第7卷 第4期 力学学报 Vol. 7, No. 4
1964年12月 ACTA MECHANICA SINICA Dec., 1964

高速运动中激波的近似計算*

江 瑜 书
(中国科学院力学研究所)

提 要

本文着重分析了 Rosciszewski 的計算激波的方法和 Whitham 的特征准則，并指出了近似計算激波的途径. 作为一个例子，計算了鈍头圓柱体在高超声速运动下产生的激波.

一、引 言

激波的传播，一般說来，既要滿足給定的初始条件和边界条件，又要滿足运动方程. 为了簡化計算，Chester[1] 在小扰动理論的基础上，建立了在变截面管道中传播的平面激波的 M 数(或激波的强度)与管道截面积之間的关系. 后来 Whitham[2] 发現，这个关系可以很簡单地从与激波传播方向相同的那組特征关系求得，并且发現，这种近似关系对于向中心传播的柱面或球面强激波也是适用的. 这就是 Whitham 的未經过严格証明的特征准則. 由于这个事实的启发，Rosciszewski[3,4] 企图通过沿特征綫积分来建立这种关系. 我們認为 Rosciszewski 的結果是值得商榷的.

为了明确起見，我們以定常运动为例来說明 Rosciszewski 提出的問題. 当高速气流繞过迴轉体时，除了沿流綫的条件外，运动还要滿足两个特征方程. 在柱面坐标系 (x, r, φ) 内，这两个方程是:

$$\rho q^2 \operatorname{tg} \mu \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + \frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{\rho q^2 \sin\theta \sin\mu \operatorname{tg}\mu}{\sin(\theta+\mu)} \frac{\partial \ln r}{\partial \xi} = 0, \tag{1}$$

$$\rho q^2 \operatorname{tg} \mu \frac{\partial \theta}{\partial \eta} - \frac{\partial p}{\partial \eta} - \frac{\rho q^2 \sin\theta \sin\mu \operatorname{tg}\mu}{\sin(\theta-\mu)} \frac{\partial \ln r}{\partial \eta} = 0, \tag{2}$$

式中 q, θ, ρ, p, μ 分别为气体的速度，流速与 x 軸之間的夹角，密度，压力和 Mach 角；ξ, η 分别为沿正、負特征綫族 c_+, c_- 的特征坐标(图 1). 对式(1)分别沿 c_+ 族特征綫 I 及与之相邻的特征綫 II 积分，并将所得的結果相减，Rosciszewski 得到

$$p_{w'} - p_w - (p_{s'} - p_s) + \int_{s'}^{w'} \left[\rho q^2 \operatorname{tg}\mu\, d\theta + \frac{\rho q^2 \sin\theta \sin\mu \operatorname{tg}\mu}{\sin(\theta+\mu)} d\ln r\right] - $$
$$- \int_{s}^{w} \left[\rho q^2 \operatorname{tg}\mu\, d\theta + \frac{\rho q^2 \sin\theta \sin\mu \operatorname{tg}\mu}{\sin(\theta+\mu)} d\ln r\right] = 0, \tag{3}$$

式中下标 s, w 分别表示物面和激波. 当特征綫 I 趋近于特征綫 II 时，他得到

$$dp_w - dp_s + (\rho q^2 \operatorname{tg}\mu)_w d\theta_w - (\rho q^2 \operatorname{tg}\mu)_s d\theta_s + (d[\rho q^2 \operatorname{tg}\mu])_m [\theta_w - \theta_s] +$$

* 1964年8月4日收到.

$$+\left[\frac{\rho q^2 \sin\theta \sin\mu \operatorname{tg}\mu}{\sin(\theta+\mu)}\right]_w d\ln r_w - \left[\frac{\rho q^2 \sin\theta \sin\mu \operatorname{tg}\mu}{\sin(\theta+\mu)}\right]_s d\ln r_s +$$

$$+\left(d\left[\frac{\rho q^2 \sin\theta \sin\mu \operatorname{tg}\mu}{\sin(\theta+\mu)}\right]\right)_m \left[\ln\frac{r_w}{r_s}\right] = 0. \tag{4}$$

