

PZT-4 紧凑拉伸试样的断裂分析¹⁾

李海军 刘 峰 王自强²⁾

(中国科学院力学研究所非线性国家重点实验室, 北京 100190)

摘要 基于线性压电材料的复势理论, 通过解析分析, 导出了一种分析有限压电板裂纹问题的解析数值方法. 首先, 计算了含中心裂纹有限板的断裂参数, 与 Woo 和 Wang 的解析数值法 (Int J Fract, 1993, 62: 203~218) 相比较, 表明该方法具有很高的精度和很好的计算效率. 随后, 采用该方法和有限元法计算了 PZT-4 紧凑拉伸试样在绝缘裂纹面边界条件下断裂时的断裂参数, 发现各断裂参数的临界值分散性很大, 不能作为压电材料的单参数断裂准则. 进而, 针对试样真实的裂隙形状, 采用有限元法计算了裂隙尖端的应力、电位移场, 比较了裂隙内介质的介电性能对裂隙尖端场的影响, 计算了带微裂纹的真实裂隙模型的断裂参数并进行了理论分析.

关键词 压电陶瓷, 断裂, 复势理论, 有限元

中图分类号: O346.1 **文献标识码:** A **文章编号:** 0459-1879(2008)05-0701-06

引 言

压电材料由于其优越的力电耦合性能, 被广泛应用于传感器、致动器、换能器等电子器件. 然而, 压电材料本身呈脆性, 断裂韧性一般只有 $1 \text{ MPa}\cdot\text{m}^{1/2}$ 左右, 在力-电载荷作用下很容易发生断裂失效. 因此, 关于含缺陷 (如裂纹、孔洞、夹杂等) 的压电介质的断裂力学分析日益受到重视, 成为了人们广泛关注的焦点.

已有很多研究者对压电材料的断裂行为进行了理论^[1~9]和实验研究^[10~13]. 早期的断裂理论模型是在线性压电本构关系的框架下得到的. Parton^[1]基于电动力学的基本原理, 建立了裂纹面电可导通边界条件. 考虑到压电陶瓷材料的介电系数远远高于裂纹内介质的介电系数, 通常高出 1000 倍以上, Deeg^[2]首先提出可将裂纹视为绝缘裂纹, 即在裂纹面上应力和法向电位移均为零. Pak^[3]对这一假设进行了详细的讨论, 在文献中称为 D-P 边界条件. 它基于以下两条假设: (1) 裂纹面上无外加电荷; (2) 裂纹内的电位移可以忽略不计. McMeeking^[5]将裂纹处理为扁平椭圆切口, 在压电基体与椭圆切口的界面上满足面力、法向电位移及电势连续条件, 分析了裂纹面上不同电边界条件对裂纹尖端场的影响.

结果表明, 当 $b/a \gg \epsilon_f/\epsilon_m$ 时, 绝缘裂纹面边界条件才可以成立. 其中 a, b 分别为椭圆缺陷的长、短半轴; ϵ_m, ϵ_f 分别为压电基体、椭圆缺陷的介电常数. Wang 和 Mai^[14]则以 PZT-4 紧凑拉伸实验^[10]的计算结果为例, 证明了 D-P 边界条件更适用于解决工程中的断裂问题. 另外, D-P 边界条件也可以简化裂纹问题的计算, 因此在含裂纹压电体的多数研究中得到应用. 有关线性压电断裂模型方面的文献较多, 详细介绍可参见杨卫^[15]的综述.

本文基于线性压电复势理论和裂纹面绝缘边界条件, 提出了一种求解有限压电板断裂问题的解析数值方法. 采用该解析数值方法, 可以方便地求得有限压电板在裂纹面不导通条件下的断裂参数. 针对 PZT-4 紧凑拉伸实验^[10], 应用该解析数值方法和有限元法计算了相关断裂参数的临界值并与已有的计算结果进行了比较, 符合得很好. 进而, 根据实验试样的真实裂隙形状, 采用有限元法分析裂隙中介质的介电性能对裂隙尖端的应力、电位移场的影响. 最后, 分析了带微裂纹的真实裂隙的断裂参数, 比较了裂隙内介质的介电性的影响.

1 有限压电板裂纹问题的解析分析

针对压电体的二维形变问题, 位移 u_i , 电势 ϕ 及

2007-12-18 收到第 1 稿, 2008-05-05 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金资助项目 (10572138).

