

[文章编号] 1001-246X(2007)02-0181-06

# 矩形微槽道气体流动的速度分布

杨学军, 蒋建政, 樊 菁

(中国科学院力学研究所高温气体动力学重点实验室, 北京 100080)

[摘 要] 矩形微槽道的各个流向截面可以局部近似为平面 Poiseuille 流动, 应用信息保存 (IP) 方法和直接模拟 Monte Carlo (DSMC) 方法计算了从连续介质区到自由分子流区的平面 Poiseuille 流动, 利用其结果对 Beskok - Karniadakis 公式和质量流率动理论因子进行修正和重新拟合, 给出在整个稀薄气体流动领域都适用的微槽道气体流动速度分布.

[关键词] 矩形微槽道; 稀薄气体流动; IP 方法; 速度分布

[中图分类号] V211 [文献标识码] A

## 0 引言

微槽道气体流动是近年来微尺度流动的研究重点之一,它具有简单的几何形状,便于理论分析和实验研究,而且矩形截面的微槽道是目前微机电系统 (MEMS) 加工技术易于实现的几何形状之一,也是已有 MEMS 器件如传感器、阀门、泵、喷管等的基本单元,因此了解其气动特性对于实际 MEMS 器件的设计和优化有重要意义.

在微槽道气体流动的实验研究中<sup>[1-6]</sup>, Knudsen 数 ( $Kn$ ) 变化范围从  $10^{-3} \sim 10^0$ , 涵盖了连续介质区、滑流区和过渡领域. 相当多的理论研究仍从 Navier-Stokes 方程出发,但在物面引入速度滑移和温度跳跃边界条件<sup>[7-9]</sup>,以反映滑流区流动的边界特点. 过去 40 年在动理论基础发展起来的直接模拟 Monte Carlo (DSMC) 方法<sup>[10,11]</sup>,是目前分析稀薄气流特别是过渡领域流动的主要工具. DSMC 方法处理航天领域的高速问题很成功,但作为一种统计模拟方法,在处理微尺度气流中常见的低 Mach 数流动,遇到统计涨落的困难. 文[12,13]提出的信息保存 (IP) 方法克服了这个困难,对于经典的 Rayleigh 流动,当平板启动速度为  $1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  时,IP 方法达到统计收敛的时间仅为 DSMC 方法的  $1/30\,000$ . 在典型的微尺度内流 (微槽道流动) 和外流 (微平板绕流) 模拟中,IP 方法均给出与实验相符的结果<sup>[14-16]</sup>.

本文目的是利用 IP 方法,结合文[17]中微槽道质量流率和流向压力分布的解析表达式,对微槽道气流速度分布的 Beskok-Karniadakis (B-K) 公式<sup>[7]</sup>予以修正,给出整个流动领域普适的速度分布公式,更好的反映微尺度内流的基本特点,并方便实际应用.

## 1 IP 方法

信息保存 (IP) 方法由文[12]首先提出. 在直接模拟中流体介质的质量、动量和能量输运通过分子运动实现,这样的输运方式反映了物理实际,当然适合于全部流动领域. 连续介质方法,在连续介质基本假设下认为所有宏观物理量是连续分布的,其以大量分子的集体属性 (宏观量) 作为研究的基本对象. 这些宏观量 (如宏观密度、速度和温度等) 通过各种守恒方程及本构关系描述. 但是现有的输运守恒方程只在连续介质领域适用.

DSMC 模拟方法在整个流动领域内都适用,守恒方程计算速度快. IP 方法结合了 DSMC 方法和守恒方程的优点. 其基本出发点是认为模拟分子除了反映分子运动性质外还可以作为宏观量输运的介质,即利用模拟

[收稿日期] 2005-12-26; [修回日期] 2006-06-07

[基金项目] 国家自然科学基金 (90205024 和 10425211) 资助项目

[作者简介] 杨学军 (1979-), 男, 河北保定, 硕士, 主要从事微尺度气体流动模拟.

分子在分子运动的同时输运宏观属性.

IP 方法赋予 DSMC 方法中每个模拟分子 2 个速度: 分子速度,用来计算分子运动轨迹; 信息速度,反映单个模拟分子所代表的大量真实分子的平均速度. 流场宏观物理量如加速度、表面剪应力等可通过统计平均信息速度获得. IP 方法的具体实现步骤见文[11](文[18]有更详细介绍).

