

四边简支载流矩形薄板的磁弹性动力屈曲分析*

MAGNETIC-ELASTISITY BUCKLING OF A RECTANGULAR THIN CURRENT PLATE SIMPLY SUPPORTED AT EACH EDGE

王知人**^{1,3} 王平^{2,3} 白象忠^{2,3}

(1. 燕山大学 理学院, 秦皇岛 066004) (2. 燕山大学 建筑工程与力学学院, 秦皇岛 066004)
(3. 中国科学院力学研究所 国家非线性连续介质力学重点实验室(LNM), 北京 100080)

WANG ZhiRen^{1,3} WANG Ping^{2,3} BAI XiangZhong^{2,3}

(1. College of Sciences, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China)

(2. College of Civil Engineering and Mechanics, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China)

(3. State Key Laboratory of Nonlinear Continuum Mechanics (LNM), Beijing 100080, China)

摘要 在载流薄板的磁弹性非线性运动方程、物理方程、几何方程、洛仑兹力表达式及电动力学方程的基础上, 导出四边简支载流矩形薄板在电磁场与机械载荷共同作用下的磁弹性动力屈曲方程。应用 Galerkin 原理将该屈曲方程整理为 Mathieu 方程的标准形式, 并利用 Mathieu 方程解的稳定区域与非稳定区域的分界, 即方程系数的本征值关系, 得出磁弹性问题屈曲临界状态的判别方程。通过具体算例, 给出四边简支矩形板的磁弹性动力屈曲方程以及屈曲临界状态与相关参量之间的关系曲线, 并对计算结果及其变化规律进行分析讨论。

关键词 磁弹性 洛仑兹力 屈曲 Mathieu 方程 矩形薄板

中图分类号 O441

Abstract Based on the nonlinear magnetic-elasticity kinetic equations, physical equations, electrical kinetic equations and the expression of Lorentz force, the magnetic-elasticity kinetic buckling equation of a current plate applied mechanical load in a magnet field is given out. This equation is changed into the standard form of the Mathieu equation by using Galerkin method. The criterion equation of the magnetic-elasticity kinetic problem has been derived by the determination on the boundary line of steady and unsteady solution area of Mathieu equation, i. e. As an example, a rectangular plate simply supported at each edge is solved and its magnetic-elasticity kinetic buckling equation has been obtained here. The curves of the relations among the current density, the thickness of the plate and the current density, the magnetic strength when the plate is in the situation of critical buckling are shown. The conclusions may be the references for engineering application.

Key words Magnetic-elasticity; Buckling; Mathieu equation; Rectangular thin plate

Corresponding author: WANG ZhiRen, E-mail: wangzhiren528@sina.com.cn, Tel: +86-335-8066018, Fax: +86-335-8057101

The project supported by the National Natural Science Foundation of China (No. 50275128) and the Natural Science Foundation of Hebei Province (No. A2006000190), China.

Manuscript received 20060719, in revised form 20061011.

1 引言

杆、薄板、薄壳等基本结构元件屈曲问题的研究有广泛的工程背景和应用前景。例如汽车、船舶、飞行器外壳等的成形机理, 核聚变防护装置、大型桥梁的安全性设计和可靠性评估等都与结构元件的屈曲研究有密切关系。随着高新技术的发展, 电磁结构成为许多高新技术装置的主要结构元件, 如热核聚变反应堆中的第一壁结构、高速磁悬浮列车、微电子集成电路、大型

发电机以及各种电磁传感器和执行器等。在这些高科技装置中, 其结构在电磁场作用下的力学行为直接影响这些装置的安全性与品质因素, 因此, 对电磁场中载流构件的屈曲研究具有非常重要的理论及实际应用意义。

目前, 从对磁弹性屈曲理论的研究结果看, 主要集中在软铁磁材料板和铁磁性薄板的屈曲问题研究。Moon 和 Pao^[1] 以及 Popeler^[2] 基于线性化方法, 分别采用安培分子环流的磁化微观模型, 对横向磁场中铁磁