2) E-mail: tcwang@imech.ac.cn

应力 σ_{ij} , 电位移 D_i 可表示为^[4]

$$\left. \begin{aligned} \{u_i, \phi\} &= 2\text{Re} \sum_{K=1}^4 \mathbf{a}_K f_K(z_K) \\ \{\sigma_{2i}, D_2\} &= 2\text{Re} \sum_{K=1}^4 \mathbf{b}_K f'_K(z_K) \\ \{\sigma_{1i}, D_1\} &= -2\text{Re} \sum_{K=1}^4 \mathbf{b}_K p_K f'_K(z_K) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中 $f_K(z)$ 为复势函数; $\mathbf{a}, \mathbf{b}, p$ 仅与材料参数有关; $z_K = x + p_K y$.

设 $\mathbf{A} = [a_1, a_2, a_3, a_4], \mathbf{B} = [b_1, b_2, b_3, b_4], \mathbf{f}(z) = \{f_1(z), f_2(z), f_3(z), f_4(z)\}$, 则在实轴上广义位移矢量及面力矢量可表示为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{U}(x) = \{u_i, \phi\} &= \mathbf{A}\mathbf{f}(x) + \overline{\mathbf{A}\mathbf{f}(x)} \\ \mathbf{t}(x) = \{\sigma_{2j}, D_2\} &= \mathbf{B}\mathbf{f}'(x) + \overline{\mathbf{B}\mathbf{f}'(x)} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

设裂纹位于 x 轴上, 在实轴上面力、电位移连续, 则

$$\mathbf{B}\mathbf{f}'^+(x) + \overline{\mathbf{B}\mathbf{f}'^-(x)} = \mathbf{B}\mathbf{f}'^-(x) + \overline{\mathbf{B}\mathbf{f}'^+(x)} \quad (3)$$

设

$$\mathbf{F}(z) = \mathbf{B}\mathbf{f}'(z) - \overline{\mathbf{B}\mathbf{f}'(z)} = 2 \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m z^{m-1} \quad (4)$$

显然, $\mathbf{F}(z)$ 在整个板平面内解析, 其中 α_m 为待定复数列阵.

考虑裂纹面不导通边界条件, 则在裂纹面上面力、电位移均为零

$$\mathbf{B}\mathbf{f}'^+(x) + \overline{\mathbf{B}\mathbf{f}'^-(x)} = 0 \quad (5)$$

令

$$\mathbf{h}(z) = \mathbf{B}\mathbf{f}'(z) = \overline{\mathbf{B}\mathbf{f}'(z)} + \mathbf{F}(z) \quad (6)$$

在裂纹面上, 由式 (5) 得

$$\mathbf{h}^+(x) + \mathbf{h}^-(x) - \mathbf{F}(x) = 0 \quad (7)$$

$$\mathbf{h}(z) = \mathbf{F}(z)/2 + \mathbf{h}_0(z) \quad (8)$$

式 (7) 变为

$$\mathbf{h}_0^+(x) + \mathbf{h}_0^-(x) = 0 \quad (9)$$

$$\mathbf{h}_0(z) = X(z) \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n z^{n-1} \quad (10)$$

其中 β_n 为待定复数列阵, 奇异函数 $X(z)$ 可根据具体问题选取不同的形式. 不失一般性, 在此取 $X(z) = 1/\sqrt{z^2 - a^2}$, 则

$$\mathbf{h}(z) = \mathbf{B}\mathbf{f}'(z) = \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m z^{m-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n z^{n-1} / \sqrt{z^2 - a^2} \quad (11)$$

由式 (4), 得

$$\overline{\mathbf{F}}(z) = \overline{\mathbf{B}\mathbf{f}'(z)} - \mathbf{B}\mathbf{f}'(z) = 2 \sum_{m=1}^{+\infty} \bar{\alpha}_m z^{m-1} \quad (12)$$

比较式 (4) 与式 (12), 得

$$\sum_{m=1}^{+\infty} (\alpha_m + \bar{\alpha}_m) z^{m-1} = 0, \text{ 即 } \alpha_m + \bar{\alpha}_m = 0 \quad (13)$$