## 2 B-K 修正公式

矩形截面的微槽道流动的每个流向截面都可以当作一个平面 Poiseuille 流动(图 1),即在一定压力梯度驱动下运动的一维流动. 但与经典的 Poiseuille 流动不同的是,其中的压力梯度不再是常数.

对于一阶速度滑移模型,

$$u_w = f(Kn) \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_w, \quad (1)$$

其中  $f(Kn)$  为关于  $Kn$  数的函数,  $w$  表示壁面.

Navier-Stokes 方程给出的速度分布为

$$u/u_c = [-y^2 + y^* + f(Kn)]/[0.25 + f(Kn)]. \quad (2)$$

其中  $u_c$  是中心速度,  $y^* = y/h$ ,  $Kn = \lambda/h$ ,  $\lambda$  是分子平均自由程,  $h$  为微槽道高度.

Beskok 和 Karniadakis 的研究表明<sup>[7]</sup>,经典 Maxwell 模型  $f(Kn) = Kn$  对应的 Poiseuille 流动的速度剖面在过渡领域明显偏离 DSMC 结果,在他们建议的一阶速度滑移模型中

$$f(Kn) = Kn/(1 + Kn). \quad (3)$$

图 2 比较了 IP 方法、Maxwell 模型和 B-K 模型给出的 Poiseuille 流动速度分布.  $Kn = 0.01$  和  $0.1$ (图 2(a) 和 2(b)),3 种结果符合得很好;  $Kn = 1$ (图 2(c)),B-K 模型与 IP 结果符合很好,但 Maxwell 模型结果与它们显著偏离;  $Kn = 10$ (图 2(d)),B-K 模型结果开始偏离 IP 结果,并随着  $Kn$  数进一步增大愈加明显(图 2(e), 2(f)). 在以上的比较中,IP 方法结果可以作为标准,因为它已经过严格的检验<sup>[13]</sup>,在连续介质区和自由分子流区与准确解一致,在滑流区和过渡领域与线化 Boltzmann 方程数值解和实验数据符合. Poiseuille 流动的 IP 方法模拟细节见文[13].

通过拟合图 2 中的 IP 方法结果,我们将 B-K 模型(3)修正为

$$f(Kn) = 0.8 \left[ \frac{Kn}{1 + Kn} \right] + 0.09 \sqrt{Kn}. \quad (4)$$

将式(4)代入式(2)给出的速度分布(图 2 中的实线),与原先的 B-K 模型相比,在  $Kn = 10$  时有明显改善,它与 IP 结果的最大差别小于 2%.

## 3 质量流率的修正因子 $\phi(Kn)$

平面 Poiseuille 流动的质量流率

$$M_k = \rho \int_0^h u dy, \quad (5)$$

其中  $\rho$  是气体密度,  $w$  是微槽道宽度,将式(2)代入式(5)并积分有

$$M_k = \rho w \int_0^h \left[ \frac{-y^2 + y^* + f(Kn)}{0.25 + f(Kn)} \right] u_c h dy^* = \frac{2}{3} \frac{u_c w h}{1 + 4f(Kn)}. \quad (6)$$

