

# 密度波理论的自洽星系激波

胡文瑞

(中国科学院力学研究所)

**提要** 本文将文献[1]中的解法应用到密度波理论的星系激波中,得到双臂的激波宏图。激波后的星际气体自引力场对总和扰动引力场有很大影响。本文还讨论了星系激波的一般性质,以及等效声速的变化对星系激波解的影响。

## 一、前言

自从 Fujimoto<sup>[2]</sup> 引进星系激波的概念后,在密度波理论中得到了广泛的应用<sup>[3-7]</sup>。Woodward<sup>[8]</sup> 计算了不定常问题。作者用定性分析的方法讨论了这类星系激波的特性<sup>[9]</sup>。关于星系激波的稳定性问题,近来也引起广泛兴趣<sup>[10-12]</sup>。所有这些分析中都没有考虑星际气体的自引力,这是密度波理论中的一个重要问题<sup>[13]</sup>。

本文利用文献[1]中给出的叠代方法,求出有长期扰动引力场时星系激波的自洽解,并讨论星系激波的一般特性。

## 二、基本方程和解法

按照通常的方法,取螺旋坐标系 $(\xi, \eta)$ ,即

$$\xi = -\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)\sin i + (\theta - \Omega_p t)\cos i, \quad \eta = \ln\left(\frac{r}{r_0}\right)\cos i + (\theta - \Omega_p t)\sin i \quad (2.1)$$

表示了它与柱坐标 $(r, \theta, z)$ 的关系。这样,局部星系激波解的渐近方程组为<sup>[1-14]</sup>

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_0 + \sigma)(w_{\eta_0} + w_\eta) &= \sigma_0 w_{\eta_0} \\ \frac{(w_{\eta_0} + w_\eta)^2 - a^2}{w_{\eta_0} + w_\eta} \frac{\partial w_\eta}{\partial \eta} &= 2\Omega r w_\xi - \left(\frac{\partial v_*}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial \eta}\right)_{z=0} \\ (w_{\eta_0} + w_\eta) \frac{\partial w_\xi}{\partial \eta} &= -\left(\frac{k^2 r}{2\Omega}\right) w_\eta \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

其中的符号皆通常含义,外加扰动引力场 $v_*$ 为

$$v_*(r, \theta, 0) = -A(r, \theta) \cos\left(\frac{2}{\sin i} \eta + \eta_0\right) \quad (2.3)$$

而 $v$ 为气体扰动引力场,它满足泊松方程

$$\Delta v = 4\pi G \sigma \delta(z) \quad (2.4)$$

仿照[1]中的叠代方法,计算下列方程组<sup>[4]</sup>:

本文于1979年2月17日收到。

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_0 + \sigma^{(n)})(w_{\eta_0} + w_{\eta}^{(n)}) &= \sigma_0 w_{\eta_0} \\ \frac{(w_{\eta_0} + w_{\eta}^{(n)})^2 - a^2}{(w_{\eta_0} + w_{\eta}^{(n)})} \frac{\partial w_{\eta}^{(n)}}{\partial \eta} &= 2Qr w_{\xi}^{(n)} - \left( \frac{\partial v_*}{\partial \eta} + \frac{\partial v^{(n-1)}}{\partial \eta} \right)_{z=0} \\ (w_{\eta_0} + w_{\eta}^{(n)}) \frac{\partial w_{\xi}^{(n)}}{\partial \eta} &= - \left( \frac{k^2 r}{2Q} \right) w_{\eta}^{(n)}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

以及上半平面 ( $z > 0$ ) 中的泊松方程

$$\left. \begin{aligned} \Delta v^{(n)} &= 0 \\ \frac{\partial v^{(n)}}{\partial z} \Big|_{z=0} &= 2\pi G \sigma^{(n)}(r, \theta), \quad v^{(n)} \Big|_{z \rightarrow \infty} \rightarrow 0 \\ \frac{\partial v^{(n)}}{\partial r} \Big|_{r=0} &= 0, \quad v^{(n)} \Big|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

式 (2.6) 中利用了对称条件. 适当选择  $v^{(0)}$  的值, 由式 (2.5) 可求出各个半径  $r$  上的局部流场和密度  $\sigma^{(n)}$ , 然后由式 (2.6) 可求出引力势  $v^{(n)}$ ; 再代入 (2.6) 求下一次叠代的流场, …… 如此叠代, 直到收敛. 非线性方程组的稳定性条件在 [9—11] 中讨论.