将式 (11) 代入式 (6), 则

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{B}\mathbf{f}'(z)} &= \mathbf{h}(z) - \mathbf{F}(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n z^{n-1} / \sqrt{z^2 - a^2} - \\ &\sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m z^{m-1} \end{aligned} \quad (14)$$

由式 (11), 有

$$\overline{\mathbf{B}\mathbf{f}'(z)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \bar{\beta}_n z^{n-1} / \sqrt{z^2 - a^2} + \sum_{m=1}^{+\infty} \bar{\alpha}_m z^{m-1} \quad (15)$$

比较式 (14) 和式 (15), 结合式 (13), 得

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\beta_n - \bar{\beta}_n) z^{n-1} / \sqrt{z^2 - a^2} = 0 \quad (16)$$

式 (13) 和 (16) 证明了待定系数 α_m 为纯虚数列阵, β_n 为实数列阵. 因此, 根据边界配置法, 结合最小二乘法就可以确定系数 α_m, β_n , 从而求得有限压电板裂纹问题的解析表达式.

2 紧凑拉伸试样的有限元分析

2.1 理想尖裂纹模型

针对 Park 和 Sun^[10] 的 PZT-4 紧凑拉伸实验, 试样大小 $25.5 \times 19.1 \times 5.1$ mm, 如图 1 所示. 本文采用上述解析数值法计算其断裂参数, 并与文献 [16] 中的结果进行比较.

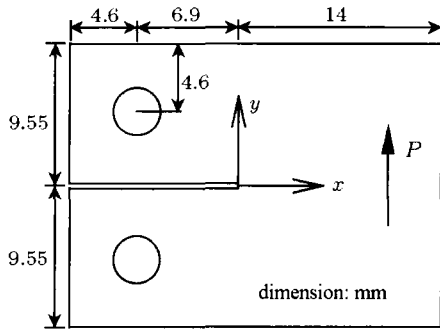


图 1 紧凑拉伸试样

Fig.1 PZT-4 compact tension specimen

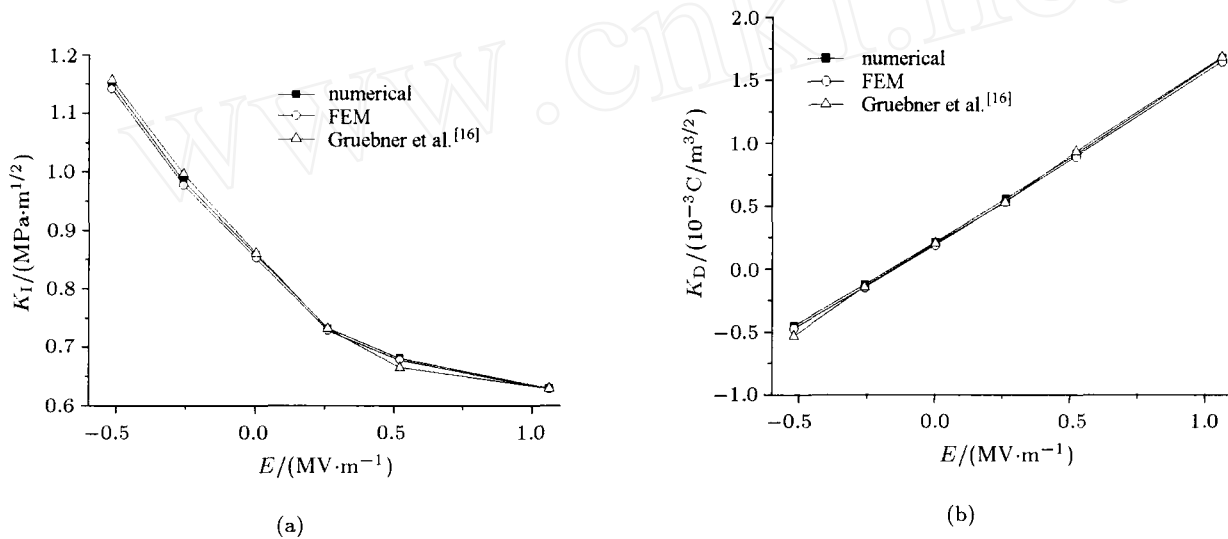


图 2 电不导通条件下 3 组应力强度因子 (a) 和电位移强度因子 (b) 的比较

Fig.2 Comparison of among the three computational stress intensity factors (a) and the three computational electric displacement intensity factors (b) at fracture under the impermeable boundary condition