微槽道质量流量守恒要求

$$dM_k/dx = 0. \quad (7)$$

因为微槽道的各个流向截面可以局部近似为 Poiseuille 流动,故

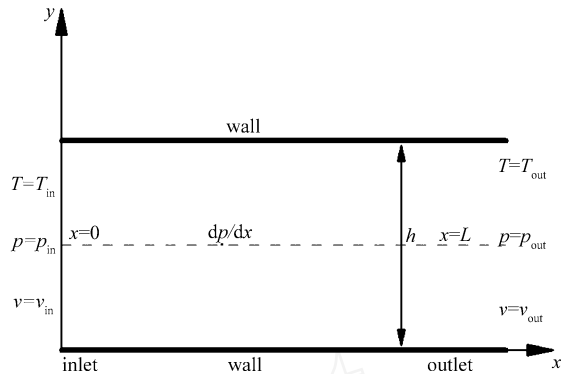


图 1 平面 Poiseuille 流动示意图

Fig. 1 Schematic of a plane Poiseuille flow

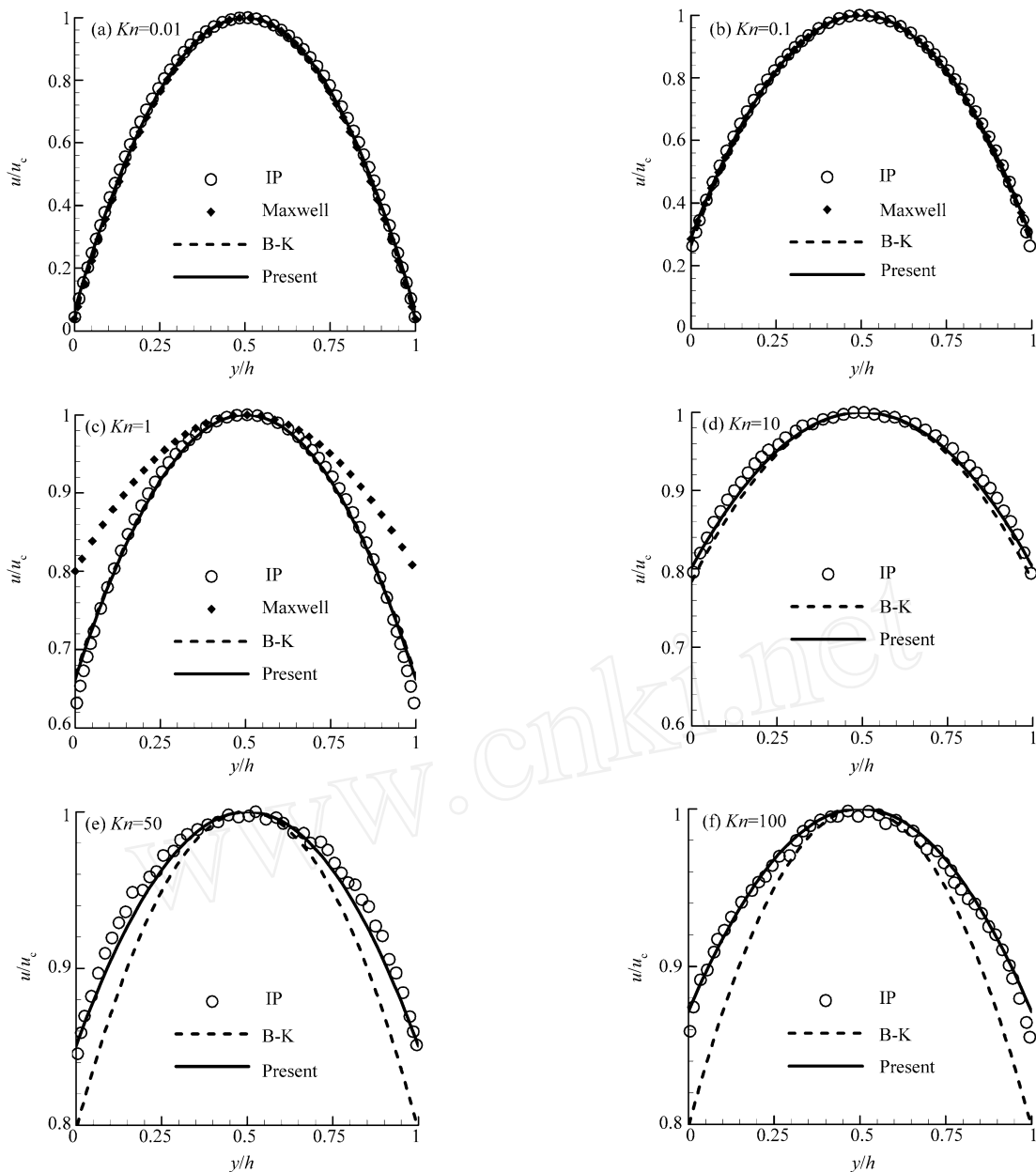


图 2 典型  $Kn$  数下 Poiseuille 流动速度分布的比较  
 Fig. 2 Velocity distribution of Poiseuille flows at typical  $Kn$

$$M_k = \phi(Kn) M_{N-s}, \tag{8}$$

其中

$$M_{N-s} = - \frac{h^3 w}{12\mu} \frac{dp}{dx} \tag{9}$$

为 Navier-Stokes 方程给出的 Poiseuille 流动的质量流率,修正因子  $\phi(Kn)$  反映稀薄气体效应或微尺度效应的影响, $\mu$  是气体的粘性系数, $dp/dx$  是局部压力梯度.