然后他略去了上式中的平均量$(d[\rho q^2 \operatorname{tg}\mu])_m[\theta_w-\theta_s]$和$\left(d\left[\frac{\rho q^2 \sin\theta \sin\mu \operatorname{tg}\mu}{\sin(\theta+\mu)}\right]\right)_m\left[\ln\frac{r_w}{r_s}\right]$，建立了激波和物体上各物理量之間的关系

$$dp_w + [\rho q^2 \operatorname{tg}\mu]_w d\theta_w + \left[\frac{\rho q^2 \sin\theta \sin\mu \operatorname{tg}\mu}{\sin(\theta+\mu)}\right]_w d\ln r_w =$$

$$= dp_s + [\rho q^2 \operatorname{tg}\mu]_s d\theta_s + \left[\frac{\rho q^2 \sin\theta \sin\mu \operatorname{tg}\mu}{\sin(\theta+\mu)}\right]_s d\ln r_s. \tag{5}$$

我們認为，关系（5）如果成立，激波的形状就将直接依賴于物面上的条件而与流場无关．我們将在第二节进一步説明这結果是否正确．另外，他所忽略的平均項一般是不小的．

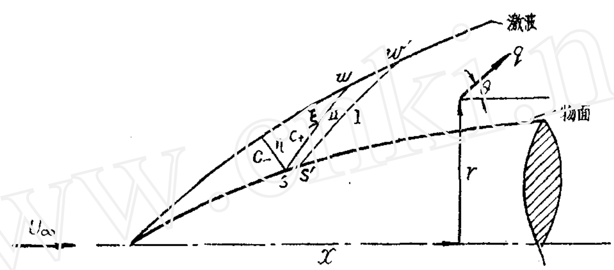

图 1

另一方面，我們知道，Whitham 的特征准則的应用則是有局限性的．根据这个准則，初始或边界条件和流場对激波的运动不起作用，例如向中心传播的柱面或球面激波就确是如此．在这种情形下，Whitham 准則就提供了一个滿意的近似．但是，对向外传播的柱面和球面激波，由于能量条件的要求，这个准則就不适用了．在第三节里对这个問題将作具体分析．

在激波形状的計算方面，近年来許多作者較多地采用了 Черный 的动量积分法．这种方法比边界值的数值解法自然是簡便多了；但是，它的簡化条件是适当选择流場中各物理量分布，而这在問題未解决之前是难于做到恰到好处的．一个合理的途径可能是利用激波上的微分关系式，因为这里表示流場影响的量是可以通过局部展开的方法来計算的．作为一个例子，在第四节，我們对鈍头圓柱体的激波形状进行了計算．这个例子具体地説明了，在大多数情况下，激波的形状和流場是密切联系着的．因此，用 Whitham 准則处理这类問題是不适用的．

二、激波曲率与流綫曲率之間的关系

为了証明式（4）中的平均量不能忽略，我們利用方程（3）中的两个积分，并使 $\Delta\eta$ 趋于零，得到

$$\int_{\xi_s+\Delta\xi_s}^{\xi_w+\Delta\xi_w}\left[\rho q^2 \operatorname{tg}\mu\frac{\partial\theta}{\partial\xi} + \frac{\rho q^2 \sin\theta \sin\mu \operatorname{tg}\mu}{\sin(\theta+\mu)}\frac{\partial \ln r}{\partial\xi}\right]d\xi -$$

$$-\int_{\xi_s}^{\xi_w}\left[\rho q^2 \operatorname{tg}\mu\frac{\partial\theta}{\partial\xi}+\frac{\rho q^2\sin\theta\sin\mu\operatorname{tg}\mu}{\sin(\theta+\mu)}\frac{\partial\ln r}{\partial\xi}\right]d\xi=$$

$$=\left[\rho q^2 \operatorname{tg}\mu\frac{\partial\theta}{\partial\xi}+\frac{\rho q^2\sin\theta\sin\mu\operatorname{tg}\mu}{\sin(\theta+\mu)}\frac{\partial\ln r}{\partial\xi}\right]_w d\xi_w-$$

$$-\left[\rho q^2 \operatorname{tg}\mu\frac{\partial\theta}{\partial\xi}+\frac{\rho q^2\sin\theta\sin\mu\operatorname{tg}\mu}{\sin(\theta+\mu)}\frac{\partial\ln r}{\partial\xi}\right]_s d\xi_s+$$

$$+d\eta\int_{\xi_s}^{\xi_w}\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\rho q^2 \operatorname{tg}\mu\frac{\partial\theta}{\partial\xi}+\frac{\rho q^2\sin\theta\sin\mu\operatorname{tg}\mu}{\sin(\theta+\mu)}\frac{\partial\ln r}{\partial\xi}\right]d\xi. \tag{6}$$