2.2 真实裂隙形状的有限元分析

根据 Kalyanam 和 Sun 的文献 [17], 本文对真实裂隙的 PZT-4 紧凑拉伸试样 [2] 进行了模拟, 真实裂隙如图 3 所示. 考虑最大负电场及相应断裂载荷作用, 本文分别计算了裂隙内电不导通 ($\epsilon_r = 0$) 和有限导通 ($\epsilon_r = 2.4$) 条件下裂隙尖端附近的应力、电位移分布, 如图 4 所示. 在图 4 中, 可以发现在两种条件下的裂隙尖端场非常相似, 应力场几乎完全一致, 电位移场差别也较小. 这表明了当裂隙较宽时裂隙内电介质性能对裂隙尖端场的影响较小. 因此, 对于裂隙初始宽度较大的试样, 采用电不导通条件比较合理.

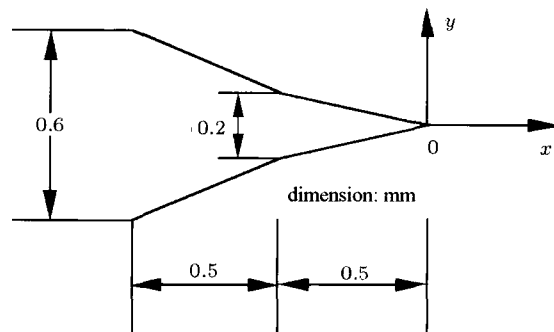


图 3 真实裂隙形状

Fig.3 Crack cavity near the crack tip

图 2 为本文的解析数值法和有限元计算的临界应力强度因子 K_I 和电位移强度因子 K_D , 与 Gruebner 等 [16] 的结果符合良好. 其中 Numerical 为本文解析数值法的计算结果, FEM 为本文有限元的计算结果, Gruebner 等为文献 [16] 中有限元的计算结果.

在线性压电理论框架下, 采用绝缘裂纹面条件得到的各种断裂参数的临界值变化很大, 不是材料常数, 如图 2 所示. 因此, 该等断裂参数不能作为压电材料的单参数断裂准则. 由图 2 可知, 本文有限元计算的结果正确, 具有很好的精度.

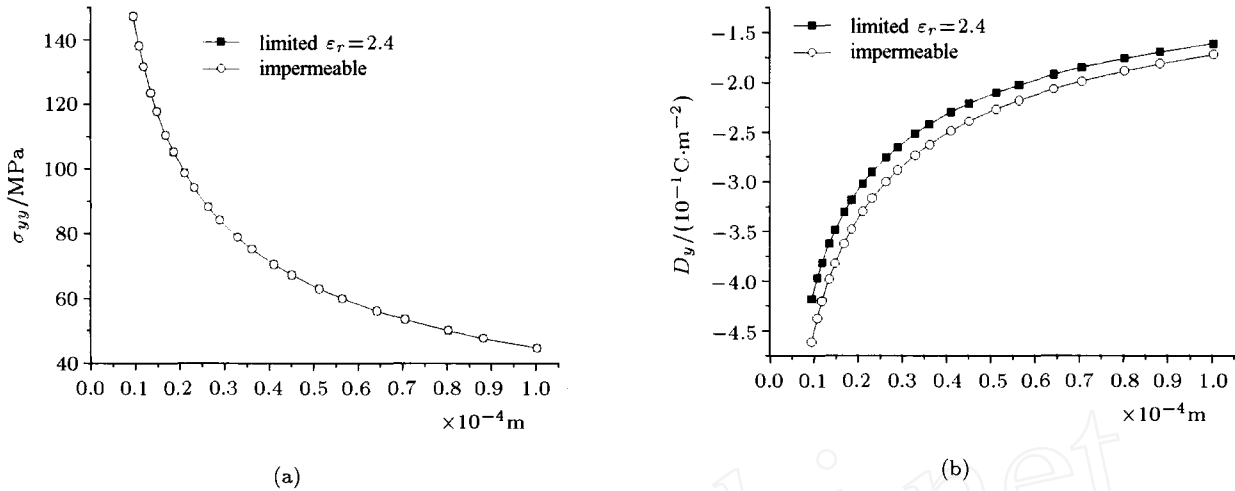


图 4 最大负电场及相应断裂载荷作用时不同电导通条件下裂隙尖端的应力 (a), 电位移 (b)
 Fig.4 Variation of the stress (a) and the electric displacement (b) near the crack tip under several electric displacement conditions of the crack cavity

