

文章编号: 1000-4750(2008)10-0033-05

# 颗粒复合材料断裂的梁网格模型

\*刘金兴, 邓守春, 张 晶, 梁乃刚

(中国科学院力学研究所非线性力学国家重点实验室, 北京 100080)

**摘 要:** 通过发展一种三段式单元, 改进了颗粒复合材料的梁网格断裂模型。根据单元内各段交接处的平衡条件推导了单元刚度矩阵。与已有的模型相比, 改进的模型能够更加真实的反映颗粒和基体之间的界面区域, 并且能够容纳小于网格尺寸的颗粒。计算结果表明利用改进的模型能够得到合理的力-位移关系和断裂模式。

**关键词:** 梁网格模型; 颗粒复合材料; 微结构; 断裂; 单元刚度矩阵

**中图分类号:** O346.1; TU528.1 **文献标识码:** A

## BEAM LATTICE MODELING FOR THE FRACTURE OF PARTICLE COMPOSITES

\*LIU Jin-xing, DENG Shou-chun, ZHANG Jing, LIANG Nai-gang

(State Key Laboratory of Nonlinear Mechanics, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

**Abstract:** The beam lattice fracture model for particle composites is improved by adopting a three-fragment element. The element stiffness matrix is derived based on equilibrium conditions at joints between fragments. A comparison with the existing model shows that the improved model can simulate the interface zone between aggregate and matrix more realistically, and can include aggregates smaller than the lattice's discretization size. Numerical results show that the improved model can simulate force-displacement relations and crack patterns.

**Key words:** beam lattice model; particle composites; micro-structure; fracture; element stiffness matrix

在诸如混凝土之类的颗粒复合材料中, 微观层次上的非均匀结构对裂纹的扩展有至关重要的影响。通常把颗粒复合材料作为由基体、颗粒和两者之间的界面组成的三相材料<sup>[1-2]</sup>。因为网格模型直观简单, 所以被许多学者用于研究这种非均匀性对宏观响应的影响。

最早, Hrennikoff<sup>[3]</sup>等利用网格模型成功解决了许多弹性力学问题。随后, 该种模型被用于模拟非均匀介质的断裂过程<sup>[4]</sup>。为了研究颗粒复合材料的断裂问题, 过去已经陆续出现了许多种网格模型。通常认为, 把材料结构直接投射到网格上, 比随机分布材料性质更接近真实情况<sup>[1-2]</sup>。Bazant 等<sup>[5]</sup>使

用杆网格, 需要采取措施避免裂纹扩展造成的计算不稳定。Schlangen 等<sup>[6]</sup>采用欧拉-伯努利梁。Bolander 等<sup>[7]</sup>所用的所谓“弹簧”单元, 只在特定情况下才等同于欧拉-伯努利梁。因为网格中梁的深跨比较大, 所以铁木辛柯梁网格比欧拉-伯努利梁网格更为准确<sup>[2,8]</sup>。

尽管梁网格正被广泛使用, 但是它仍然存在待改进之处。它对界面的模拟非常粗糙, 而且无法容纳粒径小于网格尺寸的颗粒。本研究发展了一种新型单元, 弥补了上述不足, 使梁网格模型得以改进。新型单元分为颗粒段、界面段和基体段三部分, 每一部分用铁木辛柯梁理论<sup>[9]</sup>表述。在改进的模型中,

收稿日期: 2007-01-20; 修改日期: 2007-04-24

基金项目: 国家自然科学基金项目(10572140, 10232050); 国家科技部“973”项目(2002CB412706)

作者简介: \*刘金兴(1979—), 男, 山东潍坊人, 博士生, 从事固体的尺度效应与损伤断裂研究(E-mail: liujx@lnm.imech.ac.cn);

邓守春(1974—), 男, 湖北宜昌人, 博士生, 从事固体弹塑性损伤断裂的一致性本构关系研究(E-mail: dengsc@imech.ac.cn);