* 20060719 收到初稿, 20061011 收到修改稿。国家自然科学基金(50275128)、河北省自然科学基金资助项目(A2006000190)。

** 王知人, 女, 1964年5月生, 湖北黄石人, 汉族。燕山大学工程力学博士研究生, 研究方向为磁弹性理论及其应用。

板的磁弹性屈曲进行分析。文献[3-5]分别对铁磁性薄板的磁弹性线性理论进行讨论。文献[6]用能量原理分析铁磁板在静态磁场中的屈曲问题。文献[7-8][9]³⁴⁻⁴³研究了铁磁材料的梁板在磁场中的屈曲和后屈曲问题。近些年来,工程中存在许多涉及非铁磁构件,在电磁场与机械载荷作用下的屈曲问题,已有研究是以 Tokamak 核聚变反应堆环向磁场载流线圈为代表,对其载流线圈的磁弹性进行分析^{[9]34-43[10-11]};而对在强磁场作用下的非铁磁载流薄板、薄壳等结构元件的屈曲问题的研究,尚未见相关文献报道。

本文将载流构件磁弹性屈曲问题,由载流线圈、铁磁性弹性薄板,拓展到非铁磁载流薄板的动力屈曲问题的研究上,并采用 Mathieu 方程判别磁弹性屈曲的临界状态,得到相关参量的一些数值关系。通过算例分析,得出四边简支矩形薄板的磁弹性动力屈曲方程和屈曲临界状态下相关参量之间的关系曲线,并对其变化规律进行分析讨论。

2 基本方程

2.1 载流薄板的磁弹性动力屈曲方程的建立

对于载流弹性薄板,将沿厚度分布的洛仑兹力作为载荷简化到薄板的中面内,其分量分别记为 f_x 、 f_y 、 f_z ,将其加入到板运动方程^{[12]1-6},即可得到板的磁弹性运动方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} + P_x + f_x &= h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + P_y + f_y &= h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \\ P_z + f_z &= h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x &= \frac{h}{12} \frac{\partial^3 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y &= \frac{h}{12} \frac{\partial^3 v}{\partial t^2} \end{aligned}$$

式中, h 为板厚, P_x 、 P_y 、 P_z 为机械载荷分量, N_x 、 N_{xy} 、 N_{yx} 、 Q_x 、 Q_y 、 M_x 、 M_{xy} 、 M_y 为内力分量, u 、 v 为角位移分量。

2.2 薄板的磁弹性动力稳定方程

由于在薄板的动力屈曲问题中一般仅考虑挠度引起的惯性力,忽略位移 u 、 v 及转角引起的惯性力,忽略薄板自重的影响。根据薄板的小挠度理论,磁弹性运动方程可进一步简化为

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} +$$

$$N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + P_z + f_z = h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2)$$

弯矩与曲率改变量和挠度的关系为

$$\begin{aligned} M_x &= D_M (\kappa_x + \nu \kappa_y) = - D_M \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right\} \\ M_y &= D_M (\nu \kappa_x + \kappa_y) = - D_M \left\{ \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right\} \\ M_{xy} &= M_{yx} = D_M (1 - \nu) \kappa_{xy} = - D_M (1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (3)$$

其中, D_M 为薄板的抗弯刚度; $\kappa_x = - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ 、 $\kappa_y = - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ 、 $\kappa_{xy} = - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ 为曲率改变量与挠度的关系。将式(3)代入式(2)中整理得

$$\begin{aligned} - D_M \nabla^2 w + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \\ P_z + f_z &= h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (4)$$

设屈曲挠度解为

$$w(x, y, t) = W(x, y) \phi(t) \quad (5)$$

式中, $\phi(t)$ 表示时间 t 的函数, $W(x, y)$ 为屈曲挠度函数。

将屈曲挠度代入方程式(4)中,得载流薄板的磁弹性动力稳定性方程

$$\begin{aligned} - \frac{\nabla^2 W}{W} + \frac{1}{D_M W} \left[N_x \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \right. \\ \left. \frac{P_z + f_z}{\phi(t)} \right] &= \frac{h}{D_M \phi(t)} \frac{d^2 \phi(t)}{dt^2} \end{aligned} \quad (6)$$