表 1 比较了典型  $Kn$  数下 DSMC 方法、IP 方法和线性化 Boltzmann 方程数值解<sup>[19]</sup>得到的  $\phi(Kn)$  值,以及文 [20]根据线性化 Boltzmann 方程数值解建议的  $\phi(Kn)$  拟合公式

$$\phi(Kn) = 1 + 6 Kn + \frac{12}{Kn} \ln(1 + Kn), \tag{10}$$

这里  $\phi = 1.318889$ ,  $\phi = 0.387361$ . 本文的 DSMC 和 IP 计算采用与文 [19] 中的线性化 Boltzmann 方程数值解相同的完全漫反射的物面边界条件和刚球分子相互作用模型.

表 1 典型  $Kn$  数下,DSMC 方法、IP 方法、线性 Boltzmann 方程给出的  $\phi(Kn)$  值与拟合公式(10)和(11)的比较Table 1  $\phi(Kn)$  by DSMC, IP, linearized Boltzmann equation and fitting formulas (10) and (11) at typical  $Kn$ 

$Kn$	DSMC	IP	线性 Boltzmann 方程 <sup>[19]</sup>	式(10)	式(11)
0.01	1.07	1.04	1.07	1.08	1.07
0.1	1.72	1.68	1.75	1.81	1.76
1	10.01	9.95	10.45	10.16	10.00
10	130.36	130.89	132.17	140.63	131.65
100	1 886.33	1 879.99	—	2 198.85	1 836.75

可以看到 DSMC,IP 与文[19]中的线性 Boltzmann 方程数值解相符甚好,差别小于 5%。但随着  $Kn$  数的增大,拟合公式(10)逐渐偏离前三者。它与 DSMC 结果在  $Kn = 10$  时差别显著增大至 8%,在  $Kn = 100$  时约为 17%。

为了更好地拟合 DSMC,IP 和线性 Boltzmann 方程数值解给出的  $\phi(Kn)$  值,我们建议

$$\phi(Kn) = 1 + 6aKn + \frac{12}{bKn} \ln(1 + Kn). \quad (11)$$

这里  $a = 1.223401$ ,  $b = 0.624958$ 。从表 1 看到,公式(11)在  $Kn = 10$  和 100 时,与 DSMC 结果偏差减小为 1% 和 3%,明显优于 Alexander 等<sup>[20]</sup>引述的拟合公式(10)。

#### 4 中心速度 $u_c$ 表达式

对于刚球模型,分子平均自由程<sup>[10,11]</sup>

$$= \frac{kT}{\sqrt{2} \tau p}, \quad (12)$$

其中  $k$  是 Boltzmann 常数,  $T$  是温度,碰撞截面  $\tau$  是常数。

在我们关心的实验微槽道流动中<sup>[1-6]</sup>,气体温度变化很小,可以看作等温过程。将式(8),(9),(11)和(12)代入式(7),利用微槽道入口和出口边界条件,积分整理后得到<sup>[17]</sup>

$$\frac{1}{2}(P^2 - \delta^2) + 6aKn_0(P - \delta) + \frac{12bKn_0}{P} \left[ P \ln\left(1 + \frac{Kn_0}{P}\right) - \delta \ln\left(1 + \frac{Kn_0}{\delta}\right) + Kn_0 \ln\left(\frac{P + Kn_0}{\delta + Kn_0}\right) \right] = CX, \quad (13)$$

相应的质量流率表达式

$$M_k = - \frac{h^3 w}{12\mu} \frac{dp}{dx} \phi(Kn) = - \frac{h^3 w}{12\mu} \frac{Cp_0^2}{\rho L} = - \frac{Cp_0^2 h^3 w}{12\mu R T L}, \quad (14)$$

其中

$$C = \frac{1}{2}(1 - \delta^2) + 6aKn_0(1 - \delta) + \frac{12bKn_0}{P} \left[ \ln(1 + Kn_0) - \delta \ln\left(1 + \frac{Kn_0}{\delta}\right) + Kn_0 \ln\left(\frac{1 + Kn_0}{\delta + Kn_0}\right) \right], \quad (15)$$