分别以 η 和 ξ 对式(1),(2)微分,得到

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\rho q^2 \operatorname{tg}\mu\frac{\partial\theta}{\partial\xi}+\frac{\rho q^2\sin\theta\sin\mu\operatorname{tg}\mu}{\sin(\theta+\mu)}\frac{\partial\ln r}{\partial\xi}\right]=$$

$$=-\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\rho q^2 \operatorname{tg}\mu\frac{\partial\theta}{\partial\eta}-\frac{\rho q^2\sin\theta\sin\mu\operatorname{tg}\mu}{\sin(\theta-\mu)}\frac{\partial\ln r}{\partial\eta}\right].$$

利用这結果改写式(6)右端第三項,然后代入式(3),得到

$$dp_w+\left(\rho q^2 \operatorname{tg}\mu\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\right)_w d\xi_w+\left[\frac{\rho q^2\sin\theta\sin\mu\operatorname{tg}\mu}{\sin(\theta+\mu)}\frac{\partial\ln r}{\partial\xi}\right]_w d\xi_w-$$

$$-\left(\rho q^2 \operatorname{tg}\mu\frac{\partial\theta}{\partial\eta}\right)_w d\eta_w+\left[\frac{\rho q^2\sin\theta\sin\mu\operatorname{tg}\mu}{\sin(\theta-\mu)}\frac{\partial\ln r}{\partial\eta}\right]_w d\eta_w=$$

$$=dp_s+\left(\rho q^2 \operatorname{tg}\mu\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\right)_s d\xi_s+\left[\frac{\rho q^2\sin\theta\sin\mu\operatorname{tg}\mu}{\sin(\theta+\mu)}\frac{\partial\ln r}{\partial\xi}\right]_s d\xi_s-$$

$$-\left(\rho q^2 \operatorname{tg}\mu\frac{\partial\theta}{\partial\eta}\right)_s d\eta_s+\left[\frac{\rho q^2\sin\theta\sin\mu\operatorname{tg}\mu}{\sin(\theta-\mu)}\frac{\partial\ln r}{\partial\eta}\right]_s d\eta_s. \tag{7}$$

由于 $dp_w=\left(\frac{\partial p}{\partial\xi}\right)_w d\xi_w+\left(\frac{\partial p}{\partial\eta}\right)_w d\eta_w$, 根据方程(1)和(2), 上式两端将分别等于零:

$$dp_w+\left(\rho q^2 \operatorname{tg}\mu\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\right)_w d\xi_w-\left(\rho q^2 \operatorname{tg}\mu\frac{\partial\theta}{\partial\eta}\right)_w d\eta_w+\left[\frac{\rho q^2\sin\theta\sin\mu\operatorname{tg}\mu}{\sin(\theta+\mu)}\frac{\partial\ln r}{\partial\xi}\right]_w d\xi_w+$$

$$+\left[\frac{\rho q^2\sin\theta\sin\mu\operatorname{tg}\mu}{\sin(\theta-\mu)}\frac{\partial\ln r}{\partial\eta}\right]_w d\eta_w=0, \tag{8}$$

$$dp_s+\left(\rho q^2 \operatorname{tg}\mu\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\right)_s d\xi_s-\left(\rho q^2 \operatorname{tg}\mu\frac{\partial\theta}{\partial\eta}\right)_s d\eta_s+\left[\frac{\rho q^2\sin\theta\sin\mu\operatorname{tg}\mu}{\sin(\theta+\mu)}\frac{\partial\ln r}{\partial\xi}\right]_s d\xi_s+$$

$$+\left[\frac{\rho q^2\sin\theta\sin\mu\operatorname{tg}\mu}{\sin(\theta-\mu)}\frac{\partial\ln r}{\partial\eta}\right]_s d\eta_s=0. \tag{9}$$