3 载流薄板磁弹性动力屈曲临界状态的判别

在参数空间的某些区域中,参数的改变引起的运动变化很小,然而在另外一些区域中,参数的改变将引起振幅迅速增大趋于发散而发生屈曲破坏。因此动力屈曲的研究是要找出参数空间中这种收敛域与发散域的边界。现以四边简支矩形板为例,给出载流薄板磁弹性动力屈曲临界状态的计算及判别。

如图 1 所示,四边简支矩形板,长 a 、宽 b ,通侧向电流 $(0, J_{cl2}, 0)$,处于外加横向磁场 $(0, 0, B_3)$ 中。其

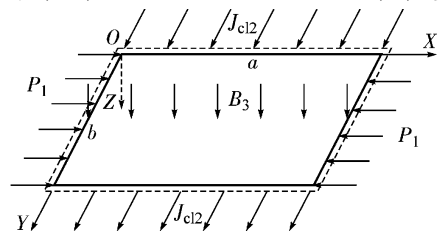


图 1 简支矩形薄板上电流磁场及机械载荷分布图

Fig. 1 The distribution diagram of the current, the magnetic field and mechanical load applied on the thin simply supported plate

中, J_{cl2} 为从 y 方向通入的侧向电流, B_3 为垂直于薄板中面的磁感应强度。四边简支薄板边界条件为

$$x = 0, a \quad w = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0, y = 0, b \quad w = \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0 \quad (7)$$

将 J_{cl2} 、 B_3 代入洛伦兹力的表达式^{[12][11-6]} 中可得 $f_y = 0$ 、 $f_z = 0$ 、 $f_x = J_{cl2} hB_3$, 且 f_x 可视为简化到中面上的均布质动力^[13]。设 P_1 、 P_2 、 P_{12} 分别为矩形板承受的中面压力, 有

$$N_x = \int_x^a f_x dx + P_1 = f_x(a - x) + P_1$$

$$N_y = P_2 \quad N_{xy} = P_{12}$$

将其代入动力稳定性方程式(6)中, 因无外加横向载荷 ($P_z = 0$), 可得

$$h \frac{\partial^2}{\partial t^2} W + \left\{ D_M \nabla^4 W - [f_x(a - x) + P_1] \times \right. \\ \left. \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - 2P_{12} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} - P_2 \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right\} (t) = 0 \quad (8)$$

由 Galerkin 原理有

$$\int_s \left\{ h \frac{\partial^2}{\partial t^2} W + [D_M \nabla^4 W - (f_x(a - x) + P_1) \times \right. \\ \left. \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - 2P_{12} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} - P_2 \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}] (t) \right\} W ds = 0 \quad (9)$$

设屈曲挠度函数为

$$W = \sum_{m=1} \sum_{n=1} A_{mn} \sin \frac{m}{a} x \sin \frac{n}{b} y \quad (10)$$

显然满足所有边界条件, 式中的 m 、 n 分别为 X 、 Y 方向板屈曲波形的半波数。将其代入式(9), 通过求导积分得

$$\sum_{m=1} \sum_{n=1} A_{mn} \left\{ h \frac{d^2}{dt^2} \frac{ab}{mn^2} [\cos(m) - 1] \times \right. \\ \left. (\cos(n) - 1) + [D_M \frac{ab^2}{mn} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \cos(m - 1) \times \right. \\ \left. (\cos(n) - 1) - (f_x a - P_1) \frac{bm}{am} (\cos(m) - 1) \times \right. \\ \left. (\cos(n) - 1) + f_x \frac{bm}{n} (\cos(n) - 1) \cos(m) + \right. \\ \left. P_2 \frac{an}{bm} (\cos(m) - 1) (\cos(n) - 1) \right\} (t) = 0$$