张 晶(1976—), 女, 山东泰安人, 博士生, 从事固体弹塑性损伤断裂的一致性本构关系研究(E-mail: zhangj@lnm.imech.ac.cn);

梁乃刚(1944—), 男, 河南博爱人, 研究员, 博士, 从事计算固体力学研究。

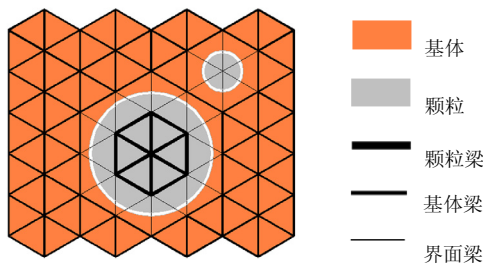
界面梁的尺寸由微结构确定，具有界面相属性；颗粒梁和基体梁可以借鉴梁网格模型的思想<sup>[2]</sup>标定。

对于理想脆性网格，一旦单元失效准则确定，模拟的一般流程如下<sup>[2,10]</sup>。逐步施加控制位移进行线性分析，直到有效应力与强度之比最大的梁到达指定破坏阈值，记录此时的位移场作为破坏过程的一个状态。然后，去掉该比值最大的梁并且更新整个有限元网格的总刚度矩阵，在保持外加控制位移恒定的前提下进行新的计算，检查其他单元是否失效。若否，从零载荷开始重新启动计算。重复上述过程直到样品整体失效。

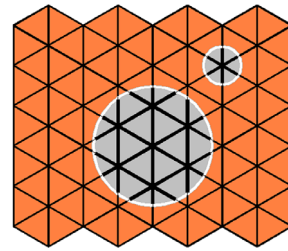
### 1 改进的梁网格模型

在图 1(a)所示的梁网格模型中，如果梁单元两端都处于颗粒(基体)相，那么给该单元分配等效颗粒(基体)性质。如果单元两端分处在基体相和颗粒相，那么给该单元分配等效界面性质。这样处理存在两种后果：首先，虽然表征界面的单元实际上包含颗粒、界面和基体三相，但是梁网格将该种单元处理为均质的界面单元，例如图 1(a)中较大颗粒周围的界面单元就是如此；其次，梁网格无法容纳粒径小于网格尺寸的颗粒，如图 1(a)中较小颗粒覆盖的区域全部被处理为界面单元。

本文发展了一种三段式的新型单元，从而弥补了上述不足，如图 1(b)所示。图 2 表明了未改进单元(图 2(a))与新型单元(图 2(b))的区别。这种新型单元，分为材料性质各异的三段。每一段都用铁木辛柯梁理论来表述。假设新型单元中各段交接处粘结牢固，有共同的变形，不产生滑移。此时单元内两个交接处的广义位移完全由单元两端的广义位移决定(详见第 3 节)，所以交接处的自由度不进入总体有限元方程。结果，改进的梁网格模型在不增加计算代价的情况下更加准确的反映了材料结构。



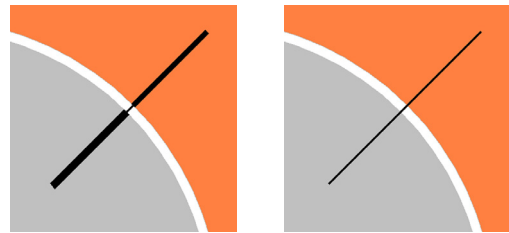
(a) 现有网格



(b) 改进网格

图 1 两种梁网格的比较

Fig.1 Comparison of two beam lattice models



(a) 现有单元

(b) 改进单元

图 2 两种界面单元的比较

Fig.2 Comparison of two interface elements

### 2 改进的梁网格的参数标定

三段式单元内，界面梁的跨度等于界面层的厚度(图 2(b))。界面层厚度因材料类型而有所不同。界面梁的深度计算方法如下：设包裹某颗粒的界面层穿过了  $n$  个单元，那么这  $n$  个单元中界面梁的深度都等于此界面层周长的  $n$  分之一。界面梁具有与界面相相同的材料参数。