这样我們就得到了两个关系. 这两个关系表明, 激波形状与边界条件直接联系是不可能的;在一般情况下,激波的确定必须和流場的确定同时进行,这就証明了, Rosciszewski 的上述关系(5), 严格地說, 是不存在的. 从式(7)我們可以看出, 他所忽略的两項平均量是

$$(d[\rho q^2 \operatorname{tg}\mu])_m(\theta_w-\theta_s)+\left(d\left[\frac{\rho q^2\sin\theta\sin\mu\operatorname{tg}\mu}{\sin(\theta+\mu)}\right]\right)_m(\ln r_w-\ln r_s)=$$

$$=-2\left(\rho q^2 \operatorname{tg}\mu\frac{\partial\theta}{\partial\eta}\right)_w d\eta_w+\rho q^2 \operatorname{tg}\mu\left\{\left[\frac{\sin\theta\sin\mu}{\sin(\theta-\mu)}\frac{\partial\ln r}{\partial\eta}\right]_w d\eta_w-\right.$$

$$-\left[\frac{\sin\theta\sin\mu}{\sin(\theta+\mu)}\frac{\partial\ln r}{\partial\xi}\right]_w d\xi_w\Bigg\} + 2\left(\rho q^2\,\mathrm{tg}\,\mu\frac{\partial\theta}{\partial\eta}\right)_s d\eta_s -$$

$$-\rho q^2\,\mathrm{tg}\,\mu\left\{\left[\frac{\sin\theta\sin\mu}{\sin(\theta-\mu)}\frac{\partial\ln r}{\partial\eta}\right]_s d\eta_s - \left[\frac{\sin\theta\sin\mu}{\sin(\theta+\mu)}\frac{\partial\ln r}{\partial\xi}\right]_s d\xi_s\right\},$$

从下面第三节的分析中容易看出，这两项平均量并不是微不足道的.

在 (s, n) 坐标系內（s 为沿流綫的弧长，n 为与流綫正交的曲綫的弧长），关系 (8) 和 (9) 的意义是非常明显的，它們分别是：

$$\left.\begin{aligned}&d\theta_w + \left[\frac{M^2-1}{\rho q^2}\mathrm{tg}(\beta-\theta)\right]_w dp_w + [(M^2-1)\,\mathrm{tg}^2(\beta-\theta)-1]_w\left(\frac{\partial\theta}{\partial s}\right)_w ds_w +\\&\qquad + \left(\frac{\sin\theta}{r}\right)_w dn_w = 0,\\&\left[\frac{\partial\theta}{\partial s}\rho q^2 + \frac{\partial p}{\partial n}\right]_s ds_s = 0.\end{aligned}\right\}\tag{10}$$

这里表示物面上关系的第二式便是 n 方向的动量方程. 如果将式(10)中第一式两边除以 $ds_w[=d\sigma\cos(\beta-\theta)$，$\sigma$ 是沿激波的距离，β 是激波角]，得到

$$K_s[(M^2-1)\mathrm{tg}^2(\beta-\theta)-1]_w = \left[\frac{-1}{\cos(\beta-\theta)}\right]_w K_w\frac{d\theta_w}{d\beta} -$$

$$-\left[\frac{\mathrm{tg}(\beta-\theta)}{\cos(\beta-\theta)}\frac{M^2-1}{\rho q^2}\right]K_w\frac{dp_w}{d\beta} + \Big[\mathrm{tg}(\beta-\theta)\Big]_w\left(\frac{\sin\theta}{r}\right)_w,\tag{11}$$

式中 $K_s = -\dfrac{d\theta}{ds}$ 和 $K_w = -\dfrac{d\beta}{d\sigma}$ 分别是流綫和激波的曲率. 这就是大家熟悉的激波曲率和流綫曲率之間的关系. 这个关系表明，在定常运动情形下，激波的形状和当地流場是紧密地联系在一起的.