由于当 m 、 n 均为偶数时各项全为零, 故当 m 、 n 均为奇数时, 整理得

$$\sum_{m=1} \sum_{n=1} A_{mn} \left\{ h \frac{d^2}{dt^2} \frac{4ab}{mn^2} + [D_M \frac{4ab^2}{mn} \left(\frac{m^2}{a^2} + \right. \right. \\ \left. \left. \frac{n^2}{b^2} \right) + (f_x a + P_1) \frac{4bm}{an} - f_x \frac{2bm}{n} + \right.$$

$$\left. P_2 \frac{4an}{bm} \right\} (t) = 0 \quad (11)$$

因 A_{mn} 不能全部为零 (否则为平凡解), 故可令

$$h \frac{d^2}{dt^2} (t) \frac{4ab}{mn^2} + [D_M \frac{4ab^2}{mn} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) + (f_x a + \\ P_1) \frac{4bm}{an} - f_x \frac{2bm}{n} + P_2 \frac{4an}{bm}] (t) = 0 \quad (12)$$

将 $f_x = J_{cl2} hB_3$ 代入上述方程, 令 $(t) = T, J_{cl2} = J \cos(\bar{t})$ (\bar{t} 为电流的变化频率), 并设 $P_1 = P_{01} + P \cos(\bar{t})$, $P_2 = P_{02} + P \cos(\bar{t})$, 式中 P_{01} 、 P_{02} 分别为 P_1 、 P_2 的静载部分, P 为脉动中面载荷的振幅, 是中面载荷之间的比例系数。式(12)可整理得

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \left\{ D_M \frac{4}{h^2} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 + \frac{4}{h^2} \left[P_{01} \frac{m^2}{a^2} + \right. \right. \\ \left. \left. P_{02} \frac{n^2}{b^2} \right] + \frac{4}{h^2} \left[\frac{m^2}{a} J h B_3 + P \left(\frac{m^2}{a^2} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \frac{n^2}{b^2} \right) \right] \cos 2r \right\} T = 0$$

其中, $r = \frac{1}{2} \bar{t}$ 。最后可将方程整理为 Mathieu 方程

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + [- \cos(2r)] T = 0 \quad (13)$$

其中

$$= \frac{4}{h^2} \frac{m^2}{a^2} + \frac{4}{h^2} \left[P_{01} \frac{m^2}{a^2} + P_{02} \frac{n^2}{b^2} \right] \\ = \frac{4}{h^2} \left[- J h B_3 \frac{m^2}{2a} + P \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \right] \quad (14)$$

$$^2_{mn} = \frac{D_M}{h} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2$$

$^2_{mn}$ 为薄板自振圆频率, Mathieu 方程(13)是一种系数为周期函数的方程。此方程最重要的性质是它的系数间存在某种关系时, 方程式就具有无限增长的解。式中系数与之间的本征值关系, 是稳定解区域与非稳定解区域的分界。应用 Mathieu 方程的这种性质, 可确定载流薄板的失稳临界状态。由本征值关系式^{[14][156-158]}, 可得到动力稳定区与非稳定区的分界线, 而最低动力屈曲临界状态的求解更具有实际意义。

4 算例分析

现以四边简支矩形薄板为例, 放置如图 1 所示。通侧向电流 $(0, J_{cl2}, 0)$, 外加横向磁场 $(0, 0, B_3)$, 讨论其在电磁场作用下的稳定性问题。依据前面所得的判别方法, 令 $n = 0$, 得最低阶的四组本征值基本公式^{[14][156-158]}, $= a_0()$, $= b_2()$, $= a_1()$, $= b_1()$, 将其编制 Matlab 计算程序。计算采用的相关参