单元中颗粒(基体)梁的跨度等于单元被颗粒(基体)所覆盖部分的长度。颗粒(基体)梁的深度根据计算所取的深跨比而确定。根据应变能等效标定颗粒(基体)梁的材料属性。Karihaloo<sup>[4]</sup>已经用该方法标定了规则三角铁木辛柯梁网格，我们在本文的变量体系里直接应用他们的结果：

$$\frac{E}{E^{(b)}} = \sqrt{3} \left( \frac{l}{h} \right) \frac{t^{(b)}}{t} \frac{4 + \left( \frac{l}{h} \right)^2 \frac{1}{1+b}}{12 + \left( \frac{l}{h} \right)^2 \frac{1}{1+b}} \quad (1)$$

$$\nu = \frac{4 - \left( \frac{l}{h} \right)^2 \frac{1}{1+b}}{12 + \left( \frac{l}{h} \right)^2 \frac{1}{1+b}} \quad (2)$$

其中： $E^{(b)}$  和  $E$  分别是铁木辛柯梁和连续介质的弹性模量； $\nu$  是连续介质的泊松比； $h$  和  $l$  分别是铁

木辛柯梁的跨度和深度;  $t^{(b)}$  和  $t$  分别是铁木辛柯梁的厚度和连续介质的厚度。而:

$$b = \frac{12 + 11\nu^{(b)}}{20} \left(\frac{l}{h}\right)^2 \quad (3)$$

其中  $\nu^{(b)}$  是铁木辛柯梁的泊松比。

经过一系列代数运算, 得到:

$$\nu^{(b)} = \frac{5(1+\nu)}{11(1-3\nu)} - \frac{20}{11} \left(\frac{l}{h}\right)^{-2} - \frac{12}{11} \quad (4)$$

$$E^{(b)} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{l}{h}\right)^{-1} \frac{t}{t^{(b)}} \frac{E}{1-\nu} \quad (5)$$

本文中对于所有梁,  $l/h=1$ ,  $t^{(b)}=t=1\text{mm}$ 。基体材料和颗粒材料的泊松比都为  $11/40$ 。此时根据式(4)和式(5), 颗粒(基体)梁的等效材料属性  $\nu^{(b)}$  和  $E^{(b)}$  分别为:

$$\nu^{(b)} = \frac{31}{77} \quad (6)$$

$$E^{(b)} = \frac{80}{29\sqrt{3}} E \quad (7)$$

### 3 新型单元的刚度矩阵

图 3 所示的新型单元, 由颗粒梁  $i-I$ 、界面梁  $I-J$  和基体梁  $J-j$  顺次粘结而成。这三种梁的单元刚度矩阵分别表示为  $M^a$ 、 $M^i$  和  $M^m$ 。令  $M_I^a$ 、 $M_{II}^a$  和  $M_{III}^a$  分别表示  $M^a$  的左上角、右上角和右下角的  $3 \times 3$  的矩阵。同样的命名规则也适用于  $M^i$  和  $M^m$ 。根据  $I$  和  $J$  处广义力平衡条件, 列出以  $I$  和  $J$  的广义位移为自变量的线性代数方程组, 解该方程组可求出  $I$  和  $J$  的广义位移与  $i$  和  $j$  的广义位移之间的关系:

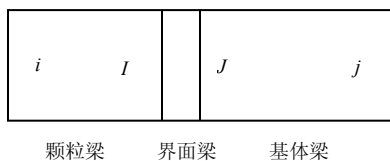


图 3 新型单元

Fig.3 An improved element

$$\begin{Bmatrix} u_I \\ v_I \\ \varphi_I \\ u_J \\ v_J \\ \varphi_J \end{Bmatrix} = \underbrace{A^{-1}B}_{R} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \varphi_i \\ u_j \\ v_j \\ \varphi_j \end{Bmatrix} \quad (8)$$