三、关于 Whitham 的特征准則

現在我們来探討，在定常运动情形下，Whitham 的特征准則成立的条件. 为此，我們可以将方程(10)中第 1 式改写为

$$\frac{d\theta_w}{dr_w} + \left(\frac{1}{\rho q^2\,\mathrm{tg}\,\mu}\right)_w\frac{dp_w}{dr_w} + \left(\frac{\sin\theta\sin\mu}{\sin(\theta+\mu)}\right)_w\frac{1}{r_w} =$$

$$= \left(\frac{1}{\rho q^2\,\mathrm{tg}\,\mu}\right)_w\left[1-\frac{\mathrm{tg}(\beta-\theta)}{\mathrm{tg}\,\mu}\right]_w\frac{dp_w}{dr_w} + \left[1-\frac{\mathrm{tg}^2(\beta-\theta)}{\mathrm{tg}^2\mu}\right]_w\left(\frac{\partial\theta}{\partial s}\right)_w\frac{ds_w}{dr_w} +$$

$$+\left(\frac{\sin\theta}{r}\right)_w\left[\frac{\sin\mu}{\sin(\theta+\mu)} - \frac{\sin(\beta-\theta)}{\sin\beta}\right]_w.\tag{12}$$

我們早已知道，正特征綫族上的特征关系为

$$d\theta + \frac{1}{\rho q^2\,\mathrm{tg}\,\mu}dp + \frac{\sin\theta\sin\mu}{\sin(\theta+\mu)}\frac{dr}{r} = 0,\ \text{在}\ \frac{dr}{dx} = \mathrm{tg}(\theta+\mu)\ \text{上}.$$

Whitham 的特征准則乃是計特征关系近似地在激波上滿足：

$$d\theta_w + \left(\frac{1}{\rho q^2\,\mathrm{tg}\,\mu}\right)_w dp_w + \left[\frac{\sin\theta\sin\mu}{\sin(\theta+\mu)}\right]_w\frac{dr_w}{r_w} = 0.\tag{13}$$

在超声速情形下，如果物体的細长比 τ 小，在它前方出現的激波就会弱. 在这种情形

下,式(12)左边三項 $d\theta_w/dr_w$, dp_w/dr_w 和 $(\sin\theta/r)_w$ 的系数的量級都是 $O(1)$, 而右边三項的系数的量級則都是 $O(\tau^2)$. 因此,右边各項就可以忽略. 这也就是說,在弱激波的条件下, Whitham 的特征准則是成立的. 不难証明,这个結論对平面問題也是适用的.

在高超声速情形下 ($M_\infty \gg 1$, $\tau < 1$, 而 $M_\infty\tau \geqslant 1$), 靠近物体将出現強激波. 如果来流的密度和速度分別为 ρ_∞ 和 U_∞, 流場中各物理量的量級将是:

$$\frac{p}{\rho_\infty U_\infty^2} = O(\tau^2),\ \frac{\rho}{\rho_\infty} = O\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right),\ \frac{q}{U_\infty} = O(1),\ \theta = O(\tau),\ \beta = O(\tau). \tag{14}$$

根据上式和激波层概念,我們可以証明,式(12)中各項的量級都是 $O(1)$. 因此,流綫曲率的影响是不能忽略的. 同样,我們也可以証明,在鈍体头部亚声速区域中, $\beta \approx 1$, 流綫曲率的作用也是重要的.

我們利用 Белоцерковский[5] 的繞球体运动的数字結果,在 $\gamma = 1.4$ 和 $M_\infty = \infty$ 的条件下計算了式 (10) 中第 1 式的第 1, 2, 4 等項. 所得結果表明,这些項的数值的确是同一量級的,而它們的和,即包含 $\left(\frac{\partial\theta}{\partial s}\right)_w$ 的一項, 也是同一量級. 这就証明了 Whitham 的准則在高超声速情形下是不适用的.

四、繞鈍头圓柱体的激波的計算

为了进一步闡明激波的形状与流場的密切关系,我們从式 (11) 出发計算了繞鈍头圓柱体 ($\gamma = 1.4$, $M_\infty = \infty$) 的激波的形状. 在这里除 K_s 外, 其它各物理量都可以通过 Rankine-Hugoniot 关系表达为激波角 β 的函数. 在高超声速的条件下,如果 $\beta \ll 1$, K_s 是可以根据小扰动理論来近似地計算的. 由于 $\theta \ll 1$,根据小扰动理論, x, r 方向的速度分量的量級是 $u = U_\infty[1 + O(\tau^2)]$ 和 $\frac{v}{U_\infty} = O(\tau)$, 所以

$$\theta \approx \operatorname{tg}\theta \approx \frac{v}{U_\infty},$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial s} \approx \frac{1}{U_\infty}\left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r}\frac{v}{U_\infty}\right]. \tag{15}$$