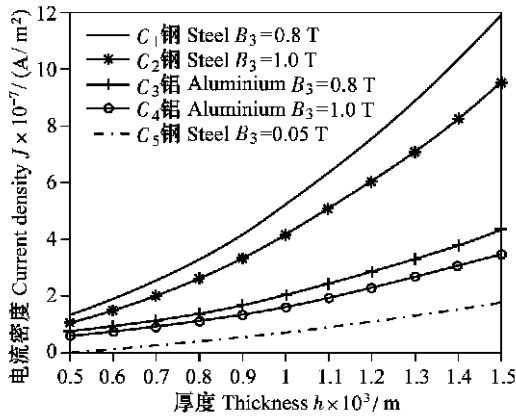


图2 板厚与临界电流密度的关系

Fig.2 The relation between the current density and the thickness of the plate

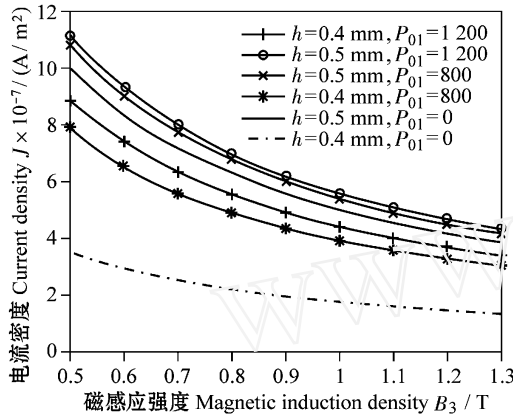


图3 磁感应强度与临界电流密度的关系

Fig.3 The relation between magnetic induction density and the current density

数为,板长 $a = 0.6 \text{ m}$ 、板宽 $b = 0.2 \text{ m}$,中碳钢的材料参数,质量密度 $= 7.80 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$,电导率 $= 0.63 \times 10^7 (\cdot \text{m})^{-1}$,弹性模量 $E = 210.0 \text{ GPa}$,泊松比 $= 0.25$,圆频率 $\bar{\omega} = 314.16 \text{ s}^{-1}$,磁导率 $\mu = 7.50 \times 10^{-3} \text{ H/m}$ 。铝板的材料参数,质量密度 $= 2.67 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$,电导率 $= 3.63 \times 10^7 (\cdot \text{m})^{-1}$,弹性模量 $E = 71.0 \text{ GPa}$,泊松比 $= 0.34$,圆频率 $\bar{\omega} = 314.16 \text{ s}^{-1}$,磁导率 $\mu = 1.25 \times 10^{-3} \text{ H/m}$ 。计算结果如图2、图3、图4、图5所示。

图2中,曲线 C_1 、 C_2 、 C_3 、 C_4 分别显示四边简支中碳钢薄板和四边简支铝制薄板在不同的磁感应强度下,屈曲临界电流密度随板厚的变化关系曲线。随着薄板厚度从 0.5 mm 增加到 1.5 mm ,且在板中面内施加载荷 $P_1 = P_{01} = 800 \text{ N/m}$ 时,屈曲临界电流密度也随之呈抛物线型增加,磁感应强度对薄板屈曲临界电流密度的数值影响较大。例如,厚度为 0.5 mm 的钢板,当 $B = 0.8 \text{ T}$ 时,屈曲临界电流密度 $J = 1.289 \times 10^7 \text{ A/m}^2$ (见曲线 C_1);当 $B = 1.0 \text{ T}$ 时,屈曲临界电流密度降低为 $J = 1.031 \times 10^7 \text{ A/m}^2$,降低了 20% (见曲线 C_2);

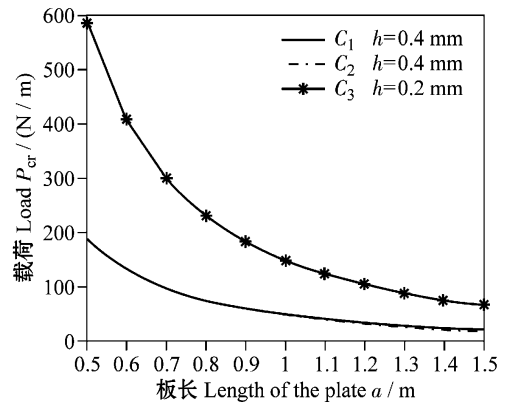


图4 板长与临界静载荷 Pcr 的关系

Fig.4 The relation between static load P_{cr} and length of the plate density and the current density

