科学通报 2008年 第53卷 第18期: 2176 ~ 2180
论 文
《中国科学》杂志社
SCIENCE IN CHINA PRESS

Rayleigh-Bénard 热对流的动理论分析

张俊, 樊菁*

中国科学院力学研究所高温气体动力学重点实验室, 北京 100190
* 联系人, E-mail: jfan@imech.ac.cn

2008-06-13 收稿, 2008-08-28 接受
国家自然科学基金(批准号: 90205024, 10502051, 10621202)资助项目

摘要 利用基于分子动理论的直接模拟 Monte Carlo(DSMC)方法, 研究了 Rayleigh-Bénard 问题. 计算中, 上下平板表面温度之比固定为 0.1. $Kn = 0.01$ 时, 随着 Ra 数的增大, 大约在 1700 附近, 流动从热传导状态转变为热对流状态, DSMC 计算得到的下平板热流与 Ra 数的关系与经典实验和理论结果相符. $Kn = 0.05$ 时, 流动保持稳定的热传导状态, Ra 数的增大并不能引发热对流现象.

关键词
Rayleigh-Bénard 问题
热对流
临界 Rayleigh 数
稀薄气体效应
DSMC 方法

热对流是自然界中普遍存在的现象. 早在 1900 年, Bénard 就在实验中观察到在一定条件下热传导向热对流转换失稳现象[1]. Bénard 研究了一个薄流体层, 下表面加热, 上表面为自由面. 随着下表面温度的升高, 该薄层流体突然失稳, 最后形成蜂窝状的结构. 1916 年, Rayleigh 基于 Navier-Stokes 方程的线性稳定性分析[1], 指出当一个无量纲参数, 即 Rayleigh 数

$$Ra = \frac{\alpha g \Delta T d^3}{\nu \kappa}, \tag{1}$$

超过某临界值后, 呈现热不稳定性, 其中α, ν 和 κ 分别是热膨胀系数、黏性系数和热扩散系数, g 是重力加速度, ΔT 是上下平板的温差, d 是流体层的高度. 热传导情况下, 底部热流与上下板的温差呈线性关系, 这种线性关系在热对流情况下不复存在, 故通过测量底部热流, 就可以判断传热机制, 这种方法是 Schmidt 和 Milverton 最先建议的[1]. 许多研究者采用 Rayleigh 和 Schmidt-Milverton 的方法对 Rayleigh-Bénard(R-B)问题进行了深入细致的研究[2], 经典的工作包括 Schlüter 等人[3]的理论分析与 Koschmieder 和 Pallas[4]的实验结果, 前者基于 Boussinesq 近似下的 N-S 方程, 通过线性稳定性分析, 给出了上下平板是无限大的刚性壁面情况下线性对流区域的热流曲线, 后者精确测量了平板表面热流与 Ra 数的关系.

在 R-B 对流机理研究方面, 自组织理论做出了重要的贡献, 现在一般把耗散结构理论[5]和协同学[6]并称为自组织理论. 耗散结构理论是比利时科学家普利高津在1969年提出的, 他认为 R-B 对流是一种耗散结构, 在达到临界温度梯度时, 随机的小的涨落通过相干效应不断增强形成“巨涨落”, 体系由不稳定状态改变到一个新的稳定有序状态. 按照德国物理学家哈肯的协同学观点, R-B 问题可看成一个协同系统, 在接近临界点时, 序参量支配其他状态参量, 决定系统的行为.

基于对R-B问题和自组织理论的认识和思考, 我们决定从分子动理论出发进行研究, 一方面希望寻找自组织理论定量的证据, 更一般地希望了解宏观系统不稳定性的微观机制. 作为该工作的基础, 我们首先检验直接模拟 Monte Carlo(DSMC)方法[7,8]模拟 R-B 问题的可靠性. DSMC 方法用大量的模拟分子代表真实气体分子, 在一个时间步长内, 将分子的运动与碰撞过程解耦. 分子碰撞模型根据 Chapman-Enskog 理论, 采用现象论的方法确定, 如刚球(HS)模型[7]、变径刚球(VHS)模型[7]、概括化软球(GSS)模型[9]等. Garcia 和 Penland[10,11], Golshtein 和 Elperin[12], Watanabe 等人[13], Stefanov 等人[14,15], 以及陈伟芳等人[16]的计算结果表明, DSMC 方法能够再现 R-B 热对