张涵信在处理这个問題的时候引入

$$\lambda = \frac{r}{r_w},\ Y = \frac{1}{M_\infty^2 \sin^2\beta(x)};$$

幷且令

$$\frac{p}{p_w} = h(\lambda, Y),\ \frac{\rho}{\rho_w} = g(\lambda, Y),\ \frac{v}{v_w} = f(\lambda, Y).$$

在 $M_\infty^2 \sin^2\beta(x) \gg 1$ 的条件下, h, g, f 可以展为

$$h = h_0(\lambda) + Yh_1(\lambda) + \cdots,$$
$$g = g_0(\lambda) + Yg_1(\lambda) + \cdots,$$
$$f = f_0(\lambda) + Yf_1(\lambda) + \cdots$$

如果仅考虑零級近似 $f = f_0(\lambda)$, 則

$$v \approx v_w f_0(\lambda) \quad 或 \quad \theta \approx \theta_w f_0(\lambda).$$

将上式代入式(15)，并利用 Rankine-Hugoniot 关系 ($Y=0$)，我們得到

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial s}\right)_w=\frac{2}{\gamma+1}\left[-f_0'(1)\sin^2\beta\frac{1}{r_w}+\frac{d\beta}{dx}f_0(1)+f_0'(1)\frac{2}{\gamma+1}\frac{\sin^2\beta}{r_w}\right].$$

根据相似性解的边界条件：

$$f_0(1)=1,\ f_0'(1)=\frac{\gamma+3}{\gamma+1},$$

上式可改写为

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial s}\right)_w=\frac{2(\gamma+3)(1-\gamma)}{(\gamma+1)^3}\frac{\sin^2\beta}{r_w}+\frac{2}{\gamma+1}\frac{d\beta}{dx}.\tag{16}$$

把式(16)和 Rankine-Hugoniot 关系代入式(11)，在 $M_\infty=\infty$ 的条件下，經过整理后得到

$$\frac{2(\gamma+1)\left(1+\dfrac{\gamma-1}{\gamma}\right)-(8\gamma-4)\sin^2\beta-\dfrac{1}{\gamma(\gamma+1)\cos^2\beta}[(\gamma+1)^2-4\gamma\sin^2\beta]^{3/2}}{2\sin\beta\cos\beta(\gamma-1)-\dfrac{(\gamma+3)(1-\gamma)}{\gamma(1+\gamma)^3}\operatorname{tg}\beta[(\gamma+1)^2-4\gamma\sin^2\beta]^{3/2}}d\beta=$$

$$=-\frac{dr_w}{r_w}.\tag{17}$$

通过数值积分，并任取 Чушкин[6] 計算的一点 A 作为初始值 ($x_0=1.200$, $r_{w_0}=1.663$, $\sin\beta_0=0.500$)，我們就算出了激波的形状（图 2）。为了进行比較，在图中也給出了 Чушкин 的精确計算結果 ($M_\infty=\infty$, $\gamma=1.4$) 和在空气中的实驗結果 ($M_\infty=7.7$, $C_D=0.914$)。可以看出，本文結果与 Чушкин 的精确計算結果是相当符合的。虽然由于 M 数不同，与实驗結果比較是有距离的，但是趋势还是一致的。

为了近似地求解，我們可以将 $d\beta$ 的系数按 $\operatorname{tg}\beta$ 展开，并保留到 $\operatorname{tg}\beta$：

$$\left[\frac{1}{\operatorname{tg}\beta}-A(\gamma)\operatorname{tg}\beta\right]d\beta=-\frac{dr_w}{r_w},$$