局部激波方程 (2.5) 是在螺旋坐标系  $(\xi, \eta)$  中求解, 而泊松方程 (2.6) 是在柱坐标中求解. 每次叠代都需要利用坐标变换 (2.1) 将  $\sigma(\xi, \eta)$  变为  $\sigma(r, \theta)$ , 以及将  $v(r, \theta, 0)$  变为  $v(\xi, \eta, 0)$ . 显然, 这样求出的解包含有星际气体的全局性质.

光滑地跨声速流动要求局部声速奇点为鞍点<sup>[9]</sup>. 由叠代方程组 (2.5) 得到, 当

$$w_{\eta_0} + w_{\eta}^{(n)} = a$$

时,

$$w_{\xi}^{(n)} = \frac{1}{2Qr} \left[ \frac{\partial v_*}{\partial \eta} + \frac{\partial v^{(n-1)}}{\partial \eta} \right]_{z=0} \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial w_{\eta}^{(n)}}{\partial \eta} = \pm \sqrt{(kr)^2 \frac{w_{\eta_0} - a}{2a} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 v_*}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 v^{(n-1)}}{\partial \eta^2} \right)_{z=0}} \quad (2.8)$$

声速点为鞍点要求式 (2.8) 有两个实的方向, 即

$$(kr)^2 \frac{w_{\eta_0} - a}{a} > \left( \frac{\partial^2 v_*}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 v^{(n-1)}}{\partial \eta^2} \right)_{w_{\eta_0} + w_{\eta}^{(n)} = a} \quad (2.9)$$

式 (2.9) 右端并不很小, 即使是  $w_{\eta_0} > a$  的基本超声速流动, 也不能保证一定会有光滑跨声速流动解. 而在  $w_{\eta_0} < a$  时, 是没有光滑跨声速流的<sup>[9,11]</sup>.

### 三、计算结果

由运动方程 (2.5) 可以求出局部的相对密度分布  $\sigma^{(n)}/\sigma_0$ . 为了得到泊松方程所需要的密度场  $\sigma^{(n)}(r, \theta)$ , 必须选择气体密度分布的模型. Mezger (1972) 给出了银河系中性氢 HI 的面密度分布<sup>[16]</sup>. Paul 等 (1976) 曾提出银河系的总气体分布模型<sup>[17]</sup>. 这两个模型的气体面密度值和峰值分布有相当的差异. 考虑到直接观测的可靠性, 我们采用 Mezger (1972) 模型 (参看表 1), 并取模型的平均密度值的 0.4 倍为计算中的轴对称基态值  $\sigma_0(W)$ . 所有旋转曲线参数皆采用 Schmidt (1965) 银河系模型的数值.

根据密度波理论的要求<sup>[18]</sup>, 取  $Q_p$  为 11 或 12 公里/秒·千秒差距,  $i = 7^\circ$ . 在本节中

我们讨论气体的等效声速不变,恒等于 8 公里/秒.

求解三维泊松方程 (2.7) 时采用的网格数为径向步长  $\Delta r = 0.5$  千秒差距, 延伸至 18.5 千秒差距; 环向  $\theta$  的步长为  $5^\circ$ ; 轴向步长  $\Delta z = 1$  千秒差距, 延伸至 10 千秒差距. 这样, 每 0.5 千秒差距处求一次方程 (2.5) 的局部解, 由此得到盘面中网格点上的面密度场. 具体计算过程中, 如果参数取得合适, 叠代的收敛很快, 一般循环 2—3 次即很好.

为了保证激波的宏图, 我们要求局部解的声速线位于统一的等角螺旋线

$$\ln\left(\frac{r}{3}\right)\cos i + (\theta - Q_p t)\sin i = 0 \tag{3.1}$$

的邻近. 调整一般限于曲线 (3.1) 附近几度的范围内. 当然, 声速点的位置可以与外加周期扰动引力势的最小值位置有一个相移, 可适当地选择  $\eta_0$ . 但是, 为了保持宏图的完整性, 在求每个局部解时都保持同一个  $\eta_0$  值不变.