流发生现象; 同时, 张志成等人[17]还研究了大 Ra 数下的非定常演化过程. 但是, 上述所有 DSMC 结果均未与实验结果[4]以及经典理论[3]比较. 本文用 DSMC 方法模拟了 R-B 问题, 在 Kn(Knudsen 数)=0.01 时观察从热传导到热对流状态的转变, 将计算得到的表面热流与 Ra 数的关系与实验和理论结果进行了对比, 并分析了较大 Knudsen 数(Kn=0.05)时不出现热传导向热对流转变的物理原因.

1 计算模型和 *Ra* 数的表达

本文研究二维 R-B 问题, 平板长度为 L, 上下平板间距为 d, 长高比 $\Gamma = L/d$. 上下平板温度分别为 T_c 和 T_h, 温度比 $r = T_c/T_h$.. 气体分子的重力加速度为 g.

在理想气体的条件下,

$$\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \frac{1}{T}. \tag{2}$$

根据 Chapman-Enskog 理论, 在分子刚球模型下,

$$\nu = \frac{5\sqrt{\pi}}{16}\lambda c_m, \quad \kappa = \frac{15\sqrt{\pi}}{32}\lambda c_m, \tag{3}$$

其中 λ 是气体分子的平均自由程, $c_m = \sqrt{2kT/m}$ 是分子热运动速度. 由于上下板的温差较大, 因此(2)式中的 T 取上下平板温度的平均值[12].

将(2)和(3)式代入(1)式, 化简整理得到

$$Ra = \frac{2048}{75\pi} \times \frac{1-r}{(1+r)^2 Kn^2 Fr}, \tag{4}$$

其中 $Kn = \lambda/d$, $Fr = V_{th}^2/gd$, $V_{th} = \sqrt{2kT_h/m}$.

由(4)式可知, 在 r 固定的情况下, Ra 数依赖于 Fr 数和 Kn 数. 在本文计算中, 固定上下板温度比 $r = 0.1$, 长宽比 $\Gamma = 2.0$, 通过改变重力加速度 g 的方法来改变 Fr 数和 Ra 数. 初始时刻, 气体处于均匀状态, 气体温度等于下平板温度. 上下平板采用固壁边界条件, 分子在壁面的反射为完全漫反射类型, 左右边界条件是周期性的. 我们采用刚球碰撞模型描述分子间相互作用. 流场取样在初始状态经过足够长时间演化后进行. 流场的坐标、温度、密度分别用平板的间距、下平板的温度、初始时的气体密度进行无量纲化.

2 *Kn*=0.01 时热传导向热对流的转变

Schlüter 等人[3]的理论分析与 Koschmieder 和 Pallas[4]的实验结果都是在连续介质条件下获得的, 为便于比较, 本节考虑 Kn=0.01 的连续介质情形. 计算区域划分为 64×32 网格, 每个网格再细分为 4×4 亚网格, 模拟分子总数约为一百万. 为兼顾计算效率和准确性, 流场计算取样和统计平均在网格中进行, 分子碰撞则在亚网格中进行.

图 1 给出了 Ra = 1159 时的温度等值线图. 温度在水平方向是均匀分布的, 说明这时处于稳定的热传导状态, 没有热对流现象发生. 由于可压缩效应, 温度在 y 方向稍偏离线性分布.

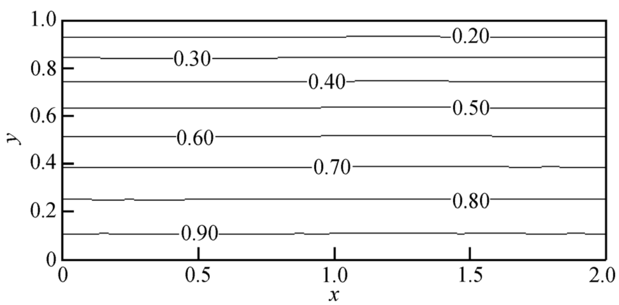

图 1 *Ra*=1159 时的温度等值线图

图 2 给出了 Ra = 2900 时的温度等值线图和速度矢量图. 此时温度在水平方向不再均匀, 相应流场中有一对反向旋转的旋涡, 说明流动处于稳定的热对流状态.