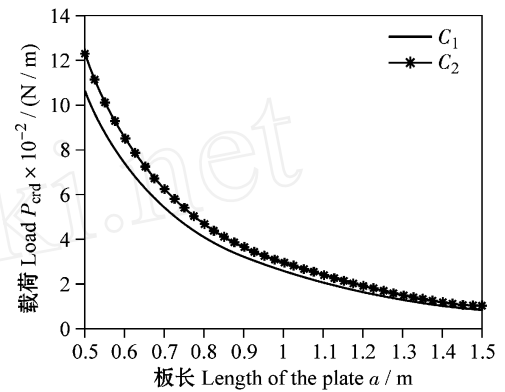


图5 板长与临界动载荷 Pcrd 的关系

Fig.5 The relation between dynamic load P_{crd} and length of the plate

对于厚度为 0.5 mm 的铝板,当 $B = 0.8 \text{ T}$ 、其他条件不变时,屈曲临界电流密度 $J = 7.848 \times 10^6 \text{ A/m}^2$ (见曲线 C_3);而铝板,当 $B = 0.8 \text{ T}$ 时,屈曲临界电流密度降低为 $J = 6.278 \times 10^6 \text{ A/m}^2$,也降低了 20% (见曲线 C_4)。说明材料性质不同,会显著地影响临界电流密度值。

对于厚度相同的钢板,在四边简支和三边简支(其中一边自由)不同的边界条件下,屈曲临界电流密度将显著不同,三边简支薄板的屈曲临界电流密度显著降低。当 $h = 0.5 \text{ mm}$ 、 $B = 0.05 \text{ T}$ 时,曲线 C_5 的屈曲临界电流密度仅为 $J = 5.935 \times 10^5 \text{ A/m}^2$ 。可见,边界条件由松散约束到紧密约束的变化,使得失稳临界电流密度也随之显著升高。即边界条件不同,临界电流密度则不同。

图3讨论四边简支中碳钢板,当板厚分别为 $h = 0.4 \text{ mm}$ 、 $h = 0.5 \text{ mm}$ 、板中面内仅分别施加载荷 $P_1 = P_{01} = 1200 \text{ N/m}$ 、 800 N/m 、 0 N/m 时,屈曲临界状态的电流密度 J 与外加磁感应强度 B_3 之间的关系。由图可见,当外加磁感应强度和 P_{01} 一定时,板厚的增加将使临界状态的电流密度有所增加。当磁感应强度在 $0.5 \text{ T} \sim 1.3 \text{ T}$ 之间变化时,随着磁感应强度的增加,

屈曲临界电流密度将降低。由于通过 Mathieu 方程求解的屈曲临界电流密度与磁场强度的关系较为复杂,在图 3 所讨论的条件下,随着磁感应强度的增加,屈曲临界电流密度逐渐降低,表明导电薄板在电磁场的作用下,通过改变通入电流的强度,可以控制薄板工作状态下的稳定性。

为了考核本文给出的计算方法的可靠性,又鉴于目前尚无相关计算资料,可在下面情况下与参考文献 [15]^{36-37,246-249} 的结果比较。

(1) 令 $J = 0, B_3 = 0, P_2 = 0, P_1 = P_{01}, P = 0$ 的静载作用时,方程 (13) 中的系数退化为

$$= \frac{4}{-2} + \frac{4}{h^{-2} a^2} P_{01} = 0$$

当板厚 $h = 0.4 \text{ mm}$ 、板长 a 从 0.5 m 增加到 1.5 m 时,其计算结果与采用文献 [15]³⁶⁻³⁷ 中 $P_x = \frac{D a^2}{m^2} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2$ 的计算结果由图 4 给出。图 4 中,曲线 C_2 表示由本文算法在无电磁场的情况下,得到的临界载荷 P_{cr} 与板长的关系,该曲线与按照参考文献 [15]³⁶⁻³⁷ 在相同数据时的计算结果 C_1 是基本吻合的,在图中已难以分出。