图 1 是  $Q_p = 11$  公里/秒·千秒差距,  $F = 0.05$ ,  $\eta_0 = -5^\circ$  时在位置  $W = 5$  千秒差距处叠代第 5 次的参数解, 叠代过程收敛很快. 可以看出, 法向速度分量  $w_n$  有较强的间断, 气体压缩造成的面密度比值高达 7 以上, 最大  $\sigma$  比其最小值增加十余倍, 可达到 4/厘米<sup>2</sup> 以上. 最下面一个图是由计算得到的流线径向变化、表明局部解条件得到满足. 图 2 为同样条件下的引力势分布. 实线为气体自引力, 虚线为外加的扰动周期引力势, 点划线为总合引力势. 气体引力势在激波附近的值比 5% 的扰动引力势还要大. 因此, 总合引力势  $v_* + v$  明显地受气体自引力势的很大影响. 但总合引力势的值与轴对称基态引力势相比, 仍为小量.

图 3 为  $F = 0.02$  时,  $Q_p = 11$  公里/秒·千秒差距,  $\eta_0 = -9^\circ$ , 叠代计算 5 次的结

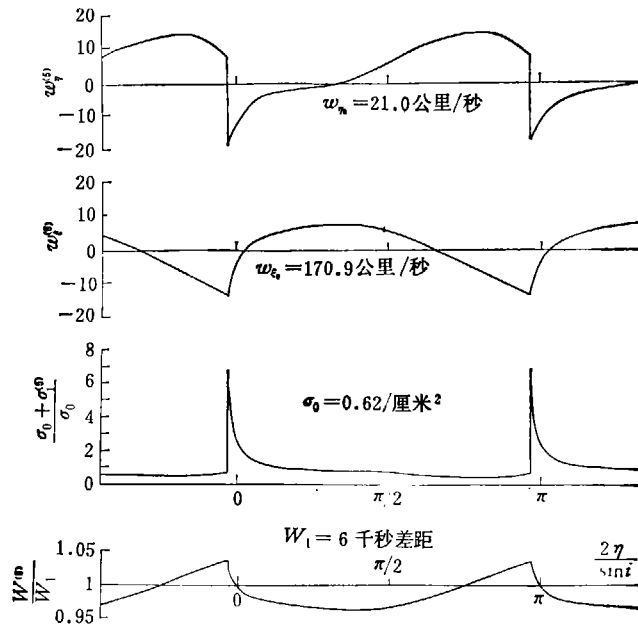


图 1 自洽激波解的分布, 其中  $Q_p = 11$  公里/秒·千秒差距,  $F = 0.05$ ,  $r = 5$  千秒差距,  $\eta_0 = -5^\circ$ .

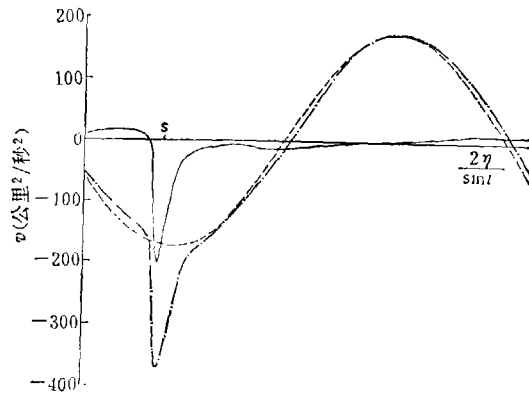


图 2 自洽激波解的典型引力势分布,其中参数与图 1 相同,  $s$  代表声速点位置,横轴范围是一个周期  $\pi$ .

$$-\cdots- v^{(s)} + v_* \quad \text{---} v^{(s)} \quad \text{---} v_* = -0.05(WQ)^2 \frac{\sin^2 \gamma}{2} \cos\left(\frac{2\gamma}{\sin \gamma} - 5^\circ\right)$$