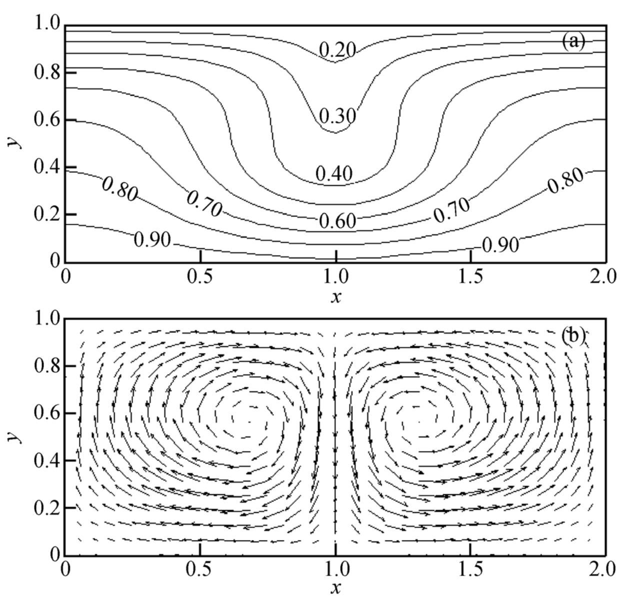

图 2 *Ra*=2900 时的温度等值线图(a)和速度矢量图(b)

图3给出了不同 Ra 数下水平中心位置的密度沿 y 方向的分布. 随着 Ra 数的增大, 密度分布变化不大, 下平板附近的密度总是最小的, 这是热对流发生的一个基本条件, 因此当 $Ra > Ra_c$ 就会有热不稳定现象发生.

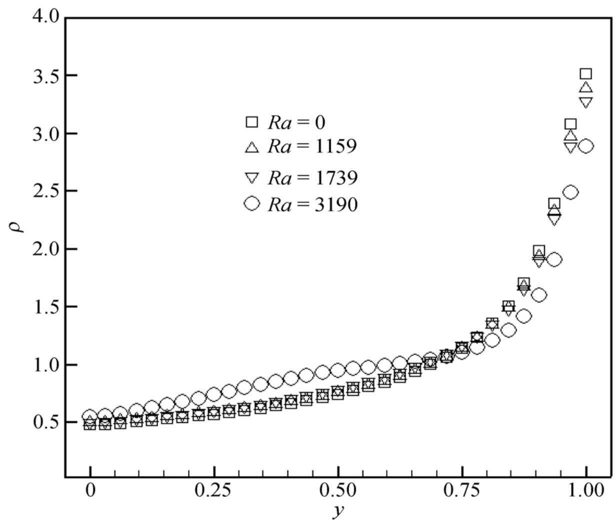

图3 不同 Ra 数下, 水平中心位置(x=1)密度沿 y 方向的分布(Kn=0.01)

图4比较了 Ra=1159 和 Ra=2900 时的下平板表面无量纲热流分布, 无量纲因子分别为相应的平均热流. 在热传导情况(Ra=1159)下, q/q_{ave}是均匀的, 大约等于1; 在热对流的情况(Ra=2900)下, q/q_{ave}不再均匀, 由于下平板的温度是一定的, 因此其热流分布主要取决于附近的气体温度分布, 当然密度也有一定影响.