Applied electric load $E_y = -0.52 \text{ MV/m}$, applied mechanical load $P = 126.34 \text{ N}$. Crack tip is at $x = 0$

2.3 考虑含微裂纹的真实裂隙模型

鉴于试样制作过程中可能产生微裂纹, 因此本文假设在真实裂隙顶端前有一段很小的微裂纹, 其长度为 0.5 mm , 微裂纹面电导通, 分别对裂隙内含电介质(硅油, $\epsilon_r = 2.4$)和绝缘裂隙 ($\epsilon_r = 0$)进行了有限元计算, 结果如图 5 所示. 可以发现在上述两种条件下的断裂参数完全一致, 裂隙的导通性对

微裂纹尖端的断裂参数的影响很小, 说明了裂隙初始宽度较大时, 采用电不导通裂隙更合理, 与上节的计算结果完全一致. 随后, 将裂隙简化为导通的理想尖裂纹, 除了电移位强度因子在电场较大时与真实裂隙模型的略有差别外, 其它断裂参数值则符合较好, 如图 5 所示. 这说明了在含有微裂纹的情况下, 采用导通的理想尖裂纹模型较合理.

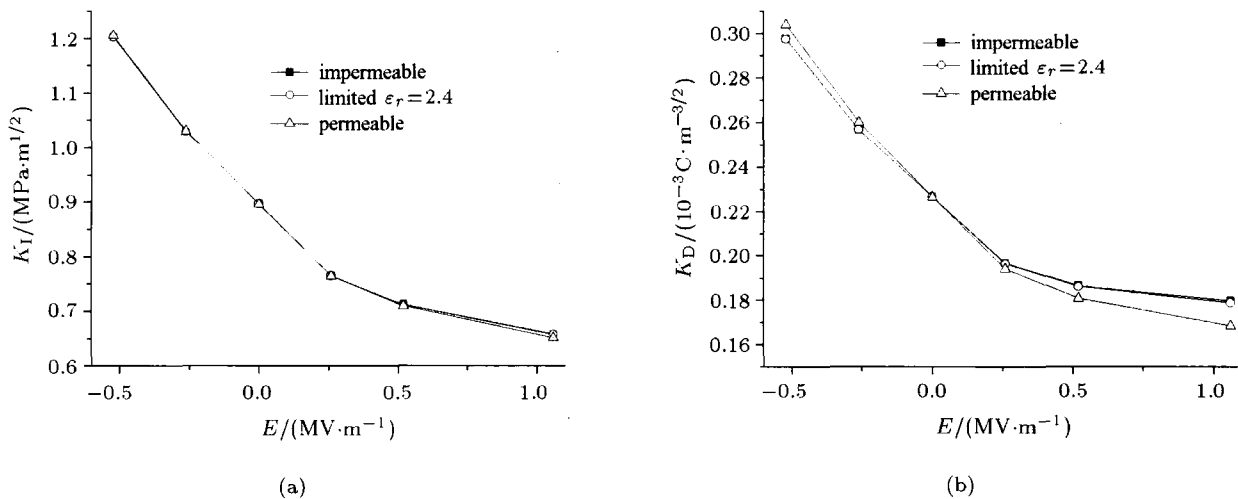


图 5 含微裂的裂隙模型的临界应力强度因子 (a), 电位移强度因子 (b), 能量释放率 (c) 及机械应变能释放率 (d) 随外加电场的变化
 Fig.5 The stress intensity factors (a), the electric displacement intensity factors (b), energy release rates (c) and their mechanical parts (d) of the crack cavity model including a microcrack at fracture as a function of the applied electric field