其中,

$$A = \begin{bmatrix} M_{III}^a + M_I^i & M_{II}^i \\ (M_{II}^i)^T & M_{III}^i + M_I^m \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$B = \begin{bmatrix} -(M_{II}^a)^T & 0 \\ 0 & -M_{II}^m \end{bmatrix} \quad (10)$$

令  $R_I$ 、 $R_{II}$  和  $R_{III}$  分别表示  $R$  的左上角、右上角和右下角的  $3 \times 3$  的矩阵, 则经过一系列简单的线性代数运算, 新型单元的刚度矩阵最终可表示为:

$$K = \begin{bmatrix} M_I^a + M_{II}^a R_I & M_{II}^a R_{II} \\ (R_{II})^T (M_{II}^a)^T & (M_{II}^m)^T R_{III} + M_{III}^m \end{bmatrix} \quad (11)$$

其中  $K$  是一个对称矩阵。

### 4 非线性计算方案

铁木辛柯梁的最大拉应力计算如下<sup>[1-2]</sup>:

$$\sigma_{eff} = \frac{N}{A} + \alpha \frac{(|M_i|, |M_j|)_{\max}}{W} < f_t \quad (12)$$

其中:  $N$  是梁中以拉为正的轴向力;  $M_i$  和  $M_j$  是节点  $i$  和  $j$  上的力矩;  $W = t^{(b)}l^2/6$  为截面模量; 系数  $\alpha$  用于调节力矩影响的大小, 本文取与文献[1-2,8]相同的值, 即  $\alpha=0.005$ 。

对整体网格进行线弹性分析, 对于每个广义梁单元, 分别判断其内每段梁的有效应力。有效应力首先达到破坏阈值的梁将破坏, 材料的开裂过程通过梁的依次破坏来模拟。例如, 对于图 3 所示的单元, 施加载荷后, 依次计算出颗粒梁  $i-I$ 、界面梁  $I-J$  和基体梁  $J-j$  各自的有效应力, 把首先达到破坏阈值者从网格中剔除, 以表示其发生了破坏。例如, 如果是界面梁  $I-J$  达到破坏条件, 那么将它剔除, 剔除后单元  $i-j$  中  $I$  和  $J$  之间形成了“空缺”, 用该“空缺”表示该处界面的失效。

### 5 算例

复合材料平板的拉伸实验是考察其断裂行为的常用实验<sup>[1-2,11]</sup>, 本文使用改进的模型模拟此实验以检验模型的有效性。采用规则三角网格, 共有 14234 个单元和 4837 个节点。所有单元的长度是  $L = \sqrt{3} \text{ mm}$ 。所有界面梁的跨度是  $\sqrt{3}/10 \text{ mm}$ 。把粒径为  $[0.5, 3.5] \times \sqrt{3} \text{ mm}$  的颗粒随机放入网格中。每种尺寸的颗粒数目如表 1 所示。各相材料均为理想脆性, 材料属性与文献[11]所用材料参数相同, 如表 2 所示。在板的左端面上施加固定边界条件,