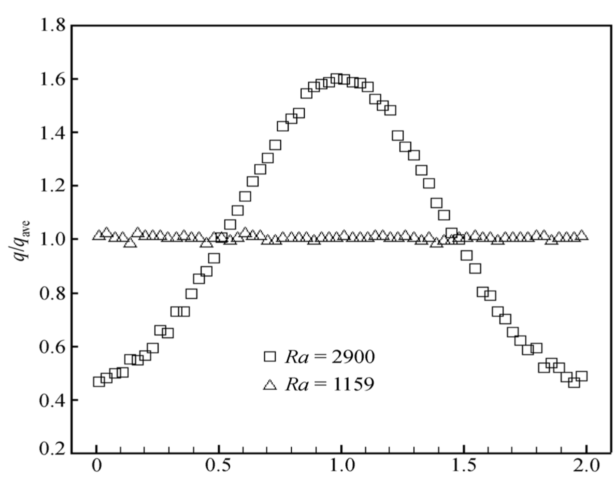

图4 Ra=1159 和 Ra=2900 时下平板表面热流分布

图5比较了DSMC方法、理论和实验给出的下平板表面总热流与 Ra 数的关系. Nusselt数(Nu)的定义是整个下平板的总热流 q_t 与热传导状态下的总热流 q_c 之比, 即

$$Nu = q_t/q_c. \tag{5}$$

理论曲线来自Schlüter等人[3], 对于 Pr=0.71 的气体,

$$Nu \cdot Ra \cong 2.41Ra - 1.41Ra_c, \tag{6}$$

这里临界 Ra 数 $Ra_c \cong 1708$. 实验数据来自Koschmieder和Pallas[4], 他们的实验结果显示 $Ra_c \cong 1675$, 在线性对流区域, $Nu \cdot Ra$-Ra 曲线的斜率大约为2.43.

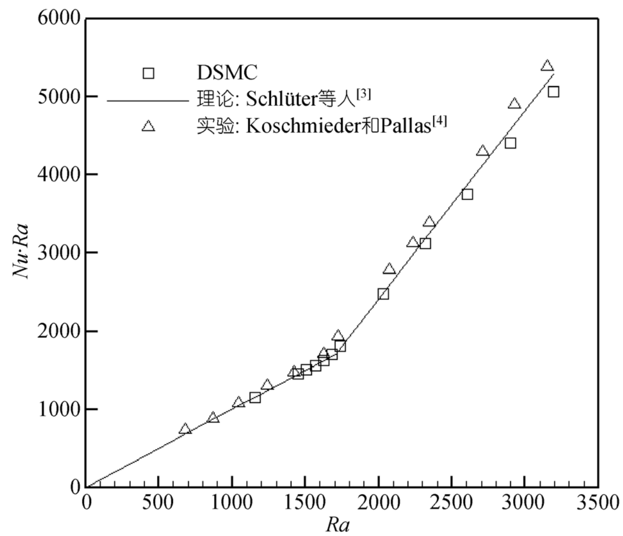

图5 下平板表面总热流与 Ra 数的关系

图5中DSMC结果表明, Ra 数较小时, $Nu \cdot Ra$ 随 Ra 变化的斜率约等于1, 对应于热传导状态. 在 Ra=1700 附近, 该斜率发生变化, 约为2.27, 说明由于热不稳定性有热对流现象发生. 总体而言, 三种结果是相符的. DSMC给出的热对流区 $Nu \cdot Ra$ 随 Ra 的变化斜率略小于理论和实验值的原因是, 在本文的计算中, 上下板的温差较大, 可压缩效应有一定的影响, 与经典理论和实验的研究条件有所不同.

3 Kn=0.05 时的稳定热传导机制

在 Kn>0.01 条件下, 可压缩效应与边界滑移速度和温度跳跃影响显著. Stefanov等人[15]利用DSMC方法和可压缩N-S方程加上滑移边界条件, 计算分析了发生热对流的临界 Kn 数和 Fr 数区域. Stefanov等人给出的发生热对流的区域得到了Manela和Frankel[18]

的对可压缩N-S方程线性稳定性分析结果的支持. 本节通过计算 Kn=0.05 时的 R-B 问题, 对较大 Kn 数下稳定热传导的物理机制进行分析.

图 6 给出了 Ra=1160 和 Ra=2900 时的温度等值线图. 温度在水平方向都呈均匀分布, 说明均处于热传导状态, 后者与 Kn=0.01 时的热对流状态(图 2)明显不同.