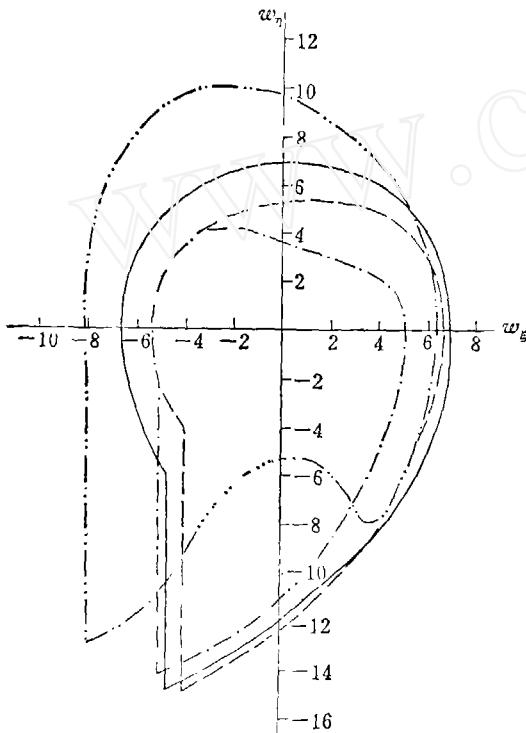


图 3 自洽星系激波在速度平面  $(\omega_x, \omega_y)$  中的分布,其中  $\Omega_p = 11$  公里/秒·千秒差距,  $F = 0.02$ ,  $\eta_0 = -9^\circ$ .

—  $r = 4$  千秒差距    ---  $r = 6$  千秒差距  
 - - -  $r = 8$  千秒差距    - · - ·  $r = 10$  千秒差距

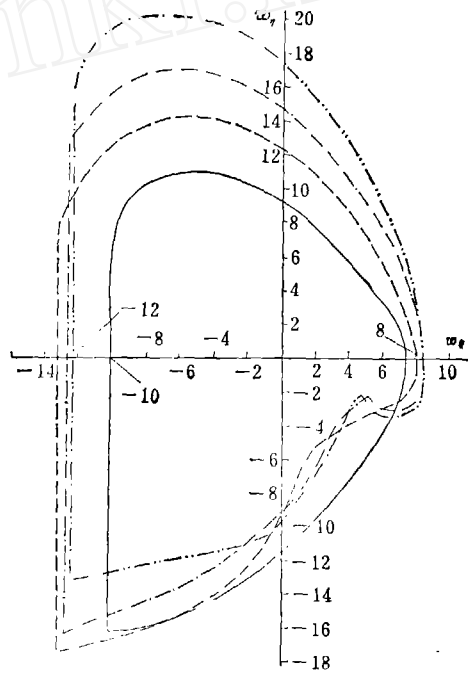


图 4 自洽星系激波在速度平面中的分布,其中  $\Omega_p = 12$  公里/秒·千秒差距,  $F = 0.05$ ,  $\eta_0 = -5^\circ$ .

—  $r = 4$  千秒差距    ---  $r = 6$  千秒差距  
 - - -  $r = 8$  千秒差距    - · - ·  $r = 10$  千秒差距

果. 图 4 为  $F = 0.05$ ,  $\Omega_p = 12$  公里/秒·千秒差距,  $\eta_0 = -5^\circ$ , 叠代 5 次的计算结果. 这两种情况的气体引力势  $\nu$  与图 2 中的数值和分布相似. 所以, 对较小的  $F$  值, 星际气体的引力势的绝对值在激波后比  $|\nu_*|$  相对地更大, 气体组分对总和引力场的相对影响更严重. 图 3 的法向速度间断较小, 所以压缩程度略小些; 而图 4 的法向速度间断大, 所以密度变化也大. 还可以看出, 银心距  $W$  较小时, 速度分布比较光滑, 但随着银心距  $W$  的增大, 不光滑程度也增加. 最后, 表现出明显的不稳定性. 但在内部区域, 叠代的收敛性好, 而且快.

在计算中如果把声速点的位置严格地置于螺旋线的公式 (3.1) 上而不进行任何调整, 则只有在  $\eta_0 = 0$  附近才能得到延伸于大部分盘面区域的第一次叠代 ( $\nu = 0$ , 即非自洽解) 激波宏图. 图样可延伸到 14 千秒差距. 但若不当调整声速点的相对位置, 图样延伸的范围就很小. 在较外部区域, 局部解容易表现出各种不规则性, 奇异性, 以及不稳定性. 这可能是由于奇点性质变化引起的. 为了得到规则的大尺度星系激波, 以及为了调整激波前后的关系, 我们在计算中整体地调整  $\eta_0$  的值, 同时局部地调整声速点在式 (3.1) 的相对位置. 由于引力势  $\nu_* + \nu$  的导数在声速点附近较大, 这种调整是灵敏的. 几度的调整范围, 可得延伸至 10 千秒差距以上的大尺度激波宏图.