$P = p/p_0$ ,  $\delta = p_i/p_0$ ,  $X = x/L$ ,  $L$  是槽道长度,下标  $i$  和  $o$  分别表示入口和出口。

对比式(6)和(14),有

$$u_c = \frac{-Ch^2 p_0^2}{8\mu \rho L} \frac{1 + 4f(Kn)}{1 + 6f(Kn)}, \quad (16)$$

将式(4)代入式(16),

$$u_c = \frac{-Ch^2 p_0^2}{8\mu \rho L} \frac{1 + \sqrt{Kn}(0.36 + 3.2\sqrt{Kn} + 0.36Kn)}{1 + \sqrt{Kn}(0.54 + 4.8\sqrt{Kn} + 0.54Kn)}. \quad (17)$$

#### 5 解析解的检验

我们应用 IP 方法计算了总长度  $L = 25 \mu\text{m}$ ,高度  $h = 1 \mu\text{m}$  的微槽道,流动介质为氩气,出口处压强  $p_o =$

101 325 Pa, 入口处压强  $p_i = 1.5 p_0$ , 温度  $T = 273$  K. 二维微槽道 IP 方法的实施细节见文[14], 其计算结果在短槽道情况下与 DSMC 相符, 在长槽道情况下与实验数据<sup>[1,3,4]</sup>符合.

根据上述参数,  $Kn_0 = 0.053$ , 代入(15)式得  $C = -0.823$ , 再代入式(14)得流量  $M_k = 2.340 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$ , 与 IP 方法给出的流量  $M_k = 2.337 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$  符合.

压力分布和中心速度的比较见图 3, 式(13)和(17)与 IP 方法计算所得的压力分布和中心速度相符甚好.

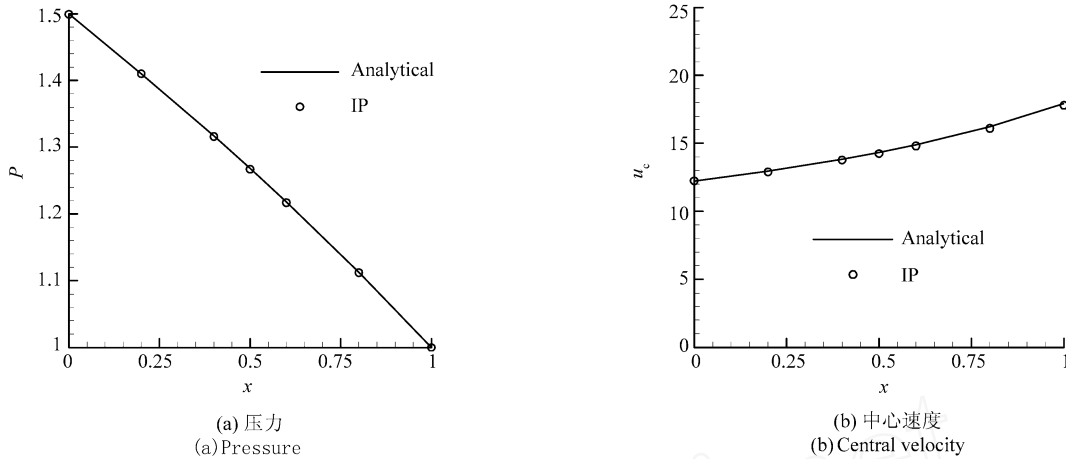


图 3 微槽道压力和中心速度分布, 解析解(13), (17)与 IP 结果的比较

Fig. 3 Analytical pressure and central velocity distribution for a microchannel gas flow by Eqs. (13), (17) and IP

## 6 讨论与总结

在实际微槽道气体流动中, 槽道的几何尺寸, 入口和出口的压力及温度等条件是已知的, 利用式(4), (12) ~ (15)和(17)即可得出微槽道气体流动的全部信息, 包括各截面的流动速度分布、压力和质量流量.

通过拟合 IP 和 DSMC 计算结果, 我们对 B-K 公式和平面 Poiseuille 流动质量流率的修正因子  $\phi(Kn)$  进行了修正和重新拟合, 使其在整个流动领域更加准确. 上述工作可方便的应用于工作介质为气体的 MEMS 器件的设计和优化.