所有的平移自由度被约束，而在右端面通过位移控制的方式施加均匀拉伸。

表 1 颗粒尺寸数目对应表

Table 1 Aggregate distribution

颗粒尺寸	0.5L	1.5L	2.5L	3.5L
颗粒数目	80	60	40	20

表 2 三相材料属性表

Table 2 Material properties of phases

材料属性	$E$ /GPa	$f_i$ /MPa
颗粒	70	10.0
界面	25	1.25
基体	25	5.0

载荷位移  $P-\delta$  曲线如图 4 所示，以最高点  $a$  为界分为上升段和下降段。在上升段，载荷  $P$  随位移呈近似线性增长，样品中出现了零散的界面梁的失效(图 5(a))。但是在将要到达最高点  $a$  时表现出强烈的非线性变化，这是因为失效单元数目的增加导致了试件抗变形能力的明显下降。从图 5(a)可见，直到最高点  $a$ ，仍未出现局部化裂纹。在最大载荷之后出现了一系列载荷突降(图 4)。在一些颗粒周围陆续出现局部化的裂纹(图 5(b))。这些裂纹是由颗粒周围失效的界面梁汇合而成。界面是三相系统里的最弱相，因此失效界面梁释放出的力能够被更高强度的基体单元所吸收。结果，这些在颗粒周围产生的裂纹的进一步扩展被外侧的基体单元暂时阻止。随后，在更多的颗粒周围出现了局部裂纹(图 5(c))。随着控制位移的继续增加，距离较近的局部裂纹间的基体单元由于应力集中程度的不断增大而失效，因此分散的局部裂纹发生了汇合，从而形成了更长的宏观裂纹(图 5(d))。控制位移的增加使得各宏观裂纹之间也陆续发生了贯通，出现了横贯样品的裂纹(图 5(e))。裂纹两边的区域变为卸载状态。图 5(f)是实验结束时的裂纹模式。

简言之，从图 4 载荷-位移曲线上可以看出材料的软化性质，但是与实验结果相比较为脆性，这是由于把实际的三维材料微结构简化为二维所致<sup>[1,11-12]</sup>。图 5 所反映的断裂过程中，先出现离散微裂纹，然后微裂纹汇合成宏观裂纹，最后宏观裂纹的扩展和汇合导致整体失效。此裂纹模式与文献[1-2,11-12]中试验结果以及模拟结果均吻合。