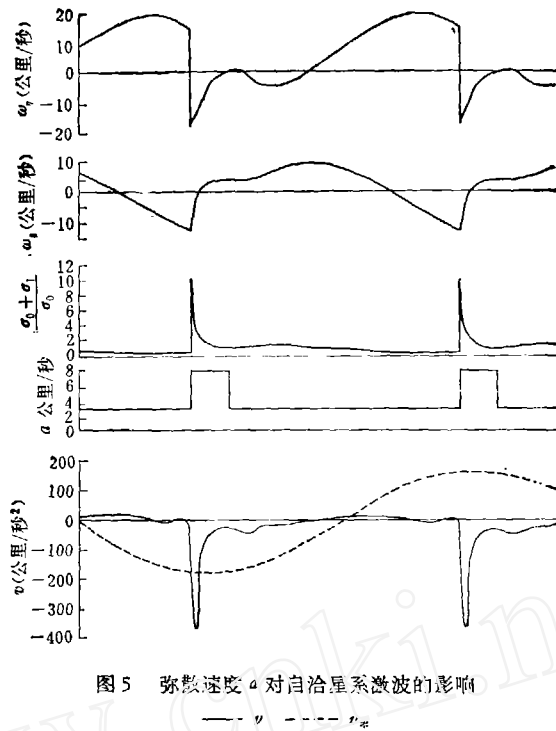
#### 四、结果和讨论

自洽解与非自洽解的一个区别是, 必须考虑全局场的影响. 计算表明, 自洽解的总和引力势  $\nu_* + \nu$  与外加场  $\nu_*$  有很大的差别, 特别是在激波阵面后. 表 1 给出 10% 的银河系总面密度值与 5 倍星际气体平均密度的值, 以及二者之比. 比值在很大范围内都大于 1. 密度波理论认为, 外加扰动引力场主要是恒星的扰动引力场. 如果星际气体的引力场并不比恒星扰动引力场弱, 一般就不能忽略. 因此, 需要讨论线性恒星密度波与非线性气体激波的自洽解.

表 1 面密度的分布

$W$ (千秒差距)	4	6	8	10	12	14	16	18
$\sigma_T (M_\odot / \text{秒差距}^2)$	521	338	206	114	65.9	41.5	27.8	19.5
$\sigma_g (\text{厘米}^{-2})$	0.29	0.62	0.85	0.63	0.70	0.87	0.14	0.04
$5\sigma_g / 0.10\sigma_T$	0.2	0.7	1.6	2.0	4.1	8.0	1.9	0.8

最后, 讨论星系激波的一般性质. 气体动力学的激波理论要求满足守恒关系, 要给出熵的增加方向, 应有确定的结构, 并且必须具有稳定性.  $\alpha$  等于常数的星系激波对应于等温的情况. 等熵激波在气体动力学中是没有物理意义的. 事实上, 这里讨论的等效声速  $\alpha$  是气体湍流的一种简单度量. 在激波后气体压缩状态变化了, 并产生了年青恒星, 那里的等效声速值  $\alpha$  应该比较大, 而在臂际区域的  $\alpha$  值相应地较小. 这个问题曾由 Kato 讨论密度波的维持时首先指出<sup>[19]</sup>. 如果采用适当的  $\alpha$  值分布, 就可以计算出激波的行为. 图 5 中绘出了一个初步计算的结果. 由于  $\alpha$  的不均匀性, 引起了流场和密度场的不光滑性. 这些结果表明, 我们必须进一步地讨论能量守恒关系对星系激波的影响. 一方面是