(2) 令 $J = 0, B_3 = 0, P_{01} = 0, P_1 = P \cos(\bar{t})$ 动载作用时,方程 (13) 中的系数退化为

$$= \frac{4}{-2} = \frac{4}{h^{-2} a^2} P$$

当板厚 $h = 0.4 \text{ mm}$ 、板长 a 从 0.5 m 增加到 1.5 m 时,其计算结果如图 5 中曲线 C_2 ,与采用参考文献 [15]²⁴⁶⁻²⁴⁹ 中的四边简支矩形板动力屈曲临界载荷第一屈曲形态表达式的计算结果(如图 5 中曲线 C_1) 相比较,两者的计算结果也是相当接近的,最大计算误差约为 13%。

在图 4 中,曲线 C_3 表示按本文算法,当板厚 $h = 0.2 \text{ mm}$ 、 $B = 0.1 \text{ T}$ 、 $J = 6 \times 10^3 \text{ A/m}^2$ 时得到的临界载荷 P_{cr} 与板长的关系。对比曲线 C_2 与 C_3 ,可见在电磁场的作用下,虽然板厚减少到 $h = 0.2 \text{ mm}$,但是板的失稳临界载荷将有较大的增幅。当板长 $a = 0.5 \text{ m}$ 、 $h = 0.2 \text{ mm}$ 时,曲线 C_3 给出的临界载荷为 590 N/m ;而在无电磁场作用下的曲线 C_2 给出的,当 $h = 0.4 \text{ mm}$ 时,临界载荷只有 185 N/m 。表明在电磁场的作用下,较薄的板比不在电磁场作用下厚板的临界载荷还高。这恰恰反映了载流薄板在电磁场作用下所产生的 Lorentz 力对载流矩形薄板是起稳定性作用的。在本文所描述的条件下,由于通入的 J_{c2} 为交变电流而使所产生的 Lorentz 力为一交变质动力 ($f_x = J_{c2} h B_3$, $J_{c2} = J \cos(\bar{t})$)。若载流薄板面内无外载荷作用时,

Lorentz 力本身会使载流薄板失稳,所以临界电流很低,如图 3 中 $P_{01} = 0$ 的两条曲线所示。当板承受外载荷后,Lorentz 力会抵消一部分外载荷的作用,而使临界载荷提高,如图 4、图 5 所示。而外载荷越大,为使薄板不发生失稳,在电磁感应强度一定的情况下,需要通入幅值较大的临界电流密度(如图 3 所示),这些都表明 Lorentz 力对载流薄板稳定性的作用。

5 结论

1) 判别载电流薄板在电磁场和机械载荷作用下的稳定性问题的临界状态方程,是根据 Mathieu 方程的稳定解区域与非稳定解区域的分界限的确定得到的。由此可定量计算载流薄板的磁弹性屈曲问题。

2) 载流薄板在电磁场作用下产生的 Lorentz 质动力,对载流矩形薄板的稳定性起到重要的控制作用。可以通过变化电磁场方向、强度和变化通电电流方向、密度,改变 Lorentz 质动力的工作状态,从而达到控制载流薄板的变形、应力应变状态及其稳定性的目的。

3) 在面内作用机械载荷时,施加法向电磁场与无电磁场作用情况相比较,可明显地提高载流薄板失稳时的临界载荷数值。

4) 外加磁感应强度的变化对载电流薄板屈曲的临界电流密度影响较大,减小外加磁感应强度可以有效提高临界电流密度。

参考文献 (References)