式中

$$A(\gamma)=\frac{(\gamma-1)(7\gamma^2+14\gamma+1)}{3(\gamma+1)^3}.$$

积分后得

$$r_w\sin\beta\cos^A\beta=\text{const.}=\frac{c_1}{\sqrt{2}}\tag{18}$$

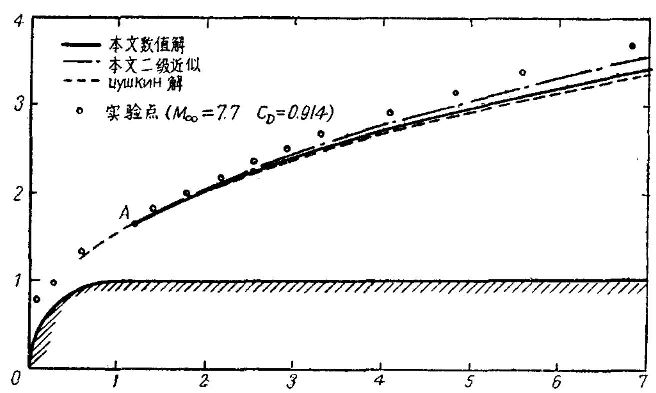

图 2　激波的形状

或

$$\mathrm{tg}\,\beta = \sqrt{2}\left[\frac{r_w - \sqrt{r_w^2 - (A+1)c_1^2}}{(A+1)c_1}\right].$$

由于 $\mathrm{tg}\,\beta = \frac{dr_w}{dx}$, 积分后得

$$r_w\sqrt{r_w^2-(A+1)c_1^2}-(A+1)c_1^2\ln(r_w+\sqrt{r_w^2-(A+1)c_1^2})+r_w^2=2^{3/2}c_1x+c_2, \quad (19)$$

式中 c_1, c_2 是两积分常数. 在同样的初始値下,图 2 也給出了式(19)的結果,它与 Чушкин 的結果也是符合得較好的. 显然, 当 r_w 很大时, $r_w \propto \sqrt{x}$, 这和爆炸波比拟理論的結果一致.

上面的計算清楚地說明,在高超声速气流繞过鈍头圓柱体时,激波的形状和流場是紧密相关的. 对于这种激波,用 Whitham 的特征准則来計算是很不精确的.

五、結　論

总結以上討論,我們認为:

1. Rosciszewski 所建立的激波和另一边界上各物理量之間的关系是不正确的.

2. Whitham 的特征准則一般仅适用于弱激波. 对于計算向中心传播的強激波,它的成功是由于激波运动方程中与流場有关的因子$\left(\frac{\partial p}{\partial t} + \rho a\frac{\partial v}{\partial t}\right)$($v$, a, t 分別为气体質点速度、声速和时間)中的两項几乎相互抵消,这样 Whitham 的特征准則和激波运动方程便基本上趋于一致了. 但这只是一个例外.

3. 孤立地計算激波的形状一般是不可能的;如果激波上流綫的曲率可以近似地計算,激波和流綫曲率之間的关系便可以近似作为研究激波形状的基础.

本文是在郭永怀同志直接指导下完成的,在此向他表示衷心的感謝.

参 考 文 献

[1] Chester, W., The quasi-cylindrical shock tube, *Phil. Mag.* (7), **45**, 371, 1954, 1293—1301.

[2] Whitham, G. B., On the propagation of shock waves theory regions of non-uniform area or flow, *Jour. Fluid Mech.*, **4**, 4, 1958, 337—360.

[3] Rosciszewski, J., Calculations of the motion of non-uniform shock waves, *Jour. Fluid Mech.*, 8, 3, 1960, 337—367.

[4] Rosciszewski, J., Hypersonic flow around bodies of revolution, *Jour. Aero. Sci.*, 28, 2, 1961, 168—170.

[5] Белоцерковский, О. М., Расчет обтекания осемметричных тел с отошедшей ударной (Расчетные формулы и таблицы полей течений), Вычислительный центр АН СССР, Москва, 1961.

[6] Чушкин, П. И., Шулишнина, Н. П., Таблицы сверхзвукового течения около затупленных конусов, Вычислительный центр АН СССР, Москва, 1961.

APPROXIMATE METHOD FOR CALCULATING THE SHAPE OF A SHOCK WAVE IN HYPERSONIC FLOWS

JIĀNG YÚ-SHŪ
(*Institute of Mechanics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

In this paper, Rosciszewski's method for calculating the shape of a shock wave is examined. It is shown that the differential relationship connecting quantities on a shock and those on a given curve as given by Rosciszewski is incorrect. If his procedure is carried out correctly, the result obtained is no other than the well-known relationship between curvatures of the shock and the streamline behind the shock. It is also shown that Whitham's characteristic rule, in general, does not apply to an expanding shock except for weak ones. As an example, an approximate calculation of the shock shape by utilizing the equation for the curvatures of the shock and the streamline is made in the case of a blunt-nosed body in hypersonic flow.