图5 弥散速度  $a$  对自洽星系激波的影响

为了使激波理论更加完善, 另外一方面也是为了补偿等  $a$  值计算时造成的激波间断的能量亏损。还应该指出, 由于气体动力学方程组 (2.5) 是在许多近似处理下得到的近似关系, 所以它的积分曲线并不严格保持各种守恒关系。在文献 [13] 中我们求出了积分曲线的分析表达式, 可以清楚地看出这一点。关于质量守恒关系, 人们在局部解近似下将通量值取为基态值  $\sigma_0 w_{\eta_0}$  [如式 (2.5) 第一式所表达], 这是合理的。关于动量守恒关系, 人们时常通过调整声速点的位置来尽量满足激波前后动量守恒的间断关系<sup>[5-7]</sup>。事实上, 在一个完整的问题中激波位置是确定而不能任意选取的。比如 Woodward<sup>[8]</sup> 的不定常激波解中讨论了密度波理论的激波形成过程。最后得到的激波解明显地不满足动量守恒的激波跳跃关系。调整局部声速点的位置可以得到局部解个别位置的对应守恒关系, 但不能改变近似运动方程组的不准确性。这种调整在非自洽激波计算中还往往破坏了整个激波的宏图, 并不一定是个好的措施。要严格地保证守恒关系得到满足, 人们必须从准确的气体动力学方程组出发去研究星系激波的行为。关于非局部自洽激波解的特征, 将在另文中讨论。为了在近似的方程下追求严格的激波动量守恒关系, 不难从调整  $a$  的适当分布而得到。在图 5 中计算了一种  $a$  的分布。可以看出, 激波前后适当调整  $a$  值对局部解不会有很大影响, 而这对于激波守恒关系却是敏感的。当然,  $a$  的分布也应该由一定的物理规律来确定。在我们的自洽激波解的计算中, 在激波附近引力势的值和梯度都有很大的变化。通过调整声速点的位置确能在激波前后满足动量守恒的间断关系。而这种调整的范围一般也不大。尽管如此, 这也没有改变守恒关系的近似性质。

我们曾对周期解的稳定性进行过分析, 并用于讨论星系激波的稳定性<sup>[11]</sup>。如果通过声速点的分界线环是周期解, 则  $w_{\eta_0} > a$  时稳定,  $w_{\eta_0} < a$  时不稳定<sup>[11]</sup>。在自洽激波解

中,总和引力势畸变,可能不存在周期的分界线环,所以经常表现出不稳定的性质. 星系激波的稳定性尚需研究.

作者感谢敖超同志在计算上给予的帮助.

### 参 考 文 献

- [1] 胡文瑞、敖超, 中国科学, **12** (1979).
- [2] Fujimoto, M., *IAU symp.*, No. 29(1966), 453.
- [3] Roberts, W. W., *Astrophys. J.*, **158**(1969), 123.
- [4] Roberts, W. W., Yuan, C., *Astrophys. J.*, **161**(1970), 877.
- [5] Shu, F. H., et al., *Astrophys. J.*, **173**(1972), 557.
- [6] Shu, F. H., et al., *Astrophys. J.*, **183**(1973), 819.
- [7] Taso, M., *Publ. Astron. Soc. Japan*, **25**(1973), 191.
- [8] Woodward, P. R., *Astrophys. J.*, **195**(1975), 61.
- [9] 胡文瑞, 科学通报, **22**, 2 (1977), 79.
- [10] Michurov, Yu. N., Suchkov, A. A., *Astrophys. Space Sci.*, **35**(1975), 285.
- [11] 秦元勋、王联、王慕秋、胡文瑞, 科学通报, **24** (1979), 746.
- [12] Nelson, A. H., Matsuda, T., *Monthly Notices RAS*, **179**(1977), 663.
- [13] Weilen, R., *Publ. Astron. Soc. Pacific*, **86**(1974), 341.
- [14] 胡文瑞, 关于星系激波, 在第二届流体力学会议上的报告.
- [15] 胡文瑞, 力学情报, **1** (1977), 17.
- [16] Mezger, P. G., in *The Interstellar Medium*, Edt. Pinkar, K., (1974), p. 9.
- [17] Paul, J., et al., *Astrophys. J.*, **207**(1976), 62.
- [18] 林家翘, 星系螺旋结构理论, 胡文瑞、韩念国译, 科学出版社 (1977).
- [19] Kato, S., *Publ. Astron. Soc. Japan*, **27**(1975), 421.

## GALACTIC SHOCK WAVE WITH SELF-GRAVITATION OF GASEOUS COMPONENTS IN THEORY OF DENSITY WAVE

Hu Wen-rui

(Institute of Mechanics, Academia Sinica)

### Abstract

It is necessary to study the galactic shock wave with self-gravitation of gaseous component in the theory of density wave. The iterative method given in paper [1] is applied to the galactic shock wave of density wave theory, and the two-arm grand design of galactic shock is obtained. The resultant gravitational field is influenced enormously by the gaseous component in the region near the shock front. General properties of galactic shock wave and the influence of the variation of effective sound velocity on the solution of galactic shock wave are discussed also.