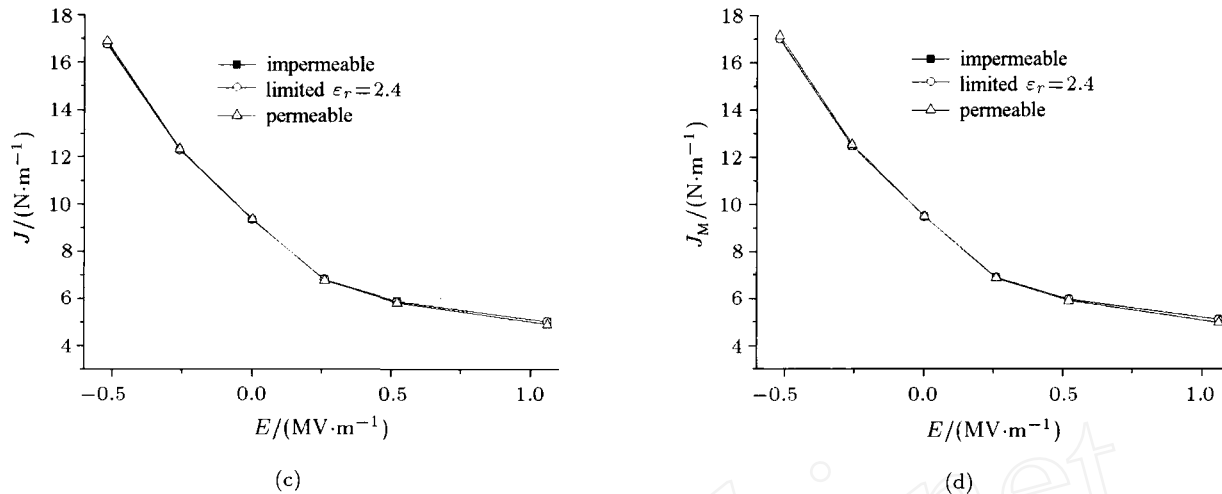


图 5 含微裂的裂隙模型的临界应力强度因子 (a), 电位移强度因子 (b), 能量释放率 (c) 及机械应变能释放率 (d) 随外加电场的变化 (续)
Fig.5 The stress intensity factors (a), the electric displacement intensity factors (b), energy release rates (c) and their mechanical parts (d) of the crack cavity model including a microcrack at fracture as a function of the applied electric field (continued)

3 结 论

基于线性压电复势理论, 本文导出了一种计算有限压电板的断裂参数的解析数值方法, 计算结果表明该方法是一种简单有效的数值分析方法. 针对 PZT-4 紧凑拉伸实验^[10], 计算了真实裂隙尖端的场分布, 结果表明当裂隙初始宽度较大时, 裂隙采用不导通边界条件较合理. 进而, 本文计算了带微裂纹的真实裂隙模型, 结果表明不导通裂隙或导通尖裂纹均可较好地描述真实裂隙含微裂纹的断裂参数. 根据上述不同裂纹模型的计算结果, 可以看出线性压电理论下的断裂参数不能很好解释电场对断裂载荷的影响. 因此, 为了更好地解释实验现象以及揭示压电体的断裂行为, 还需要综合考虑电饱和^[18,19]及电畴翻转^[20,21]等引起的非线性效应.