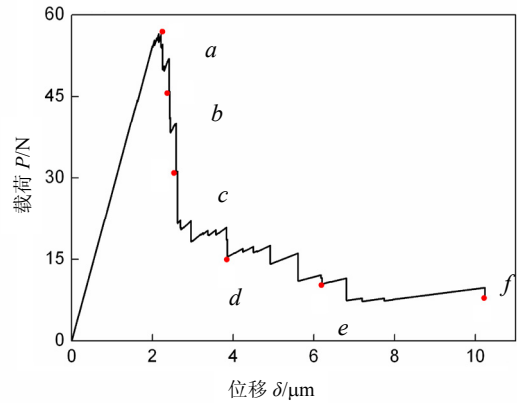


图 4 数值模拟所得的  $P-\delta$  曲线

Fig.4 The  $P-\delta$  curve obtained by numerical simulation

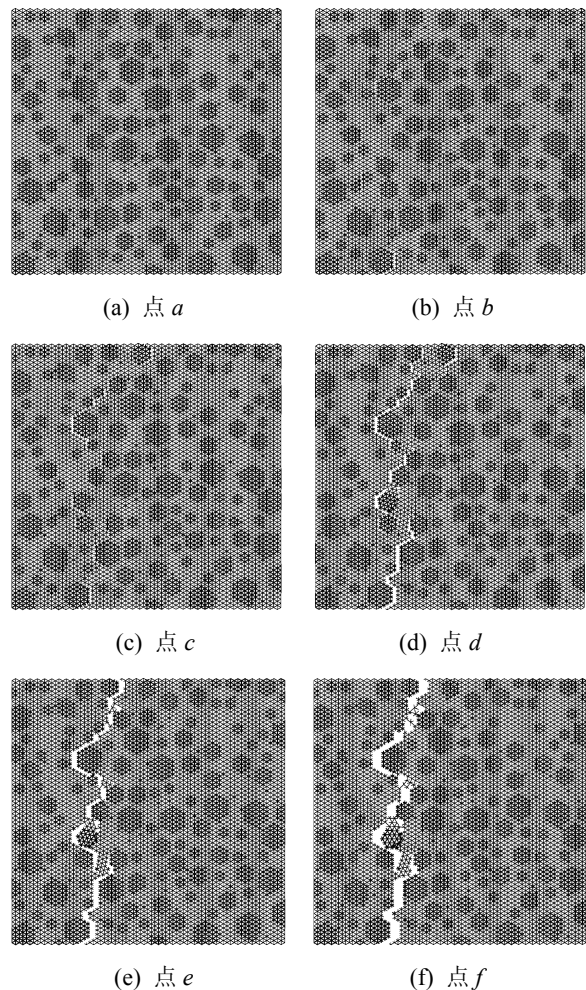


图 5 图 4 中的典型载荷水平上的裂纹模式

Fig.5 Crack patterns at typical load levels in Fig. 4

## 6 结论

本文改进了梁网格模型。能够更加准确地模拟界面附近的材料结构，并且能够容纳粒径小于网格

尺寸的颗粒。介绍了网格的标定方法和新型单元的刚度矩阵推导过程。数值算例表明,改进的梁网格模型是模拟断裂现象的一种有效工具。

#### 参考文献:

- [1] van Mier J G M, van Vliet M R A, Wang T K. Fracture mechanisms in particle composites: statistical aspects in lattice type analysis [J]. *Mech Mater*, 2002, 34: 705—724.
- [2] Karihaloo B L, Shao P F, Xiao Q Z. Lattice modelling of the failure of particle composites [J]. *Engng Fract Mech*, 2003, 70: 2385—2406.
- [3] Hrennikoff A. Solution of problems of elasticity by the framework method [J]. *J. Appl. Mech.*, 1941, 12: 169—175.
- [4] Herrmann H J, Roux S. Statistical models for the fracture of disordered media [M]. North-Holland: Elsevier Science, 1992.
- [5] Bazant Z P, Tabbara M R, Kazemi M T, Pijaudier-Cabot G. Random particle model for fracture of aggregate for fiber composites [J]. *ASCE J Engng Mech*, 1990, 116: 1686—1705.
- [6] Schlangen E, van Mier J G M. Experimental and numerical analysis of micromechanisms of fracture of cement-based composites [J]. *Cement Concrete Compos*, 1992, 14: 105—118.
- [7] Bolander J E, Saito S. Fracture analyses using spring networks with random geometry [J]. *Engng Fract Mech*, 1998, 61: 569—591.
- [8] Ince R, Arslan A, Karihaloo B L. Lattice modeling of size effect in concrete strength [J]. *Engng Fract Mech*, 2003, 70: 2307—2320.
- [9] 王勖成. 有限单元法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2003.  
Wang Xucheng. Finite element method [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2003. (in Chinese)
- [10] Ostoja-Starzewski M. Lattice models in micromechanics [J]. *Appl Mech Rev*, 2002, 55: 35—60.
- [11] Lilliu G, van Mier J G M. 3D lattice type fracture model for concrete [J]. *Engng Fract Mech*, 2003, 70: 927—941.
- [12] 杨强, 任继承, 张浩. 岩石中锚杆拔出试验的数值模拟 [J]. *水利学报*, 2002, 12: 68—73.  
Yang Qiang, Ren Jicheng, Zhang Hao. Numerical simulation of the pullout of anchor in rock [J]. *Journal of Hydraulic Engineering*, 2002, 12: 68—73. (in Chinese)

(上接第 24 页)

- [10] 王光远. 论时变结构力学[J]. *土木工程学报*, 2000, 33(6): 105—108.  
Wang Guangyuan. On mechanics of time-varying structures [J]. *China Civil Engineering Journal*, 2000, 33(6): 105—108. (in Chinese)
- [11] 李浩, 唐圣业, 陈璞. 两种高层建筑施工模拟快速计算方案[J]. *工程力学*, 2006, 23(7): 87—92.  
Li Hao, Tang Shengye, Chen Pu. Two fast strategies for high-rise building construction simulation [J]. *Engineering Mechanics*, 2006, 23(7): 87—92. (in Chinese)
- [12] 王勖成, 邵敏. 有限单元法基本原理和数值方法[M]. 北京: 清华大学出版社, 1997.  
Wang Xucheng, Shao Min. Principles and numerical methods in finite element procedures [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1997. (in Chinese)