## [参 考 文 献]

- [1] Pong K C, Ho C M, Liu J Q, Tai Y C. Non-linear pressure distribution in uniform micro-channels[J]. ASME-FED, 1994, **197**: 51 - 56.
- [2] Harley J C, Huang Y, Bau H, Zemel J N. Gas flow in micro-channels[J]. J Fluid Mech, 1995, **284**: 257 - 274.
- [3] Shih J C, Ho C M, Liu J Q, Tai Y C. Monatomic and polyatomic gas flow through uniform microchannels[J]. ASME-DSC, 1996, **59**: 197 - 203.
- [4] Arkilic E B. Measurement of the mass flow and tangential momentum accommodation coefficient in silicon microchannels[D]. FDRL TR 97 - 1: MIT. 1997.
- [5] Arkilic E B, Breuer K S, Schmidt M A. Mass flow and tangential momentum accommodation in silicon micromachined channels[J]. J Fluid Mech, 2001, **437**: 29 - 43.
- [6] Zohar Y, Lee S Y K, Lee W Y, Jiang L, Tong P. Subsonic gas flow in a straight and uniform microchannel[J]. J Fluid Mech, 2002, **472**: 125 - 151.
- [7] Beskok A, Karniadakis G. Rarefaction and compressibility effects in gas microflows[J]. J Fluids Engineering, 1996, **11**: 448 - 456.
- [8] Maurer J, Tabeling P, Joseph P, Willaime H. Second-order slip laws in microchannels for helium and nitrogen[J]. Phys Fluids, 2003, **15**: 2613 - 2621.
- [9] Myong R S. Gaseous slip models based on the Langmuir adsorption isotherm[J]. Phys Fluids, 2004, **16**: 104 - 117.
- [10] Bird G A. Molecular gas dynamics and direct simulation of gas flows[M]. UK: Clarendon Press, 1994.
- [11] 沈青. 稀薄气体动力学[M]. 北京: 国防工业出版社, 2003.

- [12] Fan J, Shen C. Statistical simulation of low-speed unidirectional flows in transition regime[M]. Brun R, Campargue R, Gatignol R, Lengrand J C, eds. *Rarefied Gas Dynamics*. 1999, **21**: 245 - 252.
- [13] Fan J, Shen C. Statistical simulation of low-speed rarefied gas[J]. *J Comp Phys*, 2001, **167**: 393 - 412.
- [14] Shen C, Fan J, Xie C. Statistical simulation of rarefied gas flows in micro-channels[J]. *J Comp Phys*, 2003, **189**: 512 - 526.
- [15] Sun Q H, Boyd I D. Drag on a flat-plate in low-Reynolds-number gas flows[J]. *AIAA J*, 2004, **42**: 1066 - 1072.
- [16] Sun Q H, Boyd I D. Flat-plate aerodynamics at very low Reynolds number[J]. *J Fluid Mech*, 2004, **502**: 199 - 206.
- [17] Fan J, Xie C, Jiang J Z. Kinetic analysis and estimate of microchannel gas flows[C]. 3<sup>rd</sup> International Conference on Microchannels & Minichannels, Toronto, 2005.
- [18] Shen C. *Rarefied gas dynamics*[M]. Germany: Springer Verlag, 2005.
- [19] Fukui S, Kaneko R. A database for interpolation of Poiseuille flow rates for high Knudsen number lubrication problem[J]. *J Tribology*, 1990, **112**: 78 - 83.
- [20] Alexander F J, Garcia A L, Alder B J. Direct simulation Monte Carlo for thin-film bearings[J]. *Phys Fluids*, 1994, **6**: 3854 - 3860.

## Velocity Distribution of Rarefied Gas Flows Through a Rectangular Micro-channel

YANG Xuejun, JIANG Jianzheng, FAN Jing

(Laboratory of High Temperature Gas Dynamics, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

**Abstract:** We employ the information preservation (IP) method and the direct simulation Monte Carlo (DSMC) method to calculate a plane Poiseuille flow from the continuum regime to the free-molecule flow regime. The Beskok-Karniadakis formula is corrected and kinetic factor of mass flow rate is re-fitted. A velocity distribution applicable to the entire flow regime is derived.

**Key words:** rectangular micro-channel; rarefied gas flow; information preservation method; velocity distribution