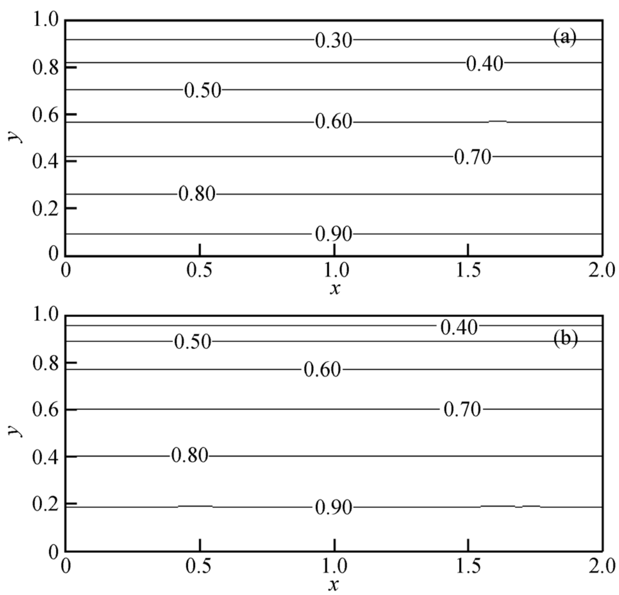

图 6　*Ra*=1160(a)和 *Ra*=2900(b)时的温度等值线图

图 7 给出了不同 Ra 数下水平中心位置的密度沿 y 方向的分布. Ra<928 时, 密度随 y 增加单调上升, 也就是说下平板附近的密度最小, 但较小 Ra 数下的重力和浮力的综合效应还不足以克服热传导和黏性耗散, 因此无法形成宏观的对流速度. 与 Kn=0.01 时的密度分布(图 3)不同的是, 当 Ra>928, 下平板附近的密度已不再是最小值: Ra=1160 时, 密度沿 y 方向先减小再增加; Ra=2320 和 Ra=2900 时, 密度随着 y 增加而单调下降. 这些结果表明, 在 Kn=0.05 时, Ra 数超过一定值后密度梯度方向与重力方向相同, 这种状态有利于流体层稳定, 因此不会产生热对流.

在 Kn=0.05 时, 下平板表面传输的总热流 q_t 与 Ra 数的关系与 Kn=0.01 时也明显不同. 我们知道, q_t 由入射分子数通量 Γ_n、入射分子平均能量 $\overline{E}_i$、反射分子平均能量 $\overline{E}_r$ 决定, 即

$$q_t = \Gamma_n \cdot (\overline{E}_r - \overline{E}_i). \tag{7}$$

在完全漫反射边界条件下, $\overline{E_r} = 2kT_h$ 是一个常量, 故 q_t 依赖于 Γ_n 和 $\overline{E}_i$. 从表 1 可以看到, 随着 Ra 数的增大, Γ_n 和 $\overline{E}_i$ 同时增大, 两者叠加使得 q_t 先增大后减小, 在 Ra=928 时达到最大值.

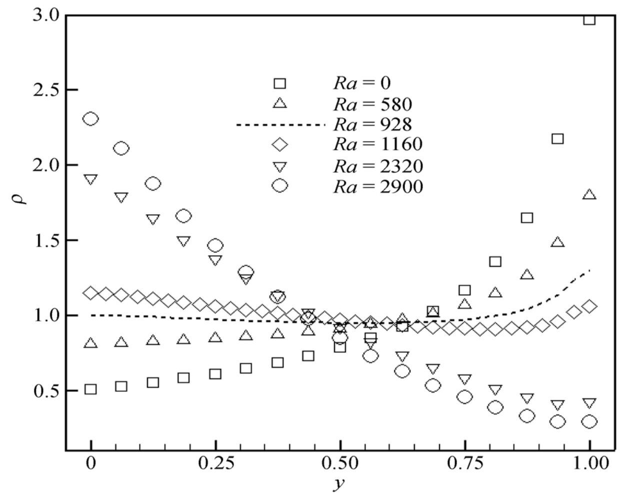

图 7　不同 *Ra* 数下, 水平中心位置(*x*=1)密度沿 *y* 方向的分布(*Kn*=0.05)

表 1　不同 *Ra* 数时的下平板表面热流 q_t, 入射分子数通量 Γ_n 和平均能量 $\overline{E}_i$ (*Kn*=0.05)