参 考 文 献

- Parton VZ. Fracture mechanics of piezoelectric materials. *Acta Astronautica*, 1976, 3: 671~683
- Deeg WF. The analysis of dislocation, crack and inclusion problems in piezoelectric solids. [Ph D Thesis]. Stanford University, 1980
- Pak YE. Crack extension force in a piezoelectric material. *J Appl Mech*, 1990, 57: 647~653
- Suo Z, Kuo CM, Barnett DM, et al. Fracture mechanics for piezoelectric ceramics. *J Mech Phys Solids*, 1992, 40: 739~765
- McMeeking RM. Electroactive stresses near crack-like flaws. *J Appl Math Phys*, 1989, 40: 615~627
- Wang TC, Han XL. Fracture mechanics of piezoelectric materials. *Int J Fract*, 1999, 98: 15~35
- Qi H, Fang DN, Yao ZH. Analysis of electric boundary condition effects on crack propagation in piezoelectric ceramics. *Acta Mech Sinica*, 2001, 17(1): 59~70
- 邓其林, 王自强. 压电材料椭圆切口的力学分析. *力学学报*, 2002, 34(1): 109~115 (Deng Qilin, Wang Tzuchiang. Study on an infinite piezoelectric solid with elliptical notch. *Acta Mech Sinica*, 2002, 34(1): 109~115 (in Chinese))
- 李显方, 范天佑. 压电陶瓷带形中 III 型裂纹的精确解析解. *力学学报*, 2002, 34(3): 335~343 (Li Xianfang, Fan Tianyou. An exact analytical solution for a mode-III crack in a piezoelectric strip. *Acta Mech Sinica*, 2002, 34(3): 335~343 (in Chinese))
- Park S, Sun CT. Fracture criteria for piezoelectric ceramics. *J Am Ceram Soc*, 1995, 78(6): 1475~1480
- Wang HY, Singh RN. Crack propagation in piezoelectric ceramics: effects of applied electric fields. *J Appl Phys*, 1997, 81(11): 7471~7479
- Fang DN, Liu ZW, Xie HM, et al. Study on fracture behavior of ferroelectric ceramics under combined electromechanical loading by using a moiré interferometry technique. *Acta Mech Sinica*, 2004, 20(3): 263~269
- Fang DN, Zhang ZK, Soh AK, et al. Fracture criteria of piezoelectric ceramics with defects. *Mech Mater*, 2004, 36: 917~928
- Wang BL, Mai YW. Impermeable crack and permeable crack assumptions, which one is more realistic? *J Appl Mech*, 2004, 71: 575~578
- 杨卫. 力电失效率. 北京: 清华大学出版社, 2001, 51~62 (Yang Wei. *Mechatronic Reliability*. Beijing: Tsinghua University Press, 2001. 51~62 (in Chinese))
- Gruebner O, Kamlah M, Munz D. Finite element analysis of cracks in piezoelectric materials taking into account the permittivity of the crack medium. *Engng Fract Mech*, 2003, 70: 1399~1413

- 17 Kalyanam S, Sun CT. Modeling of electrical boundary condition and domain switching in piezoelectric materials. *Mech Mater*, 2005, 37: 769~784
- 18 Fulton CC, Gao HJ. Electrical nonlinearity in fracture of piezoelectric ceramics. *Appl Mech Rev*, 1997, 50(11): s56~s63
- 19 Wang TC. Analysis of strip electric saturation model of crack problem in piezoelectric materials. *Int J Solids Struct*, 2000, 37: 6031~6049
- 20 Zhu T, Yang W. Toughness variation of ferroelectrics by polarization switch under non-uniform electric field. *Acta Mater*, 1997, 45: 4695~4702
- 21 Yang W, Zhu T. Switch-toughening of ferroelectrics subjected to electric field. *J Mech Phys Solids*, 1998, 46(2): 291~311

FRACTURE ANALYSIS OF PZT-4 COMPACT TENSION SPECIMEN¹⁾

Li Haijun Liu Feng Wang Tzuchiang²⁾

(LNM, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

Abstract Based on a complex potential theory of linear piezoelectric materials and series expansion of the complex potential, a general method is proposed for solving the crack problem of a finite piezoelectric plate. By this method, fracture parameters such as the stress intensity factor, the electric displacement intensity factor and energy release rate et al. can be easily evaluated under the impermeable boundary condition. Numerical results of fracture parameters demonstrate that the proposed method gives satisfactory results compared with the existing solutions given by Woo and Wang for a central crack in a finite piezoelectric plate. This method is identified to be an accurate and efficient method. An experiment with a PZT-4 compact tension specimen has been modeled under the impermeable boundary condition by the present method, and the critical values of fracture parameters are greatly varied and not the material constants. Therefore, these fracture parameters are not used as the single-parameter fracture criterion for the piezoelectric material. Then, in terms of the PZT-4 compact tension specimen, the influence of permeability of the crack has been studied based on the results of finite element calculations. The finite element model of the PZT-4 compact tension specimen with an actual crack profile is analyzed for two different electric permeability of the medium in the crack cavity corresponding to an impermeable medium and silicone oil. The largest applied negative electric field and the corresponding mechanical load for fracture are considered. Finally, the crack profile in the PZT-4 compact tension specimen can be regarded to be composed of a notch and an ideal crack (so-called microcrack) in front of the notch. The model of this assumed crack profile has been analyzed by the finite element method.

Key words piezoelectric ceramics, fracture, complex potential formulation, FEM

Received 18 December 2007, revised 5 May 2008.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (10572138).

2) E-mail: tcwang@imech.ac.cn