NI FOILS¹⁾

Feng Xiuyan* Guo Xianghua† Fang Daining† Wang Tzuchiang*,2)

**(State Key Laboratory of Nonlinear Mechanics, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)*

†*(Department of Engineering Mechanics, Tsinghua University, Beijing 100084, China)*

Abstract The three-point microbend tests are performed for the pure Ni foils with different thicknesses. The deflection and load are measured by employing the sequence pulse counting method and a high sensitive micro load-sensor, respectively. All experimental results are analyzed using couple stress theory by Fleck and Hutchinson in which only rotation gradient is considered. Based on the plane-strain model we have derived the differential equations and boundary conditions, which include the effect of couple stress. The differential equations are solved by the Runge-Kutta method. The numerical results are compared with the experimental data. There is no any fitting parameter in the present theoretical calculation. All material parameters are taken from the experimental measurements. The length scale is taken from the work of Stolken and Evans^[2]. The present theoretical predictions are in good agreement with the experimental data.

Key words couple stress, three-point microbend test, strain gradient plasticity, the Runge-Kutta method

Received 19 June 2006, revised 18 December 2006.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (10272103).

2) E-mail: tcwang@imech.ac.cn