- [1] Moon F C, Pao Y H. Magnetoelastic buckling of a thin plate[J]. ASME J Appl Mech, 1968, 35(1): 53-58.
- [2] Popelar C H. Postbuckling analysis of a magnetoelastic beam[J]. J Appl Mech, 1972, 39: 207-211.
- [3] Maugin G A, Goudjo C. The equations of soft ferromagnetic elastic plates[J]. Int J Solids Struct, 1982, 18(10): 889-912.
- [4] Eringen A C. Theory of electromagnetic elastic plates[J]. Int J Engng Sci, 1989, 27(4): 363-375.
- [5] Moon F C. Earnshaw's theorem and magnetoelastic buckling of superconducting structures[C]. Proceedings of the IUTAM-IUPAP Symposium on the Mechanical Behaviors of Electromagnetic Solid Continua. Paris: Elsevier Science Pub. Co., 1983: 378-389.
- [6] Yang W, Pan H, Zheng D. Energy method for analyzing magnetoelastic buckling and bending of ferromagnetic plates in static magnetic fields[J]. Journal of Applied Mechanics, Transaction ASME, 1999, 66(4): 913-917.
- [7] Zheng Xiao-jing. Buckling and post-buckling of a ferromagnetic beam-plate induced by magneto-elastic interactions[J]. Interactions. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2000, 35(6): 1059-1065.
- [8] Zhou You-he, Gao Yuanwen, ZHENG Xiao-jing. Buckling and post-buckling analysis for magneto-elastic-plastic ferromagnetic beam-plates with unmovable simple supports[J]. Int. J. Solids and Structures, 2003(40): 2875-2887.
- [9] 王省哲, 郑晓静, 周又和. 非圆 Tokamak 载流线圈的磁弹性分析

- [J]. 兰州大学学报(自然科学版), 1999, 35(1): 34-43.
WANG XingZhe, ZHENG XiaoJing, ZHOU YouHe. Analysis of magnetoelastic interaction of non-circular current-carrying coils in Tokamak device[J]. Journal of Lanzhou University (Natural Sciences), 1999, 35(1): 34-43(In Chinese).
- [10] 方葛丰, 谢慧才, 王满德. 托卡马克超导环场线圈的磁弹性屈曲[J]. 固体力学学报, 1991, 12(2): 151-158.
FANG GeFeng, XIE HuiCai, WANG DeMan. Magnetoelastic buckling of Tokamak super-conducting toroidal field coils[J]. Acta Mechanica Solida Sinica, 1991, 12(2): 151-158(In Chinese).
- [11] 王海滨, 周又和, 郑晓静. 超导磁体感应电流及其对电磁弹性动力稳定性的影响[J]. 核聚变与等离子体物理, 2003, 23(1): 1-6.
WANG HaiBin, ZHOU YouHe, ZHENG XiaoJing. Induced current in superconducting coils and its effect on dynamic stability[J]. Nuclear Fusion and Plasma Physics, 2003, 23(1): 1-6(In Chinese).
- [12] 白象忠. 板壳磁弹性理论基础[M]. 北京: 机械工业出版社, 1996: 156-158.
BAI XiangZhong. Fundamental magnetic-elasticity theory of plates and shells[M]. Beijing: Mechanical Industry Press, 1996: 156-158(In Chinese).
- [13] 莫宵伊, 计伊周, 王忠民. 矩形薄板在非保守力作用下的动力稳定性[J]. 西安理工大学学报, 2000, 16(4): 370-375.
MO Xiao Yi, JI Yi Zhou, WANG ZhongMin. Dynamic stability of rectangular plates under the action of nonconservative forces[J]. Journal Xi'an University of Technology, 2000, 16(4): 370-375(In Chinese).
- [14] 王竹溪, 郭敦仁. 特殊函数概论[M]. 北京: 北京大学出版社, 2000: 601-628.
WANG ZuXi, GUO DunRen. Summary of special function[M]. Beijing: Beijing University Press, 2000: 601-628(In Chinese).
- [15] 吴连元. 板壳稳定性理论[J]. 武汉: 华中理工大学出版社, 1996: 36-37; 1996: 246-249.
WU LianYuan. Stability theory of plates and shells[M]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology Press, 1996: 36-37; 1996: 246-249(In Chinese).

www.cnki.net