Ra	q_t×10^{-3}/J·m^{-2}·s^{-1}	Γ_n ×10^{-24}/m^{-2}·s^{-1}	$\overline{E}_i$ ×10^{21}/J
0	1.84	1.10	6.61
116	1.87	1.22	6.75
580	1.95	1.79	7.19
696	1.96	1.94	7.27
928	1.97	2.26	7.41
1160	1.96	2.60	7.53
2320	1.77	4.45	7.88
2900	1.60	5.42	7.98

4　结论

本文用 DSMC 方法模拟了 R-B 问题. DSMC 计算表明, Kn=0.01 时, 随着 Ra 数的增大, 流动从热传导状态转变到热对流状态, DSMC 计算得到的下平板表面的 $Nu \cdot Ra$ -Ra 关系与经典实验和理论结果相符; Kn=0.05 时, 热传导状态是稳定的; 当 Ra 数超过一定值后, 密度梯度方向与重力方向相同, 这种状态有利于流体层稳定, 因此 Ra 数的增大并不能引发热对流现象. 本文验证了 DSMC 方法研究 R-B 问题的有效性, 为采用动理论方法探索宏观流动失稳问题的微观机制奠定了基础.

参考文献

1 Chandrasekhar S. Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability. Oxford: Clarendon, 1961
2 Koschmieder E L. Bénard cells and Taylor vortices. Cambridge: Cambridge University Press, 1993
3 Schlüter A, Lortz D, Busse F. On the stability of steady finite amplitude convection. J Fluid Mech, 1965, 23: 129—144
4 Koschmieder E L, Pallas S G. Heat transfer through a shallow horizontal convecting fluid layer. Int J Heat Mass Transf, 1974, 17: 991—1002
5 Nicolis G, Prigogine I. Self-organization in nonequilibrium systems: From dissipative structures to order through fluctuations. New York: Wiley, 1977
6 Haken H. Synergetics, an Introduction: Nonequilibrium Phase Transitions and Self-organization in Physics, Chemistry and Biology. Berlin: Springer, 1977
7 Bird G A. Molecular Gas Dynamics and Direct Simulation of Gas Flows. Oxford: Clarendon, 1994
8 沈青. 稀薄气体动力学. 北京: 国防工业出版社, 2003
9 Fan J. A generalized soft-sphere model for Monte Carlo simulation. Phys Fluids, 2002, 14: 4399—4405
10 Garcia A. Hydrodynamic fluctuations and the direct simulation Monte Carlo method. In: Mareschal M. Microscopic Simulation of Complex Flows. New York: Plenum, 1990. 177—188
11 Garcia A, Penland C. Fluctuating hydrodynamics and principal oscillation pattern analysis. J Stat Phys, 1991, 64: 1121—1132
12 Golshtein E, Elperin T. Convective instabilities in rarefied gases by direct simulation Monte Carlo method. J Thermophys Heat Transf, 1996, 10: 250—256
13 Watanabe T, Kaburaki H, Yokokawa M. Simulation of a two dimensional Rayleigh-Bénard system using the direct simulation Monte Carlo method. Phys Rev E, 1994, 49: 4060—4064
14 Stefanov S, Cercignani C. Monte Carlo simulation of Bénard's instability in a rarefied gas. Eur J Mech B/Fluids, 1992, 11: 543—553
15 Stefanov S, Roussinov V, Cercignani C. Rayleigh-Bénard flow of a rarefied gas and its attractors. I. Convection regime. Phys Fluids, 2002, 14: 2255—2269
16 陈伟芳, 张志成, 吴其芬. 稀薄气体条件下 Rayleigh-Bénard 系统稳定性的 DSMC 仿真研究. 空气动力学学报, 2002, 20(2): 211—216
17 张志成, 陈伟芳, 吴其芬, 等. 大瑞利数下二维 Bénard 对流演化过程的 DSMC 仿真研究. 空气动力学学报, 2002, 20(4): 434—440
18 Manela A, Frankel I. On the Rayleigh-Bénard problem in the continuum limit. Phys Fluids, 2005, 17: 036101